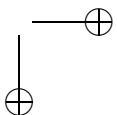
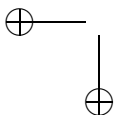


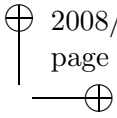
Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Apresentação dos Sistemas de Controle	1
1.2	Exemplos	5
1.2.1	Aquecimento de um Quarto	5
1.2.2	Um Problema de Controle Discreto	7
1.2.3	Um Problema de Tempo Mínimo	11
1.2.4	Lançamento de um Foguete	12
1.2.5	Equilíbrio de um Bastão	13
1.2.6	Concentração de Chumbo no Corpo Humano	16
1.2.7	A Braquistócrona	18
1.2.8	Um Problema de Controle Ótimo	21
	Exercícios	24
2	Observabilidade	26
2.1	Sistemas Lineares	26
2.2	Subespaço não Observável	33
2.3	Reconstrução de Estados	35
	Exercícios	37
3	Controlabilidade	39
3.1	Sistemas Lineares	39
3.2	Controlabilidade e Observabilidade	42
3.3	Sistemas de Controle Autônomos	44
3.4	Forma Normal dos Sistemas Autônomos	47
3.5	Controlabilidade e Estratégias Ótimas	51
3.6	Atingibilidade de Estados com Restrições de Controle	54
3.7	Princípio do Bang–Bang e Problemas de Tempo Mínimo	60
3.8	Controlabilidade de Sistemas Lineares Discretos	65
	Exercícios	67



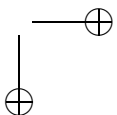
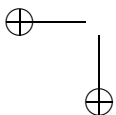
CONTEÚDO

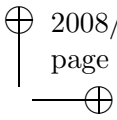
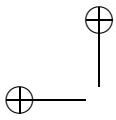
4	Estabilidade	71
4.1	Conceito e Exemplos	71
4.2	Estabilidade de Sistemas Lineares	75
4.3	Critério de Routh–Hurwitz	78
4.4	Perturbação de Sistemas Lineares	81
4.5	Método de Lyapunov	87
4.6	Equação Matricial de Lyapunov	92
4.7	Estabilidade de Sistemas Lineares Discretos	96
	Exercícios	98
5	Estabilização	101
5.1	Sistemas Lineares	102
5.2	Colocação de Pólos	105
5.3	Observador Dinâmico	109
5.4	Estabilização por Realimentação de Saída	114
5.5	Pontos de Operação	116
	Exercícios	119
6	Identificação de Parâmetros	120
6.1	Controle Automático	120
6.2	Identificabilidade	121
6.3	Identificação Adaptativa: Introdução	126
6.4	Identificação Adaptativa: Estabilidade	131
	Exercícios	137
7	Cálculo Variacional	138
7.1	Problemas Variacionais e Convexidade	139
7.2	Lemas de du Bois–Reymond e Lagrange	145
7.3	Equação de Euler–Lagrange	147
7.4	Extremais Diferenciáveis por Partes	156
7.5	Problemas Vetoriais	164
	Exercícios	165
8	Princípios Variacionais na Mecânica	168
8.1	Mecânica Newtoniana	168
8.2	Teoremas Conservativos em Sistemas Fechados	177
8.3	Mecânica Lagrangeana	178
8.4	Mecânica Hamiltoniana	183
	Exercícios	189



CONTEÚDO

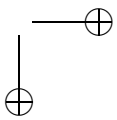
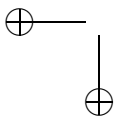
9	Cálculo Variacional e Controle Ótimo	192
9.1	O que é Controle Ótimo	192
9.2	Problemas Variacionais com Restrição	194
9.3	Extremais Singulares e Trajetórias Ótimas	202
9.4	Controle Ótimo e Convexidade: condições suficientes . . .	207
9.5	Controle Ótimo e Convexidade: condições necessárias . .	211
	Exercícios	213
10	Princípio do Máximo	216
10.1	Problemas com Horizonte Finito	217
10.2	Problemas com Horizonte Infinito	222
10.3	Aplicações do Princípio do Máximo	226
	Exercícios	242
11	Programação Dinâmica Discreta	244
11.1	Introdução	244
11.2	Problema do Caminho Simples	246
11.3	Problema da Substituição de Equipamento	251
11.4	Problema do Caixeiro Viajante	253
11.5	Problema Linear-Quadrático Discreto	256
11.6	Problema de Decisões Consecutivas	260
	Exercícios	265
12	Programação Dinâmica Contínua	268
12.1	Função Valor Ótimo	268
12.2	Princípio de Bellman	274
12.3	Equação de Hamilton–Jakobi–Bellman	276
12.4	Problema de Controle Linear-Quadrático	285
	Exercícios	294
13	Soluções Viscosas e Função Valor	299
13.1	Soluções Viscosas de EDP’s	299
13.2	Fórmula de Hopf–Lax	307
13.3	Função Valor como Solução Viscosa de HJB	312
13.4	Princípio do Máximo	317
13.5	Unicidade de Soluções Viscosas	323
	Exercícios	328

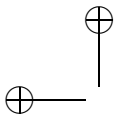
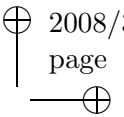




CONTEÚDO

Apêndice A: Equações Diferenciais Ordinárias	329
A.1 Exponencial de uma Matriz	329
A.2 Sistemas Lineares Autônomos	331
A.3 Sistemas Lineares não Autônomos	336
A.4 Sistemas não Lineares: existência e unicidade	342
A.5 Sistemas não Lineares: dependência contínua	347
A.6 Método de Shooting	350
Exercícios	353
Apêndice B: Demonstração do Princípio do Máximo	356
B.1 Otimização Infinita	356
B.1.1 Um Problema Abstrato de Otimização	357
B.1.2 Linearização do Problema de Otimização	359
B.1.3 Condições Necessárias para o Problema Abstrato	367
B.2 Um Problema Auxiliar	370
B.3 Condições Necessárias para Otimalidade	379
Lista de Símbolos	383
Bibliografia	385
Índice Remissivo	393





Lista de Figuras

- 1.1 Estratégia de controle de malha aberta 3
- 1.2 Estratégia de controle de malha fechada 3
- 1.3 Equilíbrio de um bastão 14
- 1.4 Ciclóide: solução do problema da Braquistócrona 20

- 3.1 Piloto automático para controle de altitude 70

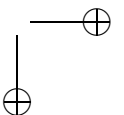
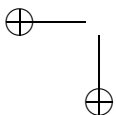
- 4.1 Campo vetorial com pontos de equilíbrio de diferente natureza 74
- 4.2 Campo vetorial com ponto de equilíbrio atrativo porém não estável 76
- 4.3 Ponto de equilíbrio assintoticamente estável ($x'' + 2x' + \sin x = 0$) 84
- 4.4 Ponto de equilíbrio não estável ($x'' + 2x' + \sin x = 0$) 85
- 4.5 Órbita do atrator de Lorenz 87

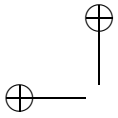
- 7.1 Curva admissível unindo os pontos P e Q 153
- 7.2 Construção da função g no Teorema 144 159

- 8.1 A corda sob tensão 181
- 8.2 Um perfil de potencial 191

- 9.1 Condição de transversalidade e funções admissíveis 195
- 9.2 Trajetória admissível que intercepta o extremal singular 205
- 9.3 Trajetória admissível que não intercepta o extremal singular 206
- 9.4 Condição de transversalidade para a Braquistócrona 213

- 10.1 Algoritmo do método de *shooting* para sistema hamiltoniano 221





LISTA DE FIGURAS

10.2 Tempo mínimo: trajetórias correspondentes a controles extremos 230

10.3 Tempo mínimo: trajetórias correspondentes a controles constantes 230

10.4 Tempo mínimo: uma trajetória ótima genérica 231

10.5 Alunissagem: condições iniciais para um controle ótimo especial 233

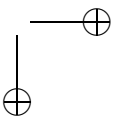
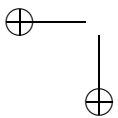
10.6 Alunissagem: trajetórias ótimas 234

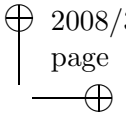
11.1 Mapa da cidade com ruas de mão única. 246

11.2 Cidade projetada sobre sistema de coordenadas. 249

11.3 Grafo para o problema do caminho mais curto. 267

B.1 Cones tangenciais $C(x)$ e $T(C, x)$ 359



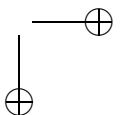
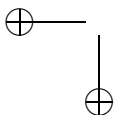


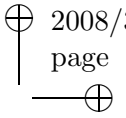
Prefácio

A intenção do presente manuscrito é apresentar, de forma introdutória, diversos aspectos relacionados à teoria de controle. A gama de aplicações desta teoria é bastante ampla, permitindo a abordagem de problemas atuais (veja, e.g., [KIF], [SHB], [SFG]) oriundos de diferentes áreas do conhecimento, tais como matemática, física, economia, engenharia e demais ciências aplicadas. O texto possui como uma de suas principais características o tratamento formal, do ponto de vista matemático, dos resultados apresentados. Paralelamente à introdução de conceitos e discussão de resultados teóricos, é dada ênfase à análise de exemplos correspondentes, motivados por problemas práticos. A opção por esse tipo de abordagem visa não somente permitir uma melhor compreensão dos resultados teóricos, como também ilustrar de forma detalhada o vasto espectro de aplicações da teoria tratada neste manuscrito.

O texto é, em sua quase totalidade, autocontido. O leitor familiarizado com conceitos de *álgebra linear* e *análise real* não deve ter dificuldades em acompanhar o manuscrito. Um pré-requisito essencial para a compreensão do conteúdo é discutido no primeiro apêndice. Trata-se da teoria de *equações diferenciais ordinárias* (ou EDO's). Uma vez que tais resultados são utilizados ao longo de todo o texto, o objetivo principal deste apêndice é familiarizar o leitor com a notação utilizada. Tendo em vista os pré-requisitos acima descritos, sugere-se a utilização do manuscrito por alunos de último ano de graduação em cursos de ciências exatas.

Em algumas poucas seções, são utilizados durante o desenvolvimento conceitos matemáticos menos elementares, a saber: fundamentos de *teoria da medida* e de *análise funcional* (especialmente espaços de funções e topologias correspondentes). Nestes casos os conceitos ou resultados utilizados são sempre discutidos em notas de rodapé e, além





PREFÁCIO

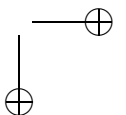
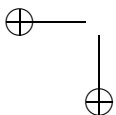
disso, são fornecidas referências bibliográficas correspondentes. O leitor deve ficar atento particularmente aos seguintes trechos do manuscrito: nos capítulos sobre controlabilidade e sobre controle ótimo são utilizados alguns conceitos elementares de teoria de medida e integração de Lebesgue; nas secções sobre controles restritos e sobre atingibilidade no capítulo de controlabilidade são utilizados resultados e definições específicos de análise funcional.

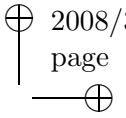
A opção pela utilização de tais *ferramentas matemáticas* se justifica pela importância, dentro da teoria de controle, dos resultados que podem ser demonstrados como decorrência de sua aplicação (e.g., princípio do Bang-Bang; convexidade e compacidade de conjuntos de estados atingíveis com controles restritos; princípio do máximo para controles Lebesgue integráveis).

Na escolha dos temas abordados, buscamos o equilíbrio entre os *meios* (argumentos matemáticos, eventualmente não elementares) e os *fins* (resultados da teoria de controle). Tal tarefa se mostrou não trivial, diante do fato de tratar-se de um texto introdutório e da teoria em questão possuir diversas vertentes. A abordagem de outros resultados relevantes (e.g., problemas H_∞ ; controles impulsivos) foi sacrificada em prol deste compromisso entre *meios* e *fins*. Os autores crêem que o material abordado no manuscrito coloca o leitor a par do desenvolvimento da teoria de controle, além de fornecer diversas informações sobre o estado da arte dos atuais temas de pesquisa.

Visão geral do manuscrito

O manuscrito se divide em três partes, cada uma das quais trata separadamente de um aspecto relevante da teoria de controle. Na primeira parte são discutidos resultados que permitem a análise da maioria dos problemas tecnológicos oriundos da engenharia (regulagem, estabilização, ...). As duas últimas partes do manuscrito tem ambas como objetivo, analisar problemas de controle ótimo. Entretanto, as abordagens discutidas nestas partes seguem caminhos bastante distintos. A Parte II se destina a analisar problemas de otimização de desempenho (controle ótimo) e sua correlação com o clássico *cálculo variacional* e com a *mecânica Hamiltoniana*. Na Parte III é discutida a relação existente entre soluções de distintos problemas pertencentes a uma mesma família de problemas de controle ótimo (*programação dinâmica*).





PREFÁCIO

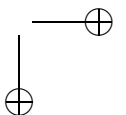
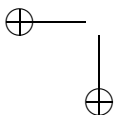
A primeira parte do texto é iniciada com a apresentação, na forma de exemplos, de diferentes aspectos da teoria de controle. Na seqüência são abordados os conceitos de controlabilidade, observabilidade e estabilidade, assim como suas inter-relações. Esta parte é concluída com a discussão de dois problemas cruciais em aplicações tecnológicas (veja, e.g., [An]), a saber: a estabilização de sistemas e a reconstrução (ou identificação) de parâmetros.

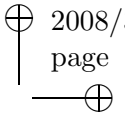
Em sua segunda parte, o manuscrito trata dos problemas de *controle ótimo*. A abordagem é conduzida através de uma incursão inicial pelo *cálculo de variações*. No que diz respeito às condições necessárias para otimalidade, a extensão à teoria de controle ótimo dos resultados clássicos do cálculo variacional é, no ponto de vista dos autores, o modo mais natural para se compreender o mecanismo de funcionamento de tais condições. Na seqüência, discutimos como condições necessárias para otimalidade são formuladas no contexto da *mecânica Hamiltoniana* (equação de Hamilton–Jacobi). O objetivo principal desta parte do manuscrito é colocar em evidência a relação entre a equação de *Euler–Lagrange* e o *princípio do máximo*. Por ser extremamente técnica, a demonstração do princípio do máximo é apresentada no Apêndice B.

A terceira parte do texto trata da metodologia denominada de *programação dinâmica*, que objetiva encontrar soluções para problemas de controle ótimo através da resolução de uma equação diferencial parcial, a saber: a equação de *Hamilton–Jacobi–Bellman* (ou HJB). A solução desta equação é denominada *função valor* e está intrinsecamente relacionada com o problema original de controle ótimo. Recentemente, muito tem sido feito pelo lado analítico da caracterização das soluções da equação HJB. Este é um tópico bastante atual de pesquisa, tendo rendido a um de seus fundadores (P.L. Lions) a medalha Fields em 1996. Neste sentido o último capítulo desta parte é destinado ao estudo das *soluções de viscosidade* de equações diferenciais parciais e da caracterização da função valor como solução viscosa da equação HJB.

Descrição detalhada do conteúdo

No Capítulo 1 é apresentada, através da análise de exemplos, uma introdução à teoria. Em cada exemplo são discutidos e ilustrados conceitos básicos, ao mesmo tempo que é apresentada uma diferente aplicação da teoria de controle. A maior parte destas aplicações é discutida nova-





PREFÁCIO

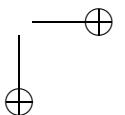
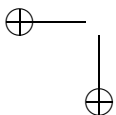
mente em detalhes ao longo do texto. Dentre os exemplos abordados destacamos: aquecimento de um quarto (equação de Euler–Lagrange e cálculo variacional); problema de controle discreto (multiplicadores de Lagrange); problema de tempo mínimo (soluções tipo Bang–Bang); equilíbrio de um bastão (estabilização de sistemas); concentração de chumbo no corpo (reconstrução de parâmetros); problema de controle ótimo (princípio do máximo de Pontryagin).

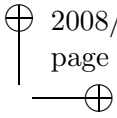
No Capítulo 2 discutimos o conceito de observabilidade de sistemas lineares de controle. É feita a distinção entre os estados observáveis, não observáveis e detectáveis. Na última secção é apresentada uma técnica de reconstrução de estados a partir de observações.

O Capítulo 3 se destina a investigar o conceito de controlabilidade de sistemas. Sistemas lineares e autônomos são analisados separadamente. Discutimos a relação entre a controlabilidade de um sistema linear e a observabilidade do seu sistema adjunto. Apresentamos ainda o teorema de Kalman (forma normal) para sistemas lineares autônomos. Analisamos propriedades topológicas de conjuntos de estados atingíveis, quando o problema de controle é considerado com controladores restritos. O princípio do Bang–Bang e sua relação com os problemas de tempo mínimo são também investigados. A última secção trata do controle de sistemas discretos.

No Capítulo 4 é discutida a estabilidade de sistemas dinâmicos. Introduzimos o conceito de pontos de equilíbrio estáveis e apresentamos critérios de estabilidade para sistemas lineares. Critérios algébricos para estabilidade (como o critério de Hurwitz) são tratados em uma secção a parte. São analisados ainda sistemas obtidos por *perturbações* de sistemas lineares estáveis. São discutidos o critério de estabilidade de Lyapunov e a equação matricial de Lyapunov, uma condição necessária e suficiente para determinação de estabilidade. Na última secção é abordado o critério de Lyapunov para sistemas discretos.

No Capítulo 5 é analisada uma aplicação clássica da teoria de controle, a saber: a estabilização de sistemas. É feito uso da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores a fim de tratar este que é, sem sombra de dúvida, um dos problemas mais importantes relacionado com aplicações à engenharia. Abordamos a estabilização por realimentação de estado (*state feedback*) para sistemas lineares assim como uma questão quantitativa relacionada a estabilização por realimentação de estado. É analisado ainda o engenhoso método proposto por Luenberger (*observador*





PREFÁCIO

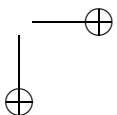
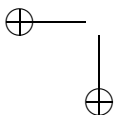
dinâmico), que permite simultaneamente a reconstrução de estados e estabilização do sistema. Consideramos também o problema de estabilizar sistemas utilizando realimentação de saída (*output feedback*). Na última secção são tratados sistemas com *pontos de operação* desconhecidos.

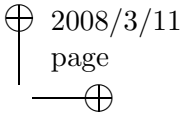
No Capítulo 6 tratamos uma segunda aplicação relevante da teoria de controle, a denominada identificação de parâmetros. Estudamos o problema de determinar parâmetros desconhecidos de um sistema de controle, a partir de certa quantidade de experimentos, nos quais são conhecidos a entrada (input) e a saída (output) do sistema. Inicialmente são formalizadas definições relevantes. Na seqüência são discutidos métodos iterativos de identificação.

O capítulo 7 introduz o cálculo variacional clássico. Na primeira secção são obtidas, sob hipóteses adicionais de convexidade, condições necessárias e suficientes para otimalidade de um extremal. Na seqüência são apresentados o lema de du Bois–Reymond, o desenvolvimento da equação de Euler–Lagrange e a obtenção de diferentes tipos de *condições naturais* de contorno. São considerados ainda problemas variacionais que admitem soluções diferenciáveis por partes e deduzidas condições necessárias para otimalidade (equação de Euler–Lagrange e condição de Weierstrass–Erdmann). Na última secção, os resultados anteriores são estendidos a problemas vetoriais.

No Capítulo 8 discutimos a abordagem variacional para problemas da mecânica. Na seqüência apresentamos os formalismos relacionados as mecânicas Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana. O objetivo principal do capítulo é a obtenção de uma interpretação física para a equação de Hamilton–Jacobi.

No Capítulo 9 é apresentada uma analogia entre os problemas variacionais e os problemas de controle ótimo. Inicialmente são tratados problemas variacionais sujeitos a restrições transversais, lagrangeanas e isoperimétricas, e obtidas as correspondentes condições necessárias para otimalidade. A analogia com os problemas de controle é feita através de exemplos. Na seqüência consideramos problemas variacionais que admitem a existência de extremais singulares. Neste caso os problemas de controle correspondentes possuem solução do tipo Bang–Singular–Bang. Analisamos ainda condições suficientes para otimalidade de estratégias de controle, sob hipóteses adicionais de convexidade da hamiltoniana. Ainda utilizando hipóteses de convexidade, é demonstrada na última secção uma versão simplificada do princípio do máximo.





PREFÁCIO

No Capítulo 10 é formulado o princípio do máximo de Pontryagin. Trata-se de um conjunto de condições necessárias para otimalidade de problemas de controle que, em sua natureza, muito se assemelha à equação de Euler–Lagrange. Uma demonstração do princípio do máximo é apresentada no apêndice B. Nas três primeiras seções analisamos variantes do princípio do máximo para problemas com horizonte finito, com horizonte infinito e para problemas impulsivos. Na última seção são resolvidos vários problemas através da utilização do princípio do máximo.

No Capítulo 11 apresentamos os conceitos básicos da programação dinâmica para problemas discretos (tempo discreto). Através da análise de diversos exemplos, são introduzidas a função valor, a equação de otimalidade e as condições de contorno correspondentes. Entre os exemplos mais importantes estão o caixeiro viajante; dinâmica linear com custo quadrático; decisões consecutivas.

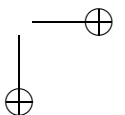
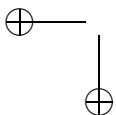
No Capítulo 12 apresentamos a forma contínua da programação dinâmica. Ênfase é dada à obtenção da equação da equação de Euler–Lagrange, ao princípio de otimalidade de Bellman e a teoremas sobre a regularidade da função valor.

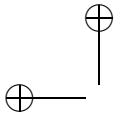
No Capítulo 13 é introduzido o conceito de soluções viscosas para equação HJB. A fórmula de Hopf–Lax é obtida a partir da análise de uma família particular de problemas de controle ótimo. É verificado o fato da função valor ser uma solução viscosa da equação HJB e, sob condições especiais, provamos um resultado de unicidade.

Sugestões para Utilização do manuscrito

O manuscrito, na forma em que se apresenta, pode ser coberto integralmente em dois cursos de um semestre (carga horária de quatro horas por semana). É ainda possível preparar, com base no manuscrito, diferentes cursos de um semestre (novamente de quatro horas por semana), com os seguintes enfoques:

- i) Partes I, II e Apêndices: curso de teoria de controle.
- ii) Partes II, III e Apêndice B: curso de controle ótimo e programação dinâmica.
- iii) Capítulos 1 a 5, 7, 9, 10, 12: versão reduzida do curso de dois semestres; a demonstração no Apêndice B pode ser apresentada pelos alunos na forma de seminários.





PREFÁCIO

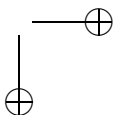
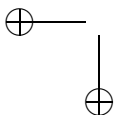
Sobre a confecção do manuscrito

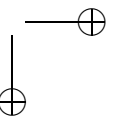
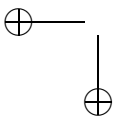
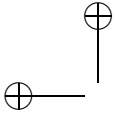
O projeto de elaboração do presente manuscrito iniciou-se com a confecção das notas para o minicurso *Tópicos em teoria de controle*, apresentado durante o XXII CNMAC (Santos, 1999) por A. Leitão. Posteriormente, essas notas foram acrescidas das notas de aula dos cursos *Teoria de controle A e B* (ministrados pelo mesmo autor em 1998 na UFSC). A linha mestra destes cursos foi por sua vez fortemente influenciada pelas disciplinas *Steuerungstheorie* e *Variationsrechnung*, ministradas por J. Baumeister na Goethe Universität em 1995 e 1996 respectivamente. A composição das diferentes notas de aula de ambos os autores deu origem ao presente material.

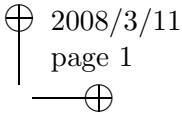
O número de problemas e aplicações que podem ser tratados no contexto da teoria de controle vem crescendo de forma considerável nas últimas décadas, o que pode ser comprovado pelo número cada vez maior de grupos de pesquisa e periódicos especializados nesta área. Tal fato pode ser interpretado como um reflexo das necessidades da sociedade moderna, que cada vez mais prioriza a execução de tarefas de forma precisa e eficiente. Inserida neste contexto está a proposta do presente manuscrito, que pretende servir como orientação inicial a todos os que desejem ingressar nesta interessante e promissora área.

Johann Baumeister
Antonio Leitão

Frankfurt am Main
Florianópolis







Capítulo 1

Introdução

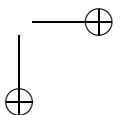
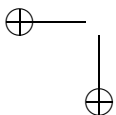
O objetivo deste capítulo é apresentar ao leitor a teoria de controle através da análise de algumas de suas aplicações mais relevantes. Com este intuito são introduzidos na Secção 1.1 alguns conceitos elementares, essenciais para a formulação dos problemas de controle. Na Secção 1.2 são abordados diferentes problemas no contexto da teoria de controle, fornecendo assim uma idéia da versatilidade da aplicação desta teoria. Os exemplos mais relevantes apresentados nesta secção são posteriormente abordados ao longo do texto.

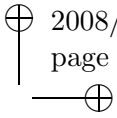
1.1 Apresentação dos Sistemas de Controle

Considere a família de problemas em que um determinado número de variáveis que dependem do tempo $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tem sua evolução descrita por uma equação da forma

$$(1.1) \quad \dot{x} = F(t, x),$$

onde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função conhecida que descreve a dinâmica da evolução e $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de *variáveis de estado*, cujas componentes são as quantidades que desejamos acompanhar. Tais variáveis representam, no instante de tempo t , as condições nas quais se encontra o processo que está sendo modelado. A seguir é apresentado um exemplo ilustrativo.





Exemplo 1 (Deslocamento de um corpo). Para representar o conhecido problema de deslocamento da cinemática utilizamos o seguinte modelo:

- t : tempo;
- m : massa do corpo;
- $x(t)$: velocidade no tempo t ;
- $\dot{x}(t)$: aceleração no tempo t ;
- $\mathcal{F}(t)$: força exercida sobre o corpo no tempo t .

Observe que a lei de Newton nos fornece a equação

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m}\mathcal{F}(t),$$

que é uma caso particular da equação (1.1) □

Se consideramos a possibilidade de exercer influência sobre o lado direito do sistema (1.1) através da escolha dos parâmetros livres $u_1(t), \dots, u_m(t)$, a equação (1.1) toma a forma

$$(1.2) \quad \dot{x} = F(t, x, u),$$

onde $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ é chamado vetor de *variáveis de controle* ou ainda *entrada do sistema*.

Um importante caso particular corresponde à situação em que a dinâmica do sistema (1.2) é linear tanto na variável de estado x quanto na variável de controle u . Temos assim os sistemas de controle lineares

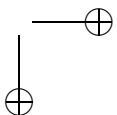
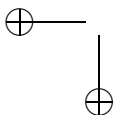
$$(1.3) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),$$

onde $A(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $B(t) \in \mathbb{R}^{n,m}$, para todo t . Muitas vezes considera-se que a evolução do sistema (1.2) pode ser acompanhada somente através de um vetor $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$, que depende da variável de estado x e é denominado *saída do sistema*. Se a função que descreve a dependência de y em relação a x é linear em x , temos

$$(1.4) \quad y(t) = C(t)x(t),$$

onde $C(t) \in \mathbb{R}^{p,n}$, para todo t . O caso particular $C(t) \equiv I$ corresponde à situação em que é possível conhecer a variável de estado x em todos os instantes de tempo.

Observe que, ao escolher estratégias de controle diferentes, estamos alterando a dinâmica do sistema de forma também diferenciada. A princípio, é possível distinguir entre dois tipos de escolha para estratégia de controle:



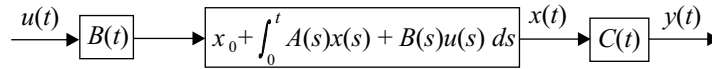
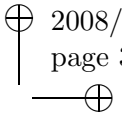
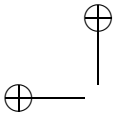


Figura 1.1: Estratégia de controle de malha aberta para sistemas lineares

- Uma estratégia u é escolhida *a priori* e levada a cabo sem considerar a saída do sistema. Em outras palavras, a saída do sistema não influi na escolha da entrada do mesmo. Este é o chamado controle de malha aberta (*open-loop control*), que é esquematizado na Figura 1.1;
- A escolha da estratégia de controle é feita de acordo com a saída (ou estado) do sistema. Nesse caso temos um controle de malha fechada (*closed-loop control*) ou controle de realimentação de saída (ou estado); veja Figura 1.2.

Observação 2. Alguns autores denominam o primeiro problema de *controle*, e o segundo de *regulagem*. A regulagem é mais complexa de ser implementada, uma vez que são necessários: *i*) Coletar informações a respeito da saída (ou do estado) do sistema; *ii*) Escolher, a partir da saída, uma entrada u do sistema. \square

Nos dois exemplos a seguir apresentamos situações específicas, nas quais as diferentes estratégias de controle podem ser aplicadas.

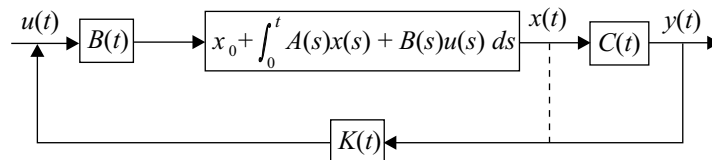
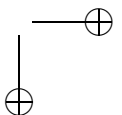
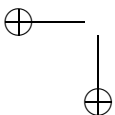
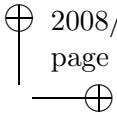


Figura 1.2: Estratégia de controle de malha fechada para sistemas lineares. A ação de realimentação é descrita aqui por $u(t) = K(t)y(t)$, com $K(t) \in \mathbb{R}^{m,p}$

Exemplo 3 (Aquecimento de um quarto). Considere o problema de aquecer um quarto, casa, etc. . . podemos identificar os dois tipos de estratégia:

- No problema de controle, a estratégia de aquecimento é escolhida dependendo da hora do dia e época do ano. A estratégia é periódica.
- Na regulagem, a estratégia de aquecimento é escolhida de acordo com a temperatura do quarto, com a temperatura exterior e com uma temperatura de referência.





A regulagem pode compensar interferências (janela aberta, atraso na mudança das estações, ...), enquanto que o controle não. \square

Exemplo 4 (Enchimento de um reservatório d’água). Considere o seguinte modelo para representar a variação do nível de um reservatório d’água

- t : tempo;
- $I(t)$: fluxo de água que entra no reservatório no tempo t ;
- $x(t)$: quantidade de água no reservatório no tempo t ;
- $y(t)$: altura do nível da água no tempo t ;
- $u(t)$: abertura da torneira para entrada de água no tempo t .

Supondo que $I(t) = c_1 u(t)$ e $y(t) = c_2 x(t)$ temos:

$$\dot{x} = I(t) = c_1 u(t) \quad \text{ou} \quad x(t) = x(0) + \int_0^t c_1 u(s) ds.$$

Note que o reservatório estará cheio quando $x(t) = x_{\max}$ ou $y(t) = y_{\max}$. Definimos, usando apenas a eurística, a seguinte estratégia:

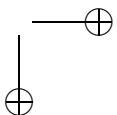
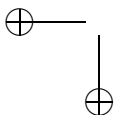
- 1) Medir no tempo t a saída $y(t)$;
- 2) Testar se $y(t) = y_{\max}$;
- 3) Abrir ou fechar a torneira;
- 4) Voltar ao item 1);

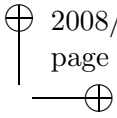
Note que usamos apenas dois valores extremos do controlador, que correspondem à torneira totalmente aberta ou totalmente fechada. Tais controles pertencem a uma família especial (controles de Bang–Bang) e são analisados mais detalhadamente no Capítulo 3. \square

Observação 5. A função que permite calcular a saída y a partir da entrada u é denominada *função de transferência*. A seguir, relacionamos algumas formas especiais desta função para sistemas com entrada e saída escalar, i.e. $y(t), u(t) \in \mathbb{R}$, para todo t .

- Transferência proporcional: $y(t) = ku(t)$;
- Transferência integral: $y(t) = y_0 + k \int_0^t u(s) ds$;¹
- Transferência diferencial: $y(t) = ku'(t)$;
- Transferência de tempo morto: $y(t) = ku(t - \tau)$;

¹No Exemplo 1 temos $y(t) = x(t) = x_0 + 1/m \int_0^t F(s) ds$.





Sistemas de controle com entrada e saída escalar são também conhecidos pela abreviação SISO (*single-input single-output*). Note que a estratégia de realimentação ilustrada na Figura 1.2 é a generalização para o caso vetorial da transferência proporcional. \square

Para terminar essa discussão inicial é importante chamar atenção para dois conceitos extremamente importantes na teoria de controle que são os de controlabilidade e observabilidade de um sistema. Informalmente dizemos que um sistema de controle é *controlável* quando for possível encontrar uma estratégia de controle u que leve o estado inicial a um estado final desejado. Por outro lado, dizemos que um sistema de controle é *observável* quando for possível reconstruir o estado inicial x_0 a partir da saída y do sistema. Os conceitos acima são abordados em detalhes nos Capítulos 2 e 3 respectivamente.

1.2 Exemplos

Os exemplos a seguir tem o objetivo de ilustrar os diferentes tipos de aplicações que podem ser tratadas através da teoria de controle e ao mesmo tempo de apresentar as ferramentas matemáticas necessárias para investigação dos problemas.

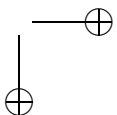
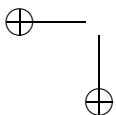
1.2.1 Aquecimento de um Quarto

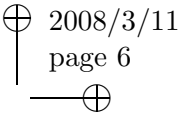
Tratamos do problema de manter um quarto aquecido durante um determinado tempo, de forma que a energia gasta no processo seja a menor possível. Para este fim denominamos

t	:	tempo pertencente ao intervalo $[0, T]$ com $T > 0$;
$w(t)$:	temperatura do quarto;
w_0	:	temperatura do quarto no tempo $t = 0$;
c	:	temperatura constante fora do quarto;
$z(t)$:	diferença de temperatura entre o quarto e o exterior;
$z_0 := w_0 - c$:	diferença de temperatura no tempo $t = 0$;
$u(t)$:	taxa de variação do calor inserido.

Na formulação do modelo, supomos a variação de temperatura proporcional tanto à temperatura exterior, quanto a energia utilizada no mecanismo de controle. Temos assim:

$$(1.5) \quad z' = -az + bu(t),$$





onde a, b são constantes positivas que descrevem a física do problema (isolamento do quarto, ...).

Como objetivo definimos que a temperatura inicial z_0 deve evoluir até a temperatura $z(T) = z_T$ no final do tempo T . Nesse processo deve ser gasto o mínimo de energia possível, sendo que o gasto de energia é descrito pela *função objetivo*

$$(1.6) \quad J(u) := \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt.$$

Podemos então formular o problema de encontrar uma estratégia de controle da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(u) \\ \text{sujeito à} \\ z' = -az + bu; z(0) = 0, z(T) = z_T. \end{cases}$$

Na formulação acima, deixamos em aberto que tipo de controle é considerado admissível ($u \in C^0([0, T])$, $L^2([0, T])$, $L^\infty([0, T])$, ...) e conseqüentemente que tipo de solução admitimos para a equação diferencial (1.5).

Esse problema é particularmente interessante, pois se deixa inserir no contexto do *cálculo das variações*. Observe que resolvendo (1.5) para u e substituindo na função objetivo em (1.6) obtemos

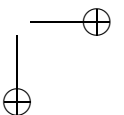
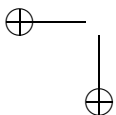
$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z) := \int_0^T L(t, z(t), z'(t)) dt \\ \text{sujeito à} \\ z(0) = 0, z(T) = z_T \end{cases}$$

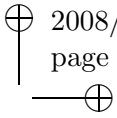
onde $L(t, z(t), z'(t)) = b^{-2}(z'(t) + az(t))$. Por simplicidade, tomamos $z_0 = 0$. Da teoria do cálculo das variações, sabemos que uma solução do problema variacional acima precisa satisfazer a *equação de Euler-Lagrange*

$$(1.7) \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial z'} = 0.$$

Em nosso problema particular, a Equação diferencial de Euler se escreve

$$(1.8) \quad z'' - a^2 z = 0,$$





para a qual conhecemos as soluções linearmente independentes

$$\sinh(at), \cosh(at).$$

Da condição de contorno $z(0) = 0$, excluimos a solução $\cosh(at)$. Da outra condição de contorno $z(T) = z_T$, obtemos a solução

$$(1.9) \quad \bar{z}(t) = z_T \sinh(aT)^{-1} \sinh(at), \quad t \in [0, T],$$

que não depende do parâmetro b . Obtemos então a estratégia de controle ótimo

$$(1.10) \quad \bar{u}(t) = z_T a b^{-1} \sinh(aT)^{-1} e^{at}, \quad t \in [0, T].$$

Note que só foi possível encontrar o controle ótimo utilizando a equação de Euler–Lagrange. Veremos no exemplo a seguir outro método de analisar este mesmo problema.

1.2.2 Um Problema de Controle Discreto

Analisamos um modelo discreto (tempo discreto) para o qual é possível determinar condições necessárias para solução do problema. Para tanto, utilizamos um resultado sobre condições necessárias para um extremal no contexto de espaços de dimensão finita. Considere a equação de diferenças escalar:

$$(1.11) \quad y_{k+1} = f_k(y_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N - 1$$

e as condições de contorno

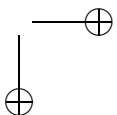
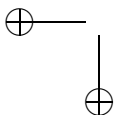
$$(1.12) \quad y_0 = y^0, \quad y_N = y^N.$$

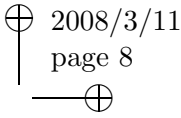
A função objetivo é dada por

$$(1.13) \quad J(y, u) := \sum_{k=0}^{N-1} l_k(y_k, u_k),$$

onde as funções l_k , $k = 0, \dots, N - 1$ são dadas. Consideramos então o problema de otimização

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(y, u) \\ \text{sujeito à (1.11), (1.12).} \end{cases}$$





As variáveis do problema de minimização são os vetores:

$$u = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^N, \quad y = (y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Supondo agora que as funções f_k, l_k envolvidas no problema são suficientemente diferenciáveis, podemos utilizar o teorema dos *Multiplicadores de Lagrange* para deduzir condições necessárias para determinação de um extremal. Tal lema é apresentado a seguir:

Lema: (Multiplicadores de Lagrange) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e as funções $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciáveis em U , onde $m < n$. Se $\xi \in U$ é um extremo local de $F(x)$ sujeito à restrição $G(x) = 0$ e $\nabla G(\xi)$ –a matriz jacobiana de G no ponto ξ – tem posto m (máximo), então existe $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ de modo que o gradiente da função ampliada*

$$(1.14) \quad K(x, \lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j(x)$$

se anula no ponto $(\xi, \hat{\lambda})$. Isto é,

$$(1.15) \quad \frac{\partial K}{\partial x_i}(\xi, \hat{\lambda}) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(1.16) \quad \frac{\partial K}{\partial \lambda_j}(\xi, \hat{\lambda}) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

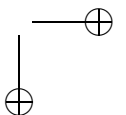
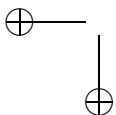
Demonstração: Este é um resultado clássico da análise no \mathbb{R}^n , podendo sua demonstração ser encontrada em [Wa1]. ■

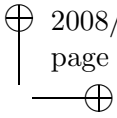
As equações (1.15), (1.16) são denominadas *condições de Kuhn–Tucker*. Em nosso exemplo, a função K é dada por:

$$\begin{aligned} &K(y_0, \dots, y_N, u_0, \dots, u_{N-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{N+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} l_i(y_i, u_i) + \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_{j+1}(f_j(y_j, u_j) - y_{j+1}) \\ &\quad + \lambda_0(y_0 - y^0) + \lambda_{N+1}(y_N - y^N), \end{aligned}$$

onde a numeração das componentes de λ é escolhida de forma adequada. Definindo agora a *função de Hamilton*

$$(1.17) \quad \begin{aligned} &H(y_0, \dots, y_N, u_0, \dots, u_{N-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{N+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} l_i(y_i, u_i) + \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_{j+1} f_j(y_j, u_j), \end{aligned}$$





podemos reescrever as equações (1.15), (1.16) como:

$$(1.18) \quad y_k = \frac{\partial H}{\partial \lambda_k}, \quad k = 1, \dots, N$$

$$(1.19) \quad \lambda_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad k = 1, \dots, N - 1$$

$$(1.20) \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u_k}, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

$$(1.21) \quad y_0 = y^0, \quad y_N = y^N.$$

Note que temos $N + (N - 1) + N + 2$ equações para $(N + 1) + N + N$ variáveis.² A equação (1.18) é a *Equação de Evolução*, (1.19) é a *Equação Adjunta* e (1.20) é a *Condição de Otimalidade*.

Um candidato à solução é obtido resolvendo-se o sistema acima. Note ainda que em problemas concretos temos que verificar a regularidade das funções exigida no lema dos multiplicadores de Lagrange.

Consideramos agora um exemplo concreto, obtido a partir do problema contínuo analisado no Exemplo 1.2.1. Tomando $N = T$ e discretizando (1.5) através da aproximação por diferenças finitas: $(z(t + \Delta t) - z(t))/\Delta t = az(t) + bu(t)$, obtemos o sistema discreto:

$$y_{k+1} = -a y_k + b u_k, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

$$J(y, u) := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2$$

e as condições de contorno

$$y_0 = 0, \quad y_N = z_T.$$

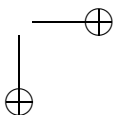
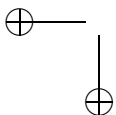
Note que a constante a na equação acima é diferente da constante a em (1.5). Obtemos então as condições necessárias:

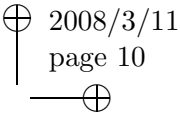
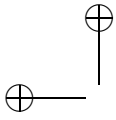
$$(1.22) \quad y_{k+1} = -a y_k + b u_k, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

$$(1.23) \quad \lambda_k = -a \lambda_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N - 1$$

$$(1.24) \quad u_k + \lambda_{k+1} b = 0, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

²Descartamos as equações $\partial K/\partial y_0$ e $\partial K/\partial y_N$ referentes às variáveis λ_0 e λ_{N+1} respectivamente, pois vamos desconsiderar essas variáveis. O papel delas é somente garantir que as condições de contorno sejam satisfeitas pelo candidato a extremal.





$$y_0 = 0, \quad y_N = z_T.$$

Calculando u_k em (1.23) e substituindo em (1.22) obtemos

$$(1.25) \quad y_{k+1} = -a y_k - b^2 \lambda_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$(1.26) \quad \lambda_k = -a \lambda_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N-1$$

Note que (1.26) nos permite calcular λ_k recursivamente a partir de λ_N :

$$\lambda_k = (-a)^{N-k} \lambda_N, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Substituindo em (1.25), obtemos a equação de diferenças:

$$y_{k+1} = -a y_k - b^2 (-a)^{N-k-1} \lambda_N, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

a qual pode ser resolvida diretamente se usamos a condição inicial $y_0 = 0$.

Temos então

$$\begin{aligned} y_k &= - \sum_{i=0}^{k-1} (-a)^{k-i-1} b^2 (-a)^{N-i-1} \lambda_N \\ &= -b^2 \lambda_N (-a)^{N+k-2} \sum_{i=0}^{k-1} (-a)^{-2i}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Da série geométrica obtemos agora:³

$$(1.27) \quad y_k = -b^2 \lambda_N (-a)^{N+k-2} \frac{1 - \left(\frac{-1}{a^2}\right)^k}{1 + \left(\frac{1}{a^2}\right)}, \quad k = 1, \dots, N$$

Falta ainda calcularmos λ_N . Para isso, tomamos $k = N$ em (1.27) e usamos a condição de contorno $y_N = z_T$, obtendo assim (para N par)

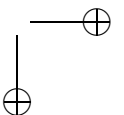
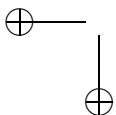
$$z_T = -b^2 \lambda_N \frac{(1 + a^{2N})}{(1 + a^2)}.$$

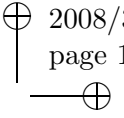
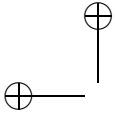
Definindo agora $d := -b^{-2}(1 + a^2)/(1 + a^{2N})$, temos $\lambda_N = dz_T$ e de (1.27) temos por fim

$$y_k = -b^2 d z_T (-a)^{N+k} \frac{1 - \left(\frac{-1}{a^2}\right)^k}{1 + a^2}, \quad k = 1, \dots, N-1$$

$$u_k = b d z_T (-a)^{N+k+1} \left[\frac{1 - \left(\frac{-1}{a^2}\right)^{k+1}}{1 + a^2} + \frac{1 - \left(\frac{-1}{a^2}\right)^k}{1 + a^2} \right], \quad k=0, \dots, N-1.$$

³ $(1 + q + \dots + q^N)(1 - q) = (1 - q^{N+1})$.





1.2.3 Um Problema de Tempo Mínimo

O movimento retilíneo de um carro de massa $m = 1$ é descrito por

$$\ddot{x} = u(t),$$

onde a função $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ representa a variável de controle.⁴ O controle corresponde à aceleração e à frenagem do veículo. Supomos que no instante inicial $t_0 = 0$ o carro se encontra em repouso:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

No tempo $T > 0$ o carro deve estar parado em frente a uma parede que dista uma unidade da origem.

$$x(T) = 1, \quad \dot{x}(T) = 0.$$

Supomos ainda que as ações de controle são limitadas por

$$(1.28) \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T].$$

O objetivo a ser atingido é:

Encontrar um controle \bar{u} , que desloque o carro conforme descrito acima no menor tempo \bar{T} possível.

A solução é:

$$\bar{T} = 2, \quad \bar{u}(t) = \begin{cases} +1 & , 0 \leq t < 1 \\ -1 & , 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

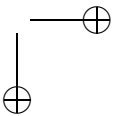
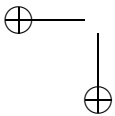
Observe que a trajetória \bar{x} obtida a partir de \bar{u} satisfaz as condições de contorno do problema. Mais tarde provaremos que \bar{u} e \bar{T} são de fato ótimos. Os multiplicadores de Lagrange utilizados no Exemplo 1.2.2 não são aplicáveis aqui (caso discretizássemos o sistema), pois o tempo final não é fixado *a priori*. A estratégia \bar{u} se enquadra nos chamados *controladores Bang-Bang*, onde o controle assume somente os valores extremos permitidos.

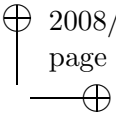
Caso a restrição (1.28) não seja fornecida, o problema não mais possui solução. Basta observar que $T_n = 2/n$ e

$$u_n(t) := \begin{cases} +n^2 & , 0 \leq t < 1/n \\ -n^2 & , 1/n \leq t \leq 1/n \end{cases}$$

são estratégias admissíveis e $\lim_n T_n = 0$. Portanto, não existe uma estratégia ótima.

⁴A dependência em relação ao tempo t da variável de estado não é representada na equação diferencial.





1.2.4 Lançamento de um Foguete

Considere o seguinte problema:

Um foguete deve ser lançado do solo na vertical e deve, a partir de uma estratégia de consumo de combustível, alcançar a maior altitude possível.

Para estudar este problema tomamos:

- t : tempo;
- $m(t)$: massa do foguete;
- $v(t)$: velocidade do foguete;
- $I(t)$: impulso do foguete.

Fazemos agora a seguinte hipótese física:

(1.29)

Taxa de variação do impulso = Soma das forças agindo sobre o corpo.

A partir da lei física $P = mv$, temos no intervalo infinitesimal de tempo $[t, t + \Delta t]$:

	Massa	Velocidade	Impulso
t	m	v	mv
$t + \Delta t$	$m + \Delta m$	$v + \Delta v$	$(m + \Delta m)(v + \Delta v)$

Supondo que combustível de massa $-\Delta m$ (pois $\Delta m < 0$) é, depois de queimado, expelido com velocidade v_0 , temos que o impulso total no tempo $t + \Delta t$ é dado por

$$m \Delta v + v_0 \Delta m + \Delta m \Delta v.$$

Portanto, a variação do impulso no intervalo infinitesimal $[t, t + \Delta t]$ é

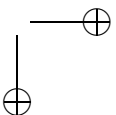
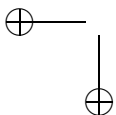
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m \Delta v + v_0 \Delta m + \Delta m \Delta v}{\Delta t} = m \dot{v} + v_0 \dot{m}.$$

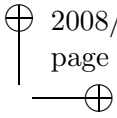
Da hipótese em (1.29) concluímos então

$$(1.30) \quad m \dot{v} + v_0 \dot{m} = -m G(h) - D(v, h),$$

onde

- m, v, h : massa, velocidade e altura do foguete respectivamente;
- $G(h)$: força da gravidade;
- $D(v, h)$: resistência do ar.





Supondo agora que $G(h) = c_1 h^{-2}$, $D(v, h) = c_2 v^2 e^{-\beta h}$ e que podemos controlar o empuxo $u := -v_0 \dot{m}$, obtemos o seguinte sistema:

$$(1.31) \quad \dot{h} = v$$

$$(1.32) \quad \dot{m} = -v_0^{-1} u(t)$$

$$(1.33) \quad \dot{v} = m^{-1} [u(t) - D(v, h)] - G(h)$$

Supomos ainda que o empuxo é limitado, ou seja

$$(1.34) \quad 0 \leq u(t) \leq u_{max}.$$

Note que o tempo final T não é fornecido e que as condições de contorno são:

$$(1.35) \quad h(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad m(0) = m_0, \quad m(T) = m_T,$$

onde m_T é a massa do foguete sem combustível e m_0 a massa do foguete abastecido. O problema de encontrar a trajetória ótima pode então ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Maximizar } h(t) \\ \text{sujeito à} \\ (1.31), (1.32), (1.33), (1.34), (1.35) \end{cases}$$

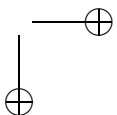
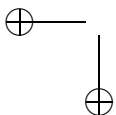
Fazendo hipóteses adequadas sobre G e D , é possível garantir a existência de uma solução da forma (*Bang-Singular-Bang*)

$$u(t) := \begin{cases} u_{max} & , t \in [0, t_1] \\ \in (0, u_{max}) & , t \in (t_1, t_2) \\ 0 & , t \in [t_2, T] \end{cases} ,$$

onde t_1, t_2 dependem de m_0, m_T, D, G, u_{max} .

1.2.5 Equilíbrio de um Bastão

Considere um bastão sem massa, de comprimento unitário, que possui em sua extremidade superior uma massa pontual m . A extremidade inferior pode ser deslocada ao longo do eixo x e a aceleração correspondente a este deslocamento corresponde ao controle. Sejam assim:



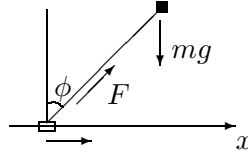
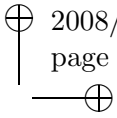


Figura 1.3: Equilíbrio de um bastão

- t : tempo $t > 0$;
- $\xi(t)$: posição da base do bastão ;
- $u(t)$: aceleração (horizontal) da base do bastão;
- $\phi(t)$: ângulo entre o bastão e o eixo vertical;
- $(x(t), y(t))$: coordenada do ponto de massa m .

Observe que a posição de repouso $\phi = 0$ não é estável, no sentido que um deslocamento *infinitesimal* do ponto de equilíbrio provoca a queda do bastão.⁵ Neste exemplo estudamos como estabilizar o sistema na posição de repouso usando uma estratégia de controle de realimentação do tipo $u = G(\phi)$.

Analisamos inicialmente o modelo. Sobre a massa m agem a gravidade e uma força F (na direção do bastão) provocada pelo movimento da base do mesmo (veja Figura 1.3). Temos então:

Somatório das forças na direção x : $F \sin(\phi)$

Somatório das forças na direção y : $F \cos(\phi) - mg$

Supondo que tratamos apenas deslocamentos pequenos da posição de repouso $\phi = 0$, fazemos as hipóteses simplificadoras:

$$(1.36) \quad \sin(\phi) \approx \phi, \quad \cos(\phi) \approx 1, \quad y \approx 1, \quad \ddot{y} \approx 0.$$

Da lei de Newton sabemos que

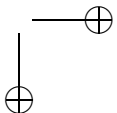
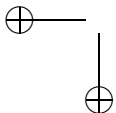
$$m \ddot{y} = F(t) - mg, \quad m \ddot{x} = F(t) \phi(t),$$

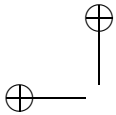
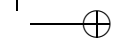
o que implica em $F(t) = mg$ e $m \ddot{x} = mg \phi(t)$.

Da geometria do problema e das hipóteses em (1.36) temos ainda

$$x(t) = \xi(t) + \phi(t).$$

⁵Uma análise rigorosa sobre a natureza dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico é apresentada no Capítulo 4.





Observando que $\ddot{\xi}(t) = u(t)$, obtemos dessa última equação

$$(1.37) \quad \ddot{\phi} = g\phi - u(t).$$

Reescrevendo (1.37) na forma de sistema, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 \\ \dot{z}_2 &= gz_1 - u(t) \end{aligned}$$

Podemos agora verificar que a posição de repouso é de fato instável. Os autovalores da matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}$$

do sistema são $\pm\sqrt{g}$. Daí obtemos a matriz fundamental Z do sistema $\dot{z} = Az$:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{g}t}\sqrt{g} & -e^{-\sqrt{g}t}\sqrt{g} \\ e^{\sqrt{g}t}g & e^{-\sqrt{g}t}g \end{pmatrix}.$$

Um sistema fundamental de soluções é obtido das colunas de $Z(t)$ e podemos observar que uma das soluções cresce exponencialmente, comprovando assim a instabilidade do sistema. Tentamos agora escolher uma estratégia de controle adequada para estabilizar o sistema.

1ª tentativa de controle de realimentação:

$$u := -k\phi(t) = -kz_1,$$

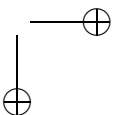
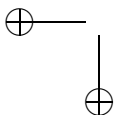
onde $k \in \mathbb{R}$. De (1.37) obtemos o sistema

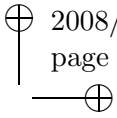
$$\dot{z} = A_1 z \quad \text{com} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g+k & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz A_1 são $\pm\sqrt{g+k}$. De onde concluímos que, para $k < -g$, os autovalores são imaginários puros e as soluções correspondentes são oscilações não amortecidas; para $k > -g$, os autovalores são reais e um deles é positivo, portanto a solução correspondente a este autovalor cresce de forma exponencial; para $k = -g$, as soluções são do tipo polinomial e novamente não limitadas.

Portanto, não é possível alcançar com estratégias de controle do tipo $k\phi$ a situação

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0,$$





o que torna inviável a estabilização do sistema.

2ª tentativa de controle de realimentação:

$$u = -k_1 \phi - k_2 \dot{\phi} = -k_1 z_1 - k_2 z_2,$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. De (1.37), obtemos o sistema

$$\dot{z} = A_2 z \quad \text{com} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g + k_1 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz A_2 são $k_2/2 \pm \sqrt{k_2^2/4 + g + k_1}$. Escolhendo por exemplo $k_2 = -2$ e $k_1 = -g - 1$, obtemos os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. A equação diferencial resultante

$$\ddot{\phi} + 2\dot{\phi} + \phi = 0$$

possui as soluções linearmente independentes

$$\phi(t) = e^{-t}, \quad \phi(t) = t e^{-t},$$

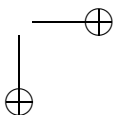
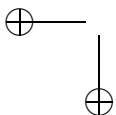
provando assim que a estratégia $u(t) = 2z_1 + (1 + g)z_2$ estabiliza o sistema.

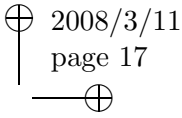
Para maiores detalhes sobre este problema, também denominado de pêndulo invertido, consulte [So], Capítulo 3.

1.2.6 Concentração de Chumbo no Corpo Humano

O modelo utilizado para aproximar o problema em questão é o *modelo de compartimentos*. Tal abordagem consiste em descrever o objeto de estudo (corpo humano) como uma série de compartimentos que interagem entre si, trocando a substância que desejamos analisar (chumbo). Obviamente essa técnica é bastante maleável e permite modelar diferentes tipos de processos físicos, biológicos, químicos, etc . . .

Neste exemplo tratamos uma importante aplicação da teoria de controle, a qual está relacionada com a teoria de problemas inversos. Trata-se da *reconstrução de parâmetros*, isto é, o controle é utilizado para identificar a dinâmica do sistema, que é a princípio desconhecida. Tal problema é investigado em detalhes no Capítulo 6.





Consideramos nesta abordagem um modelo simples com apenas 3 compartimentos: Sangue, Tecido e Esqueleto. Definimos então:

t : tempo $t > 0$;

m_i : massa do compartimento i ;

$c_i(t)$: concentração de chumbo no compartimento i ;

$q_i(t)$: quantidade de chumbo no compartimento i .

Temos assim

$$q_i(t) = m_i c_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

A dinâmica da troca é descrita por

$$(1.38) \quad \dot{q} = f(q) + I(t),$$

onde $q := (q_1, q_2, q_3)$, f (desconhecida) descreve a taxa de troca, I é um vetor de entrada. Supondo a dinâmica linear, i.e., a taxa de troca é proporcional a diferença de concentração, obtemos: $f(q) = Aq$ (A uma matriz).

Supomos ainda I constante e que existe um ponto de equilíbrio \bar{q} para o sistema (1.38), i.e., $\dot{\bar{q}} = f(\bar{q}) + I = 0$. Nesta situação é possível descobrir a dinâmica do sistema. Suponha que introduzimos chumbo no sistema com taxa $b(t) \in \mathbb{R}^3$. A concentração $\bar{q} + x$ da substância satisfaz então

$$\dot{x} = \dot{\bar{q}} + \dot{x} = f(\bar{q} + x) + I + b(t).$$

Supondo que x é pequeno em relação a \bar{q} , temos

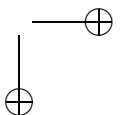
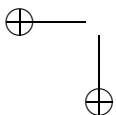
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial q}(\bar{q})x + O((x - \bar{q})^2) + I + b(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial q}(\bar{q})x + b(t) + r(t), \end{aligned}$$

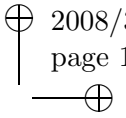
onde $r(t) \in \mathbb{R}^3$ possui componentes *pequenas*. Como $\frac{\partial f}{\partial q}(\bar{q}) = A$, obtemos o sistema

$$(1.39) \quad \dot{x} = Ax + b(t).$$

A matriz desconhecida A deve ser identificada. Um método de realizar tal identificação é o seguinte:

- Fixe a taxa b e meça em intervalos de tempo periódicos a concentração $x_i(t)/m_i$ ou a razão $x_i(t)/\bar{q}_i$ (caso \bar{q} seja conhecido);
- Forme assim um conjunto de equações que permita calcular os coeficientes de A .





Outro problema inverso relacionado à teoria de controle (ótimo) é a identificação de coeficientes na equação de Euler–Lagrange. Tal problema não é abordado neste manuscrito. O leitor interessado deve consultar [Lei].

1.2.7 A Braquistócrona

O cálculo das variações teve seu desenvolvimento inicial em grande parte devido ao problema que discutimos nesta secção. Em 1696, Johann (John ou Jean) Bernoulli formulou o seguinte problema:⁶

Sejam P_0 e P_1 dois pontos dados sobre um plano vertical. Deve ser encontrada uma curva unindo esses dois pontos de sorte que um ponto de massa m partindo de P_0 que a percorra sob a influência somente de seu próprio peso, alcance P_1 no menor tempo possível. Considere ainda a velocidade inicial v_0 dada.

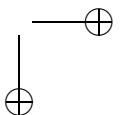
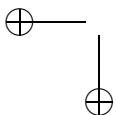
Tal problema é conhecido como *Braquistócrona* (do grego *brachyistos* – mínimo, *chronos* – tempo). A fim de obter uma formulação matemática conveniente, restringimo-nos à análise de curvas que são gráficos de funções. Portanto, a trajetória do ponto pode ser descrita por uma função $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$. Seja T o tempo para se percorrer a trajetória, l o comprimento de arco de y , $s(t)$ o comprimento de arco percorrido no tempo $t \in [0, T]$ e $V(t)$ o valor da velocidade (tangencial) no tempo t . Temos então

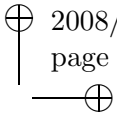
$$\frac{ds}{dt}(t) = V(t), \quad t \in [0, T].$$

Denotando a mudança de variáveis por $s = S(t)$, temos o jacobiano $dS/dt(t) = V(t)$ de onde segue

$$T = \int_0^T dt = \int_0^l \frac{ds}{V(S^{-1}(s))} = \int_0^l \frac{ds}{W(s)},$$

⁶Tal problema foi formulado originalmente por Galileo em 1638, que acreditava ser a solução do problema um arco de circunferência. Outros matemáticos da época como Leibniz, Jakob (James ou Jacques) Bernoulli e Newton se interessaram pelo problema, que foi proposto por Johann Bernoulli na forma de um desafio. Para mais detalhes históricos consulte [Gol].





onde $W(s) := V(s^{-1}(s))$. Definindo agora $s := l(x) = \int_{x_0}^x (1+y'(x)^2)^{1/2} dx$ e $v(x) := W(l(x))$ –velocidade parametrizada em x – para $x \in [x_0, x_1]$, obtemos

$$T = \int_0^l \frac{ds}{W(s)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'(x)^2)^{1/2}}{v(x)} dx.$$

Usando agora a lei de conservação de energia (*energia cinética + energia potencial = cte.*) temos

$$mv(x)^2 - 2mgy(x) = mv_0^2 - 2mgy_0,$$

onde g é a constante gravitacional. Note que o eixo vertical y é tomado orientado na direção da força gravitacional. Definindo a constante $c := 2gy_0 - v_0^2$, obtemos a expressão

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'(x)^2)^{1/2}}{(2gy(x) - c)^{1/2}} dx,$$

que nos permite explicitar o tempo de percurso T em função da parametrização $(x, y(x))$ da curva. Podemos ainda escrever

$$T = I(y) := \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x)) dx,$$

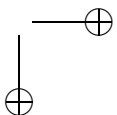
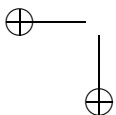
onde $L(x, y, p) := (\frac{1+p^2}{2gy+c})^{1/2}$, obtendo assim um problema típico do cálculo das variações.

O mais importante neste problema são os métodos usados para resolvê-lo, que constituem o surgimento do cálculo das variações tal qual conhecemos hoje. A solução é a curva denominada cicloide (veja Figura 1.4), que possui a seguinte parametrização:

$$\gamma : [\tau_0, \tau_1] \ni \tau \mapsto (b + a(\tau + \sin \tau), a(1 + \cos \tau)) \in \mathbb{R}^2,$$

onde os parâmetros a, b são determinados pelas condições $\gamma(\tau_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma(\tau_1) = (x_1, y_1)$.

Johann Bernoulli baseou sua argumentação no então recém divulgado princípio de refração de Fermat (1662). Considere um meio constituído por diversas camadas homogêneas de densidades diferentes e separadas pelas retas horizontais $y = y_\nu$. Em cada camada $y_\nu < y < y_{\nu+1}$ a luz viaja com velocidade v_ν proporcional a $(y_\nu - h)^{1/2}$, onde h é constante. Obtemos então como trajetória uma poligonal, na qual o



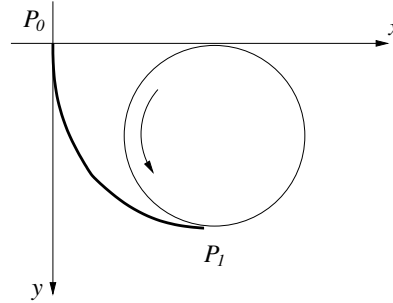
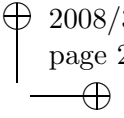
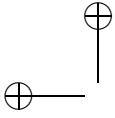


Figura 1.4: Ciclóide: solução do problema da Braquistócrona

seno do ângulo entre o raio e o eixo vertical y é proporcional $(y_\nu - h)^{1/2}$. Tomando o limite quando o número de camadas tende a infinito, é possível concluir que o seno do ângulo entre a trajetória do raio e o eixo y é proporcional a $1/(1 + y'(x)^2)^{1/2}$, de onde Johann Bernoulli obteve a equação diferencial

$$(1.40) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = K \sqrt{2g(y - h)}$$

para a Braquistócrona. Definindo $\eta := 2gK^2(y - h)$ e $\xi := 2gK^2x$, onde $\eta = \eta(\xi)$, obtemos de (1.40) a equação diferencial

$$(1.41) \quad (1 + \eta'^2)\eta = 1.$$

A equação (1.41) é exatamente a equação de Euler–Lagrange para o problema variacional da Braquistócrona. Esta equação pode ser resolvida através do método de separação de variáveis. De fato, note que podemos reescrever (1.41) na forma

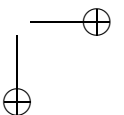
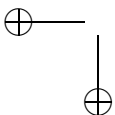
$$\eta' = \sqrt{(1 - \eta)\eta^{-1}},$$

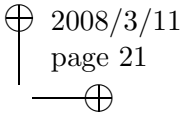
ou ainda como

$$\int \sqrt{v(1 - v)^{-1}} dv = \xi + c.$$

A mudança de variáveis $v := \sin^2 t = 2^{-1}(1 - \cos 2t)$, para $t \in [0, 2\pi]$, nos fornece então

$$\xi + c = 2 \int \sin^2 t dt = 2^{-1}(2t - \cos 2t),$$





de onde obtemos a seguinte parametrização da solução:

$$\eta(t) := 2^{-1}(1 - \cos 2t), \quad \xi(t) := 2^{-1}(2t - \sin 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Temos assim que

$$x(\varphi) = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y(\varphi) = r(1 - \cos \varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

com $r := (4Kg)^{-1}$ e $x(0) = y(0) = 0$. Note que esta é a parametrização da cicloide com P_0 na origem e cujo raio da circunferência na Figura 1.4 é r .

1.2.8 Um Problema de Controle Ótimo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, Lipschitz na primeira variável (veja Definição 259) e uniformemente na segunda. Seja⁷

$$U_{ad} := \{u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m; u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [t_0, t_1]\}$$

o conjunto dos controles viáveis. Considere agora a equação de evolução das variáveis de estado

$$\begin{cases} z'(t) &= f(z(t), u(t)), \text{ q.s. em } [t_0, t_1] \\ z(t_0) &= z_0 \end{cases}$$

A teoria de equações diferenciais ordinárias garante que, para cada $u \in U_{ad}$, o problema acima possui uma única solução absolutamente contínua em $[t_0, t_1]$. Nosso objetivo é encontrar um controle \bar{u} que minimize o funcional objetivo

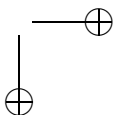
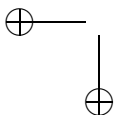
$$J(t, z; u) := L_1(z(t)) + \int_{t_0}^{t_1} L(z(t), u(t)) dt,$$

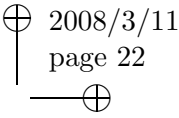
onde as funções L e L_1 definem respectivamente os custos operacional e final do modelo. Suponha $L \in C^1(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ e $L_1 \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Tal problema de controle ótimo é denominado *problema com horizonte finito*⁸. Fazemos aqui uma abordagem baseada no método dos

⁷Notação: q.s. é abreviação de 'quase sempre' e se refere à medida de Lebesgue no intervalo em questão.

⁸Note que o tempo final t_1 está fixado, enquanto que o estado final não.





multiplicadores de Lagrange (veja Exemplo 1.2.2) que nos permite encontrar algumas condições necessárias para otimalidade de uma solução (compare com os resultados do Apêndice B).

Definimos inicialmente a *variável adjunta* (ou co-estado) $\lambda = \lambda(t)$ e o *funcional estendido*

$$I(z, u, \lambda) := \int_{t_0}^{t_1} [L(z, u) - \lambda(z' - f(z, u))] ds + L_1(z(t_1)).$$

Suponha que as funções envolvidas na definição de I são suficientemente regulares e que $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ é um mínimo (local) de I . Sejam ainda $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ funções regulares com $\phi_1(t_0) = 0$. Definimos então

$$z^\varepsilon := \bar{z} + \varepsilon\phi_1, \quad u^\varepsilon := \bar{u} + \varepsilon\phi_2, \quad \lambda^\varepsilon := \bar{\lambda} + \varepsilon\phi_3$$

e $I(\varepsilon) := I(z^\varepsilon, u^\varepsilon, \lambda^\varepsilon) \in \mathbb{R}$, para $|\varepsilon|$ 'pequeno'. Logo $I(\varepsilon)$ possui um mínimo local em $\varepsilon = 0$. Note que

$$(1.42) \quad \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial h}{\partial z} \phi_1 + \frac{\partial h}{\partial u} \phi_2 - (\dot{z}^\varepsilon - f) \phi_3 - \lambda^\varepsilon \left(\dot{\phi}_1 - \frac{\partial f}{\partial z} \phi_1 - \frac{\partial f}{\partial u} \phi_2 \right) \right] dt \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial z}(z^\varepsilon(t_1)) \phi_1(t_1). \end{aligned}$$

Integramos por partes o termo $\lambda^\varepsilon \dot{\phi}_1$

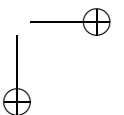
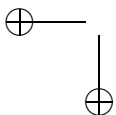
$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda^\varepsilon \dot{\phi}_1 dt = [\lambda^\varepsilon \phi_1]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}^\varepsilon \phi_1 dt = \lambda^\varepsilon(t_1) \phi_1(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}^\varepsilon \phi_1 dt$$

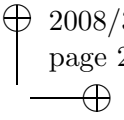
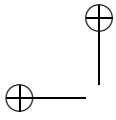
e substituímos em (1.42), obtendo

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\phi_1 \left(\frac{\partial L}{\partial z}(\bar{z}, \bar{u}) + \bar{\lambda} \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{z}, \bar{u}) + \dot{\bar{\lambda}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \phi_2 \left(\frac{\partial L}{\partial u}(\bar{z}, \bar{u}) + \bar{\lambda} \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{z}, \bar{u}) \right) + \phi_3 (-\dot{\bar{z}} + f(\bar{z}, \bar{u})) \right] dt \\ &\quad + \phi_1(t_1) \left[\frac{\partial L_1}{\partial z}(\bar{z}(t_1)) - \bar{\lambda}(t_1) \right]. \end{aligned}$$

Tomando $\phi_1 = \phi_2 = 0$ e ϕ_3 arbitrário, obtemos a *equação de estado*

$$\dot{\bar{z}} = f(\bar{z}, \bar{u}).$$





Tomando $\phi_1 = 0$ e ϕ_2 qualquer, obtemos a *condição de otimalidade*

$$\frac{\partial L}{\partial u}(\bar{z}, \bar{u}) + \bar{\lambda} \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{z}, \bar{u}) = 0.$$

Tomando agora ϕ_1 qualquer com $\phi_1(t_1) = 0$, obtemos a *equação adjunta* (ou de co-estado)

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial L}{\partial z}(\bar{z}, \bar{u}) - \bar{\lambda} \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{z}, \bar{u}).$$

Por fim, escolhendo ϕ_1 qualquer com $\phi_1(t_1) \neq 0$, obtemos a *condição de contorno para a equação adjunta*

$$\frac{\partial L_1}{\partial z}(\bar{z}(t_1)) - \bar{\lambda}(t_1) = 0.$$

Definimos agora a *função de Hamilton* $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(z, \lambda, u) := \langle \lambda, f(z, u) \rangle + L(z, u)$$

e supomos que é possível explicitar (através da condição de otimalidade) o controle em função das variáveis de estado e adjunta ($\bar{u} = U(\bar{z}, \bar{\lambda})$). Obtemos das equações de estado e adjunta o sistema hamiltoniano

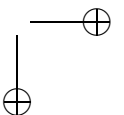
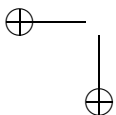
$$(1.43) \quad \begin{cases} \dot{\bar{z}} = +\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\bar{z}, \bar{\lambda}, U(\bar{z}, \bar{\lambda})) \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial z}(\bar{z}, \bar{\lambda}, U(\bar{z}, \bar{\lambda})) \\ \bar{z}(t_0) = z_0, \quad \bar{\lambda}(t_1) = \frac{\partial L_1}{\partial z}(\bar{z}(t_1)) \end{cases}$$

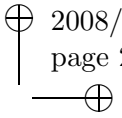
Note por fim que derivando H em relação a u no ponto $(\bar{z}, \bar{\lambda}, \bar{u})$ obtemos da condição de otimalidade

$$(1.44) \quad \frac{\partial H}{\partial u}(\bar{z}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = \bar{\lambda} \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{z}, \bar{u}) + \frac{\partial L}{\partial u}(\bar{z}, \bar{u}) = 0.$$

Isto é, $H(\bar{z}(t), \bar{\lambda}(t), \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ possui um mínimo local em $u = \bar{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Por este motivo, a condição de otimalidade também é conhecida como *condição de mínimo*.

As condições necessárias que procurávamos podem ser resumidas em (1.43) e (1.44), isto é, se (\bar{z}, \bar{u}) é uma solução para o problema de controle ótimo, então existe $\lambda : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que estas condições são satisfeitas.





A análise das condições (1.43) e (1.44) é um dos principais tópicos de interesse na área de controle ótimo. A obtenção destas condições corresponde, no caso geral, ao teorema conhecido na literatura por *princípio do máximo* ou de Pontryagin (veja [PBG], [Tr], [Za]). Retornamos ao estudo das mesmas no Capítulo 10 (um caso particular pode ainda ser encontrado na Secção 9.5).

Exercícios

1.1. Sejam $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$F(x, y) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + y, \quad G(x, y) := x - 3.$$

a) Utilizando o teorema de multiplicadores de Lagrange, resolva o seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } F(x, y) \\ \text{sujeito a} \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

b) Calcule $\nabla F(\bar{x}, \bar{y})$ e $\nabla G(\bar{x}, \bar{y})$, onde (\bar{x}, \bar{y}) é a solução encontrada no item a).

1.2. Encontre a menor distância (vertical) entre a parábola $y = ax^2 + bx + c$ e a reta $y = x + d$.

1.3. Um meteoro percorre a órbita hiperbólica descrita por

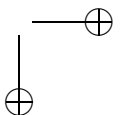
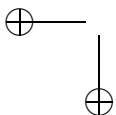
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

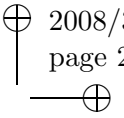
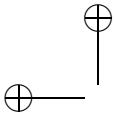
(a Terra está na origem $(0, 0)$), enquanto que um satélite em órbita geostacionária se encontra na posição (x_0, y_0) . Encontre o ponto da órbita do meteoro de menor distância ao satélite.

1.4. Considere o seguinte modelo de investimento de capital:

$$x_{k+1} = (1 + r)x_k + u_k, \quad k + 1, 2, \dots$$

onde x_k é o capital ao final do k -ésimo ano, u_k é o capital investido ao longo do ano k e $r > 0$ é a taxa de juros anual. Suponha que o custo de





EXERCÍCIOS

investimento do capital ao longo dos anos $k = 0, \dots, N$ é descrito pela função

$$C(u) := c \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2,$$

onde $u = (u_0, \dots, u_N)$. Encontre uma política ótima de investimento u para $N = 10, x_{10} = 100000, r = 7$.

1.5. Considere um circuito com um resistor (de resistência R) e um capacitor (de capacitância C). Sejam $u(t)$ a tensão, $y(t)$ a intensidade da corrente elétrica e $q(t)$ a carga elétrica no tempo t . Temos então as seguintes hipóteses físicas:

- $y(t)$ é igual à variação temporal de $q(t)$;
- a diferença de potencial no capacitor é igual a $q(t)/C$;
- a diferença de potencial no resistor é igual a $Ry(t)$;
- a lei de Kirchhoff vigora: a voltagem aplicada no circuito é igual ao somatório das diferenças de potencial no circuito.

Obtenha uma equação diferencial para q e resolva-a, obtendo q em função de u e $q(0) = q_0$.

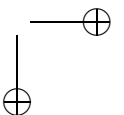
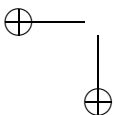
1.6. A equação diferencial $(\dagger) \quad \ddot{x} = \varepsilon K$, onde $K \neq 0$, descreve fenômenos da cinemática (e.g., na queda livre: $\varepsilon = -1$ e $K = g$, a constante gravitacional). A partir do sistema $\dot{x} = v, \dot{v} = \varepsilon K$ (onde x é o deslocamento e v a velocidade), obtemos a equação $(\ddagger) \quad dv/dx = (\varepsilon K)/v$. Resolva a equação diferencial (\ddagger) e esboce o gráfico das soluções no plano (x, v) para o caso particular $\varepsilon = 1$.

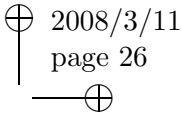
1.7. Considere a equação diferencial (\dagger) do Exercício 1.6 com a seguinte estratégia de realimentação:

$$K = K(x) = \begin{cases} -b, & x > 0 \\ b, & x < 0 \end{cases} .$$

Dada uma condição inicial (x_0, v_0) e uma condição final (x_1, v_1) , encontre uma trajetória correspondente que as una.

(Sugestão: utilize o esboço das trajetórias feito no Exercício 1.6.)





Capítulo 2

Observabilidade

Neste capítulo analisamos o problema de adquirir informações sobre o estado presente de um sistema a partir da observação da saída do sistema em tempos passados. Conseguimos assim classificar o espaço de estados em componentes observáveis, não observáveis e detectáveis (para esta última é necessária uma análise do comportamento assintótico das variáveis de estado). Devido a sua simplicidade, os sistemas lineares autônomos são estudados separadamente. Na última secção é apresentada uma técnica de reconstrução de estados a partir de observações. A relação existente entre os conceitos de observabilidade e controlabilidade é analisada no capítulo seguinte.

2.1 Sistemas Lineares

Considere o seguinte sistema linear de controle:

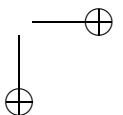
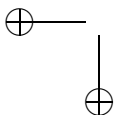
$$(2.1) \quad \begin{cases} z' &= A(t)z + B(t)u \\ y &= C(t)z \end{cases}$$

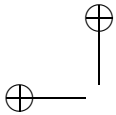
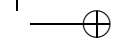
onde as variáveis possuem a seguinte interpretação:

$$\begin{aligned} z : [t_0, t_1] &\mapsto \mathbb{R}^n && \text{vetor das variáveis de estado;} \\ u : [t_0, t_1] &\mapsto \mathbb{R}^m && \text{vetor das variáveis de controle (entrada);} \\ y : [t_0, t_1] &\mapsto \mathbb{R}^l && \text{vetor de observação (saída).} \end{aligned}$$

Os operadores

$$A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \quad \text{e} \quad C : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$$





são supostos contínuos em seus domínios de definição. O sistema de controle linear (2.1) é denominado abreviadamente por (A, B, C) . Se as funções matriciais A, B, C não dependem explicitamente do tempo, o sistema de controle é dito *autônomo*; caso contrário, o sistema é denominado *não autônomo*.

Considere inicialmente a seguinte questão: dado um sistema de controle (A, B, C) , em que circunstâncias é possível a partir do conhecimento da entrada do sistema

$$u : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^m$$

e de sua saída

$$y : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^l,$$

reconstruir o estado inicial $z_0 := z(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Uma vez conhecido o vetor z_0 , é possível substituir o controle dado u na equação diferencial em (2.1) e calcular as variáveis de estado $z(t)$ em qualquer instante de tempo $t \in [t_0, t_1]$.

Como estratégias de controle admissíveis consideramos as funções $L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$. Conforme resultados do Capítulo A, temos que:

$$\begin{aligned} y(t) &= C(t) \Phi_A(t, t_0) z_0 + y^1(t), \\ y^1(t) &= \int_{t_0}^{t_1} C(t) \Phi_A(t, s) B(s) u(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

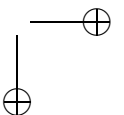
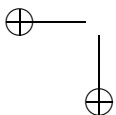
Note que, conhecida a entrada u , a função y^1 pode ser calculada *a priori*, independente do fato de conhecermos (ou não) a condição inicial z_0 . Portanto, a determinação de z_0 a partir do par (y, u) é equivalente à determinação de z_0 a partir da diferença $y - y^1$, a qual corresponde à saída do sistema homogêneo

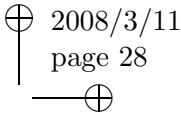
$$z' = A(t) z.$$

Isto significa que, para estudar a determinação do estado inicial z_0 de um sistema linear, basta concentrarmo-nos em sistemas homogêneos da forma:

$$(2.2) \quad z' = A(t) z, \quad y = C(t) z,$$

os quais representamos pela notação abreviada $(A, , C)$. Estamos agora em condições de formalizar o conceito de observabilidade, discutido no Capítulo 1.





Definição 6. O sistema (A, \cdot, C) é denominado *observável em* $[t_0, t_1]$ quando para toda função $z \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ a condição

$$z'(t) = A(t)z(t), \quad C(t)z(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

implicar em $z(t_0) = 0$. □

Em outras palavras, a observabilidade do sistema (A, \cdot, C) é equivalente ao fato da aplicação linear

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n &\longrightarrow C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \\ z_0 &\longmapsto C(\cdot) \Phi_A(\cdot, t_0) z_0 \end{aligned}$$

ser injetiva. No teorema a seguir analisamos uma forma equivalente de definir a observabilidade de um sistema.

Teorema 7. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) O sistema (A, \cdot, C) é observável em $[t_0, t_1]$;
- b) A matriz

$$W(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) dt$$

é positiva definida.

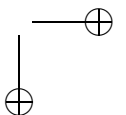
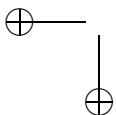
Demonstração: (a) \implies (b) Suponha que $W(t_0, t_1)$ não é positiva definida. Por construção, a matriz $W(t_0, t_1)$ é simétrica e, além disto, satisfaz: $\langle x, W(t_0, t_1)x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. (por quê?).

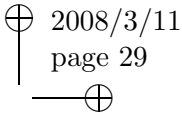
Logo, existe $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\langle z_0, W(t_0, t_1)z_0 \rangle = 0$. Definindo agora a função $z(\cdot) := \Phi_A(\cdot; t_0)z_0$, temos que esta função é solução do problema de valor inicial $z' = A(t)z, z(t_0) = z_0$. Além disso, z satisfaz

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} |C(t)z(t)|^2 dt &= \int_{t_0}^{t_1} |C(t)\Phi_A(t, t_0)z_0|^2 dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle C(t)\Phi_A(t, t_0)z_0, C(t)\Phi_A(t, t_0)z_0 \rangle dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle z_0, \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) z_0 \rangle dt \\ &= \langle z_0, W(t_0, t_1)z_0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Encontramos assim uma função z satisfazendo

$$C(t)z(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad \text{e} \quad z(t_0) = z_0 \neq 0,$$





o que contradiz a hipótese do sistema ser observável.

(b) \implies (a) Suponha que para alguma função z tenhamos

$$z'(t) = A(t)z(t), \quad C(t)z(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Logo, temos $z = \Phi(\cdot; t_0)z_0$, onde $z_0 := z(t_0)$ e

$$\langle z_0, W(t_0, t_1)z_0 \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle C(t)z(t), C(t)z(t) \rangle dt = 0.$$

Da hipótese de $W(t_0, t_1)$ ser positiva definida, segue $z_0 = 0$. ■

Os sistemas de controle lineares com matrizes invariantes no tempo (autônomos) representam um importante caso especial que é tratado no teorema a seguir. No texto que segue adotamos a notação: Dada uma matriz M , representamos por $\text{Po}(M)$, $\text{Ke}(M)$, $\text{Im}(M)$ respectivamente o posto, o núcleo e a imagem de M (para detalhes veja [Gan]).

Teorema 8. *Seja (A, C) um sistema de controle autônomo. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

- a) (A, C) é observável em $[0, T]$ para todo $T > 0$;
- b) (A, C) é observável em $[0, T]$ para algum $T > 0$;
- c) A Matriz $W_T := \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} ds$ é não singular para algum $T > 0$;
- d) A Matriz $W_T := \int_0^T e^{A^*s} C^* C e^{As} ds$ é não singular para todo $T > 0$;
- e) $\text{Po}(C^* | A^* C^* | \dots | (A^*)^{n-1} C^*) = n$; ¹
- f) $\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ke}(CA^k) = \{0\}$.

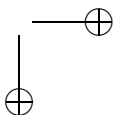
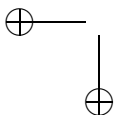
Demonstração: a) \implies b) Nada a fazer.

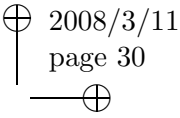
b) \implies c) Seja $T > 0$ escolhido de acordo com b). Tome $z_0 \in \mathbb{R}^n$ e defina a função $z(t) := e^{At} z_0$ para $t \in \mathbb{R}$. A identidade

$$\langle z_0, W_T z_0 \rangle = \int_0^T |C z(s)|^2 ds$$

é obtida como na demonstração do Teorema 7. Esta identidade e a hipótese de observabilidade do sistema (A, C) no intervalo $[0, T]$ implicam em $z_0 = 0$.

¹A matriz $M_0 = (C^* | A^* C^* | \dots | (A^*)^{n-1} C^*)$ é chamada matriz de observação do sistema (A, C) .





$c) \implies d)$ Seja $T > 0$ escolhido de acordo com $c)$ e seja $\hat{T} > 0$. Da Identidade

$$\langle z_0, W_{\hat{T}} z_0 \rangle = \int_0^{\hat{T}} |C z(s)|^2 ds,$$

temos que $\langle z_0, W_{\hat{T}} z_0 \rangle = 0$ implica em

$$a(t) := C e^{At} z_0 = 0, \forall t \in [0, \hat{T}].$$

Daí segue que

$$(2.3) \quad a^{(k)}(0) = C A^k z_0 = 0, k = 0, 1, \dots$$

Portanto,

$$C A^k s^k z_0 = 0, k = 0, 1, \dots, s \in [0, T].$$

Esta última igualdade implica em

$$\langle z_0, W_T z_0 \rangle = \int_0^T |C e^{At} z_0|^2 ds = \int_0^T \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C A^k s^k z_0 \right|^2 ds = 0.$$

A escolha de T implica por fim em $z_0 = 0$.

$d) \implies e)$ Suponha por contradição que $Po(C^* |A^* C^*| \dots | (A^*)^{n-1} C^*) < n$. Então, as n linhas da matriz $n \times nl$ $(C^* |A^* C^*| \dots | (A^*)^{n-1} C^*)$ são linearmente dependentes e existe um elemento $z_0 \in \mathbb{R}^n, z_0 \neq 0$, satisfazendo

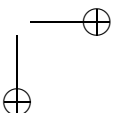
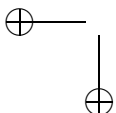
$$(2.4) \quad z_0^* (A^*)^k C^* = 0, C A^k z_0 = 0, k = 0, \dots, n-1.$$

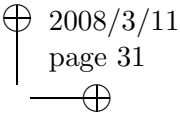
Seja $p_A(\lambda) := \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k$, o polinômio característico da matriz A . O teorema de *Caley-Hamilton* da álgebra linear nos garante que A é um zero de seu polinômio característico (veja [Gan] ou [So]), isto é

$$p_A(A) := A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0,$$

de onde concluímos que

$$A^m = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(m)} A^k, m \geq n.$$





Isto nos permite escrever²

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k.$$

Sendo assim, temos de (2.4)

$$C e^{At} z_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) C A^k z_0 = 0, \quad t \in [0, T],$$

e portanto,

$$\langle z_0, W_T z_0 \rangle = \int_0^T |C e^{At} z_0|^2 dt = 0,$$

o que contradiz a hipótese em *d*), pois $z_0 \neq 0$.

e) \iff *f*) De (2.4) concluímos que $z_0 \in \bigcap \text{Ke}(C A^k) \iff z_0^* (A^k)^* C^* = 0, k = 0, \dots, n - 1$.

f) \implies *a*) Suponha que $z_0 \in \mathbb{R}^n$ é tal que $C e^{At} z_0 = 0$, para todo $t \in [0, T]$. Como em (2.3), podemos concluir que $C A^k z_0 = 0$ para $k = 0, 1, \dots$. A hipótese em *f*) implica então que $z_0 = 0$. ■

Um sistema autônomo (A, C) é portanto observável, quando for observável em $[0, T]$ para um $T > 0$ qualquer.

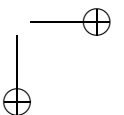
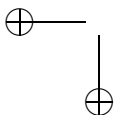
Exemplo 9. Consideramos um modelo para representar o movimento de um satélite artificial de massa unitária orbitando a Terra. Definindo as variáveis:

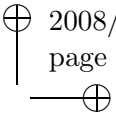
- r : altura da órbita;
- $\dot{\theta}$: velocidade angular;
- u_1 : empuxo radial dos motores;
- u_2 : empuxo tangencial dos motores;
- ω^2 : constante gravitacional ($\omega^2 = g$);

o sistema de equações que descreve o fenômeno é:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \ddot{r} &= \dot{\theta}^2 r - \omega^2 r^{-2} + u_1 \\ \ddot{\theta} &= -2\dot{\theta}\dot{r}r^{-2} + r^{-1}u_2 \end{cases}$$

²Verifique que $\alpha_k(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{t^j \alpha_k^{(j)}}{j!}$.





Note que a solução deste sistema para $u_1 = u_2 = 0$ é dada por $r(t) = 1$ e $\theta(t) = \omega t$. Portanto, ao definirmos as variáveis normalizadas

$$z_1 := r - 1, \quad z_2 := z_1' = \dot{r}, \quad z_3 := \theta - \omega t, \quad z_4 := z_3' = \dot{\theta} - \omega,$$

estamos estudando perturbações desta solução, a qual representa a órbita livre (controle $u = 0$) do satélite. Reescrevendo o sistema a partir das novas variáveis z_1, \dots, z_4 , temos

$$(2.6) \quad \begin{cases} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= (z_4 + \omega)^2(z_1 + 1) - \frac{\omega^2}{(z_1 + 1)^2} + u_1 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= -2\frac{(z_4 + \omega)z_2}{z_1 + 1} + \frac{u_2}{z_1 + 1} \end{cases}$$

Linearizando agora o sistema (2.6) no ponto

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = u_1 = u_2 = 0,$$

obtemos o novo sistema

$$z' = Az + Bu,$$

onde as matrizes A e B são dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

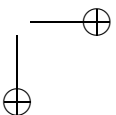
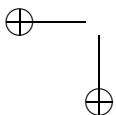
Se supomos que tanto variações no raio da órbita, quanto no ângulo podem ser medidas, então as variáveis z_1 e z_3 são conhecidas. Nesse caso, o vetor de observação y satisfaz:

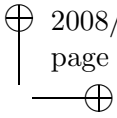
$$y = Cz \quad \text{onde} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz de observação, dada por $M_0 := (C^* | \dots | (A^*)^{n-1} C^*)$, se escreve neste caso como

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Temos assim que a condição $\text{Po}(M_0) = 4 = n$ é verificada, garantindo a observabilidade do sistema. \square





2.2 Subespaço não Observável

Consideramos novamente o sistema autônomo (A, C) . Como já foi discutido na secção anterior, a observabilidade deste sistema é equivalente à injetividade da aplicação linear

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n &\longrightarrow C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \\ z_0 &\longmapsto C \Phi_A(\cdot, t_0) z_0. \end{aligned}$$

Este fato motiva a seguinte definição:

Definição 10. O núcleo da aplicação G definida acima é denominado *subespaço não observável* do sistema (A, C) . \square

Exemplo 11. A definição acima pode ser ilustrada pelo sistema (A, C) com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que nenhuma condição inicial da forma $z_0 = (\alpha \ 0)^* \in \mathbb{R}^2$ pode ser observada. A matriz $M_0 := (C^* | A^* C^*)$ é dada por

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

\square

O Exemplo 11 sugere ainda uma relação entre o subespaço não observável e $\text{Im}(M_0)^\perp$. Este fato fica claro no teorema a seguir.

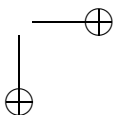
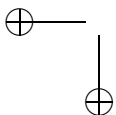
Teorema 12. *Seja o sistema autônomo (A, C) e $N \subset \mathbb{R}^n$ o seu subespaço não observável. Podemos então representar N da seguinte forma:*

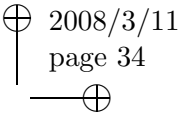
$$N = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ke}(CA^k).$$

Demonstração: Note que, se $z_0 \in N$, então $C \Phi_A(\cdot, t_0) z_0 \equiv 0$ em $[0, T]$. Portanto,

$$CA^k z_0 = \left[\frac{d^k}{dt^k} C e^{A(t-t_0)} z_0 \right]_{t=t_0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Logo, $z_0 \in \text{Ke}(CA^k)$, $k = 0, \dots, n-1$, provando que $N \subseteq \bigcap \text{Ke}(CA^k)$. Reciprocamente, se $z_0 \in \bigcap \text{Ke}(CA^k)$, repetimos a argumentação feita





na demonstração da parte $d) \implies e)$ do Teorema 8 e concluímos que

$$\langle z_0, W_T z_0 \rangle = \int_0^T |C e^{At} z_0|^2 dt = 0,$$

provando assim que $z_0 \in N$. ■

Observação 13. Por ser o núcleo de uma aplicação linear, o subespaço não observável é um subespaço vetorial do \mathbb{R}^n . Além disso, são válidas as seguintes afirmações:

- $N \subset Ke(C)$;
- $A(N) \subset N$, i.e. N é invariante por A ;
- $N = \bigcup \{S \subset \mathbb{R}^n \mid S \subset Ke(C), A(S) \subset N\}$, i.e. N é o maior subespaço de $Ke(C)$, que é invariante por A .

As propriedades acima são de fácil verificação e deixadas como exercício. □

Se um determinado sistema $(A, , C)$ não é observável (em $[t_0, t_1]$ para todo $t_1 > t_0$), podemos ainda assim indagar sobre a observabilidade das soluções que não decaem, i.e. aquelas que satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \neq 0.$$

Tais soluções correspondem aos auto-valores de A com parte real positiva. A fim de analisar melhor esta questão, fazemos a seguinte construção: Seja p_A o polinômio característico da matriz A . Seja ainda a decomposição

$$p_A(\lambda) = p^+(\lambda) p^-(\lambda),$$

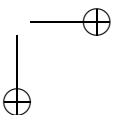
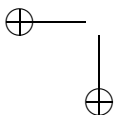
onde os polinômios p^+ e p^- são escolhidos de forma a possuir raízes respectivamente em $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re(\lambda) \geq 0\}$ e $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re(\lambda) < 0\}$. Estes polinômios nos permitem definir os espaços

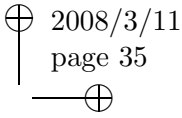
$$(2.7) \quad X^+(A) := Ke(p^+(A)) \quad \text{e} \quad X^-(A) := Ke(p^-(A)),$$

com a ajuda dos quais chegamos à seguinte definição.

Definição 14. Seja $(A, , C)$ um sistema autônomo, N seu subespaço não observável. Sejam ainda $X^+(A)$, $X^-(A)$ definidos como em (2.7). O sistema $(A, , C)$ é denominado *detectável* quando $N \subset X^-(A)$. □

A noção de detectabilidade nos permite enfim analisar o compromisso entre os autovalores de A e as trajetórias das soluções do sistema.





Teorema 15. *Seja (A, C) um sistema autônomo detectável. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

- a) *Todo autovalor λ de A satisfaz $\text{Re}(\lambda) < 0$.*
- b) *A função matricial $V(t) := \int_0^t e^{A^*s} C^* C e^{As} ds$ definida para $t \in [0, \infty)$ é limitada.*

Demonstração: a) \implies b) Tome $\gamma = \max\{\text{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } A\}$ e $\varepsilon = |\gamma|/2$. Por hipótese temos $\gamma < 0$ e $\delta := \gamma + \varepsilon < 0$. O Teorema 248 garante a existência de uma constante $c > 0$ tal que

$$\|e^{At}\| \leq c e^{\delta t}, \quad t > 0.$$

Temos desta forma que

$$\|V(t)\| \leq c^2 \|C\|^2 \int_0^\infty e^{2\delta t} dt < M, \quad \forall t > 0.$$

b) \implies a) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de A com $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ e u o autovetor correspondente. Por hipótese existe $M > 0$ tal que

$$\langle u, V(t) u \rangle = \int_0^t e^{2\text{Re}(\lambda)s} |Cu|^2 ds < M, \quad \forall t \geq 0.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow \infty$ temos que $Cu = 0$, de onde conclui-se que

$$C A^k u = \lambda^k C u = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

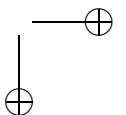
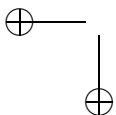
O Teorema 8 garante então que

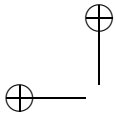
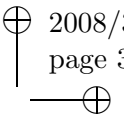
$$u \in N = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ke}(C A^k) \subset X^-(A).$$

Assim, temos que $u \in X^-(A) \cap X^+(A) = \{\emptyset\}$. ■

2.3 Reconstrução de Estados

Se o sistema (A, C) é observável (em $[t_0, t_1]$), faz sentido pensar na reconstrução do estado inicial z_0 a partir do vetor de observação y . Uma primeira tentativa é utilizar um operador de reconstrução linear que seja, na medida do possível, insensível a interferências no vetor de observação y .





Nesse sentido definimos o operador de reconstrução

$$(2.8) \quad z_0 = \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt,$$

onde a função matricial R é denominada *núcleo de reconstrução* do sistema. Para esse esquema de reconstrução particular temos o seguinte resultado:

Teorema 16. *Seja (A, C) um sistema observável em $[t_0, t_1]$ (não necessariamente autônomo). Então a função matricial*

$$R(t) := W(t_0, t_1)^{-1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^*, \quad t \in [t_0, t_1],$$

define um núcleo de reconstrução para o sistema (A, C) . A aplicação

$$\mathfrak{R}(y) := \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt$$

é linear, contínua e está bem definida de $C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^l)$ em \mathbb{R}^n .

Demonstração: Do Teorema 7, sabemos que $W(t_0, t_1)$ é inversível, portanto a função R (e conseqüentemente a aplicação \mathfrak{R}) está bem definida. Note ainda que

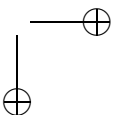
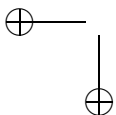
$$\int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) ds = \int_{t_0}^{t_1} R(t) C \Phi_A(t, t_0) z_0 ds = z_0,$$

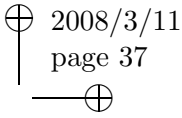
provando que R satisfaz (2.8). A linearidade da aplicação \mathfrak{R} é óbvia e sua continuidade segue da desigualdade

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt \right| \leq c \max_{t \in [t_0, t_1]} |y(t)| = c \|y\|_\infty.$$

■

Observação 17. É possível ainda demonstrar que a aplicação \mathfrak{R} definida acima é contínua quando definida em $L_2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. Mais ainda, entre todos os núcleos de reconstrução lineares definidos em $L_2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, a função definida acima é a de menor norma. □





Observação 18 (Observabilidade de sistemas não lineares). Encerramos este capítulo mencionando uma importante área de pesquisa atual relacionada a sistemas não lineares. Uma nova teoria de observabilidade para sistemas não lineares foi desenvolvida nos anos 90 por J.P.Gauthier e I.Kupka [GaKu, GaKu1, GaKu2, JoGa]. Os autores consideram sistemas com dinâmicas e funções de output ambas autônomas e C^∞ , a fim de definir um novo conceito de observabilidade através da medida de conjuntos especiais na pré-imagem da aplicação input-output correspondente ao sistema [GaKu, Capítulo 2]. Particularmente interessante é o caso em que a aplicação *estado-inicial* \rightarrow *trajetória-output* não é regular. Os autores estendem um conceito (aplicação finita) da teoria clássica de singularidades para a aplicação *estado-inicial* \rightarrow *trajetória-output* [JoGa], obtendo assim novos resultados relativos à observabilidade do sistema [GaKu, Capítulo 5]. \square

Exercícios

2.1. Considere o sistema (A, B, C) com

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 1 \ 1).$$

Encontre (se possível) uma condição inicial z_0 de modo que a saída do sistema seja da forma $y(t) = te^{-t}$.

2.2. Considere o sistema $(A, , C)$ com

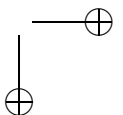
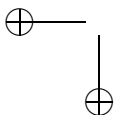
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = (a \ b),$$

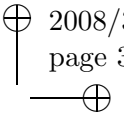
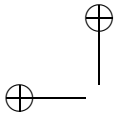
onde $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo que $z_0 \neq 0$ e que a saída $y(t)$ é medida apenas nos instantes $t_2 > t_1 > 0$, encontre os valores de a e b para os quais é possível determinar o estado inicial z_0 a partir das observações $y(t_1)$ e $y(t_2)$.

2.3. Considere o sistema $(A, , C)$ com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 1).$$

Calcule a matriz de transição do sistema $z' = Az$. Mostre que $(A, , C)$ é observável.





2.4. Considere um modelo de compartimentos (veja Secção 1.2.6) descrito pelo sistema (A, B, C) , com

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 & 0 \\ a_1 & -(a_2 + b_1) & b_2 \\ 0 & a_2 & -b_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0).$$

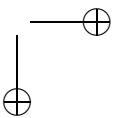
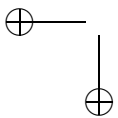
Verifique a observabilidade do sistema.

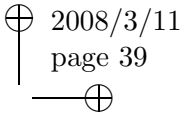
2.5. Demonstre as afirmações feitas na Observação 13.

2.6. Considere o sistema (A, C) com

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 1).$$

- a) Mostre que o sistema é observável.
- b) Exiba um núcleo de reconstrução para o sistema.





Capítulo 3

Controlabilidade

Neste capítulo estudamos prioritariamente o problema de determinar como e quando um estado específico pode ser atingido por um sistema a partir da escolha de uma estratégia de controle apropriada. Na Secção 3.2 estudamos a relação existente entre os conceitos de observabilidade e controlabilidade de sistemas lineares. Na Secção 3.5 encontramos a solução de uma família especial de problemas de controle ótimo associados com sistemas lineares autônomos. Na Secção 3.6 tratamos da controlabilidade de sistemas com restrições na variável de controle. Na Secção 3.7 analisamos uma família particular de problemas, cujas soluções são os controles denominados Bang–Bang.

3.1 Sistemas Lineares

Consideramos um sistema linear de controle da forma (A, B, C)

$$(3.1) \quad z' = A(t)z + B(t)u$$

$$(3.2) \quad y = C(t)z$$

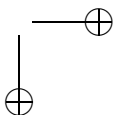
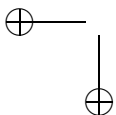
onde as variáveis z , y e u possuem, como na Secção 2.1, a seguinte interpretação:

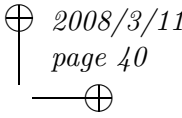
$z : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$: vetor das variáveis de estado;

$u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$: vetor das variáveis de controle (entrada);

$y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l$: vetor de observação (saída).

O efeito das variáveis de controle sobre a dinâmica do sistema é modelado unicamente na equação (3.1), sendo desnecessário considerar a





equação de observação $y = C(t)z$. Adotamos assim a notação abreviada (A, B) para representar o sistema de controle descrito nas equações (3.1), (3.2).

A menos que se afirme o contrário, as funções matriciais

$$A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, \quad B : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$$

são consideradas contínuas neste capítulo. A matriz de transição do sistema $z' = A(t)z$ (veja Definição 256) é representada por $\Phi_A(\cdot, \cdot)$. Como controles admissíveis consideramos as funções¹

$$u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m).$$

Podemos agora introduzir formalmente o conceito de *controlabilidade*, mencionado no Capítulo 1.

Definição 19. O sistema (A, B) é dito *controlável em* $[t_0, t_1]$ quando, para todo par de estados $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$, existe um controle $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ de forma que a solução z do problema de valor inicial

$$z' = A(t)z + B(t)u(t), \quad z(t_0) = z_0$$

satisfaz também a condição de contorno $z(t_1) = z_1$. □

Observação 20. Quando a função $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ controla a evolução do estado z a partir do estado inicial $z_0 \in \mathbb{R}^n$ até o estado final $z_1 \in \mathbb{R}^n$ através da dinâmica $z' = A(t)z + B(t)u(t)$, conforme a Definição 19, usamos a notação abreviada

$$(t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1).$$

□

Observação 21. Note que o Teorema 258 garante que um controle u satisfaz

$$(t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1),$$

se e somente se

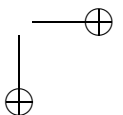
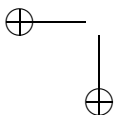
$$z_1 = \Phi_A(t_1, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s) B(s) u(s) ds.$$

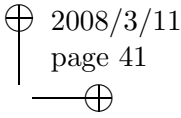
□

¹O espaço das funções localmente integráveis de $[0, \infty)$ em \mathbb{R}^m é definido por

$$L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R}^m) := \{u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) \text{ para todos } 0 \leq t_0 \leq t_1 < \infty\}.$$

Por definição, toda função $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ possui uma extensão trivial $\tilde{u} \in L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R}^m)$.





Existem ainda outras formas equivalentes de se definir a controlabilidade de sistemas lineares. Este é o resultado do teorema a seguir.

Teorema 22. *Dado o sistema linear de controle (A, B) , são equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) *O sistema (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$;*
- b) *Para todo $z_1 \in \mathbb{R}^n$ existe uma função $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ satisfazendo:*

$$(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1);$$

- c) *Para todo $z_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma função $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ satisfazendo:*

$$(t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_1, 0);$$

Demonstração: As implicações $a) \implies b)$ e $a) \implies c)$ são imediatas. As demais implicações decorrem basicamente da Observação 21. De fato, $b) \implies a)$ Sejam $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$. Escolha $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1 - \Phi_A(t_1, t_0)z_0).$$

Logo,

$$z_1 - \Phi_A(t_1, t_0)z_0 = \Phi_A(t_1, t_0)0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds$$

e portanto $(t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1)$.

- c) \implies a) Sejam $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$. Escolha $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$(t_0, z_0 - \Phi_A(t_1, t_0)^{-1}z_1) \xrightarrow{u} (t_1, 0).$$

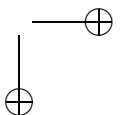
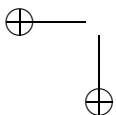
Logo,

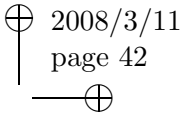
$$0 = \Phi_A(t_1, t_0)(z_0 - \Phi_A(t_1, t_0)^{-1}z_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds,$$

provando que $(t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1)$. ■

Observação 23. A propriedade descrita no item c) do Teorema 22 é usualmente denominada na literatura por *controlabilidade ao zero*. □

Uma análise sobre controlabilidade (assim como observabilidade) de sistemas de controle não lineares pode ser encontrada em [LeMa]. Entretanto, os autores consideram somente sistemas de controle do tipo autônomo.





3.2 Controlabilidade e Observabilidade

Existe um forte compromisso entre a controlabilidade do sistema (A, B) e a observabilidade do sistema $(-A^*, B^*)$. A investigação desse fato é o objeto de análise discutido nesta secção.

Teorema 24. *Dado o sistema linear de controle (A, B) , são equivalentes as afirmações:*

- a) (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$;
- b) Não existe nenhum $z_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que satisfaça

$$B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* z_1 = 0, \forall t \in [t_1, t_0].$$

- c) A matriz $Z(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, t) B(t) B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* dt$ é não singular;
- d) $(-A^*, B^*)$ é observável em $[t_0, t_1]$.

Demonstração: a) \implies b) Seja $z_1 \in \mathbb{R}^n$. Escolha $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1).$$

Temos, portanto, que

$$\begin{aligned} |z_1|^2 &= \langle z_1, z_1 \rangle = \langle z_1, \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, t) B(t) u(t) dt \rangle \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* z_1, u(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

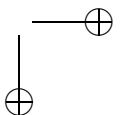
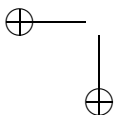
Logo, se $z_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos obrigatoriamente $B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* z_1 \neq 0$ em $[t_0, t_1]$.

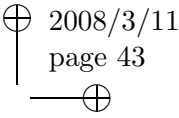
b) \iff c) De sua definição em c), segue que $Z(t_0, t_1)$ é semidefinida positiva. Seja agora $z_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Temos então

$$\langle z_1, Z(t_0, t_1) z_1 \rangle = \int_{t_0}^{t_1} |B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* z_1|^2 dt.$$

Logo, se $z_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, a hipótese em b) implica em $\langle z_1, Z(t_0, t_1) z_1 \rangle \neq 0$, provando c).

Reciprocamente, de c) temos que $B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* z_1 \equiv 0$ sse $z_1 = 0$. Provando assim b).





$c) \implies a)$ Seja $z_1 \in \mathbb{R}^n$. A existência de $Z(t_0, t_1)^{-1}$ é garantida por $c)$. Defina agora u por

$$u(t) := B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* Z(t_0, t_1)^{-1} z_1, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Temos então

$$\begin{aligned} \Phi_A(t_1, t_0) 0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s) B(s) u(s) ds &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s) B(s) B(s)^* \Phi_A(t_1, s)^* Z(t_0, t_1)^{-1} z_1 ds \\ &= Z(t_0, t_1) Z(t_0, t_1)^{-1} z_1 = z_1. \end{aligned}$$

O argumento da Observação 21 implica em $(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1)$. A afirmação em $a)$ segue por fim do Teorema 22.

$c) \iff d)$ Conforme demonstrado na Seção 2.3, a relação entre as matrizes de transição $\Phi_A(t_0, t)$ e $\Psi_A(t, t_0)$ dos sistemas $z' = A(t)z$ e $w' = -A(t)^*w$ respectivamente, é dada por

$$\Psi_A(t, t_0) := \Phi_A(t_0, t)^*.$$

Seja $W(t_0, t_1)$ a matriz de observação do sistema $(-A^*, B^*)$ (veja Teorema 7) dada por

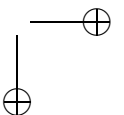
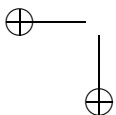
$$\begin{aligned} W(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \Psi_A(t, t_0)^* B(t) B(t)^* \Psi_A(t, t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) B(t)^* \Phi_A(t_0, t)^* dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t_1) \Phi_A(t_1, t) B(t) B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* \Phi_A(t_0, t_1)^* dt \\ &= \Phi_A(t_0, t_1) Z(t_0, t_1) \Phi_A(t_0, t_1)^*. \end{aligned}$$

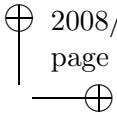
Portanto, $W(t_0, t_1)$ é singular se e somente se $Z(t_0, t_1)$ o for. O resultado desejado segue agora do Teorema 7, o qual garante que $(-A^*, B^*)$ é observável em $[t_0, t_1]$ se e somente se $W(t_0, t_1)$ é positiva definida. ■

Observação 25. Na demonstração da implicação $c) \implies a)$ no Teorema 24, construímos um controle especial u , que leva o estado inicial $z_0 = 0$ em um estado final $z_1 \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, i.e.

$$(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1) \quad \text{para} \quad u(t) := B(t)^* \Phi_A(t_1, t)^* Z(t_0, t_1)^{-1} z_1.$$

□





3.3 Sistemas de Controle Autônomos

Caso as matrizes A, B do sistema de controle (A, B) sejam constantes, este sistema é denominado sistema linear autônomo de controle. Neste caso, dispomos da seguinte caracterização de controlabilidade:

Teorema 26. *Seja (A, B) um sistema de controle autônomo. São equivalentes as afirmações:*

- a) (A, B) é controlável em $[0, T]$ para todo $T > 0$;
- b) (A, B) é controlável em $[0, T]$ para algum $T > 0$;
- c) A matriz $W_T := \int_0^T e^{-As}BB^*e^{-A^*s} ds$ é não singular para um $T > 0$;
- d) A matriz $W_T := \int_0^T e^{-As}BB^*e^{-A^*s} ds$ é não singular para todo $T > 0$;
- e) $Po(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n$.

Demonstração: O teorema segue imediatamente dos Teoremas 8 e 24. ■

Observação 27. A propriedade descrita no item e) do Teorema 26 é usualmente denominada na literatura por *critério de Kalman* (1963). □

Definição 28. Um sistema autônomo (A, B) , para o qual a condição de posto e) do Teorema 26 é satisfeita, é denominado *completamente controlável* (veja [So, Capítulo 3]). □

Exemplo 29. Considere o problema do oscilador harmônico descrito pela equação diferencial:

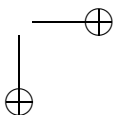
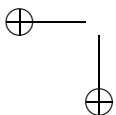
$$\ddot{x} + x = u.$$

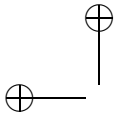
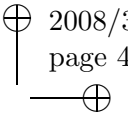
Podemos reescrever a equação acima na forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u - z_1 \end{cases}$$

que é obtida quando definimos $z_1 = x$ e $z_2 = x'$. Escrevendo na forma de sistema, temos

$$z' = Az + Bu, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$





Como

$$\text{Po}(B|AB) = \text{Po} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

podemos concluir que (A, B) é controlável. Note que não foi feita nenhuma restrição às variáveis de controle. \square

Exemplo 30. Consideremos novamente o movimento de um satélite artificial de massa unitária orbitando a Terra. No Exemplo 9 deduzimos uma aproximação linear para o modelo que representa o fenômeno, que é a equação

$$z' = Az + Bu,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso temos:

$$\text{Po}(B|AB|A^2B|A^3B) = \text{Po} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & * & \dots & * \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} = 4.$$

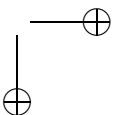
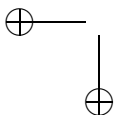
De onde concluímos que o sistema linearizado é controlável (em $[0, T]$ para T tão pequeno quanto se queira). Suponha agora que dispomos apenas do empuxo radial para controlar a órbita do satélite. Neste caso a matriz B se torna

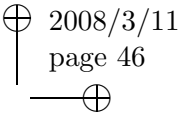
$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e obtemos

$$\text{Po}(B|AB|A^2B|A^3B) = \text{Po} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix} = 3.$$

Concluímos portanto, que nesta situação o sistema não mais é controlável.





Alternativamente, suponha que apenas o empuxo tangencial esteja disponível para realizar correções na órbita. A matriz B se torna

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e obtemos

$$\text{Po}(B|AB|A^2B|A^3B) = \text{Po} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

Sendo assim, nesta situação o sistema é novamente controlável. \square

Exemplo 31. Considere o sistema (A, B) gerado pela EDO de ordem n

$$x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} x^{(i)} = u.$$

Temos assim

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdots & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdots & -\alpha_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

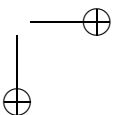
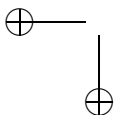
Um cálculo simples mostra que o sistema é controlável (verifique!). \square

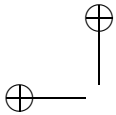
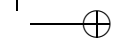
O próximo lema nos permite analisar a questão da controlabilidade quando temos perturbações de um sistema autônomo totalmente controlável.

Lema 32. *Seja (A, B) um sistema autônomo totalmente controlável. Então, para toda matriz $F \in \mathbb{R}^{m,n}$, o sistema $(A + BF, B)$ também é totalmente controlável.*

Demonstração: Seja $F \in \mathbb{R}^{m,n}$. Da controlabilidade de (A, B) segue que

$$\text{Po}(B|AB|\cdots|A^{n-1}B) = n.$$





Note ainda que

$$(B|\cdots|(A + BF)^{n-1}B) = (B|\cdots|A^{n-1}B) Q,$$

onde $Q = I + N \in \mathbb{R}^{nm, nm}$ e N é uma matriz nilpotente, i.e. $N^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

A forma exata de N é irrelevante e pode ser calculada recursivamente.² O importante é que da identidade $Q = I + N$ podemos concluir que a matriz Q é não singular (verifique!) e portanto

$$\text{Po}(B|(A + BF)B|\cdots|(A + BF)^{n-1}B) = n.$$

Provando que $(A + BF, B)$ é controlável. ■

3.4 Forma Normal dos Sistemas Autônomos

Os sistemas autônomos de controle possuem ainda a característica de poder ser reescritos em uma sistema especial, denominada *forma normal* (de Kalman). A vantagem é que na forma normal o sistema pode ser dividido em 4 blocos, sendo possível identificar os sub-sistemas:

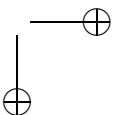
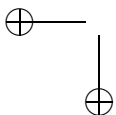
- controlável e observável;
- controlável e não observável;
- não controlável e observável;
- não controlável e não observável.

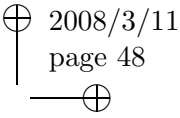
Teorema 33. *Seja (A, B, C) um sistema de controle autônomo. Então existe uma matriz não singular $P \in \mathbb{R}^{n, n}$, de modo que o sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, com matrizes $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$, $\tilde{C} = CP^{-1}$, é da forma*

$$(3.3) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad \tilde{C}_2 \quad 0 \quad \tilde{C}_4).$$

²Para $n = 3$ temos:

$$Q = \begin{bmatrix} I & FB & FAB + (FB)^2 \\ & I & FB \\ & & I \end{bmatrix}.$$





Temos ainda que o sub-sistema

$$(3.4) \quad \left(\left(\begin{array}{cc} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{array} \right) \right)$$

é controlável e o sub-sistema

$$(3.5) \quad \left(\left(\begin{array}{cc} \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & \tilde{A}_{44} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \tilde{C}_2 & \tilde{C}_4 \end{array} \right) \right)$$

é observável.

Demonstração: Começamos definindo os subespaços U e V de \mathbb{R}^n por

$$U := \text{Im}(B) + A \text{Im}(B) + \dots + A^{n-1} \text{Im}(B), \quad V := \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ke}(CA^k).$$

Dividimos a prova nos seguintes passos:

- (1) $A(V) \subset V$;
- (2) $A(U) \subset U$;
- (3) construção da matriz P ;
- (4) verificação de (3.3);
- (5) controlabilidade de (3.4);
- (6) observabilidade de (3.5).

(1) Seja $z \in V$ e defina $x = Az$. Logo, $CA^k x = CA^{k+1} z = 0$, para $k = 0, \dots, n-2$. Do teorema de Caley-Hamilton, temos $A^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.

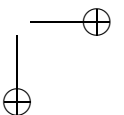
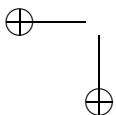
De onde concluímos que

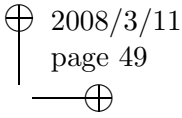
$$CA^{n-1} x = CA^n z = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k CA^k z = 0.$$

Provamos assim que $CA^k x = 0$, para $k = 0, \dots, n-1$, i.e. $x \in V$.

(2) Seja $z \in U$. Logo, existem vetores $u_k \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$z = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B u_k.$$





Defina agora $x = Az$. Utilizando novamente o teorema de Caley-Hamilton, temos

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} B u_k \\ &= A^n B u_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} A^k B u_{k-1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k \right) B u_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} A^k B u_{k-1} \\ &= \alpha_0 B u_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} A^k B (\alpha_k u_{n-1} + u_{k-1}) \text{ in } U. \end{aligned}$$

(3) Primeiro decompos o \mathbb{R}^n na soma direta

$$\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4,$$

onde $X_1 = U \cap V$; X_2 é tal que $X_1 \oplus X_2 = U$; X_3 é tal que $X_1 \oplus X_3 = V$ e $X_4 = \mathbb{R}^n \setminus X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$. Escolha agora uma base w^1, \dots, w^n para o \mathbb{R}^n , que seja composta por bases para os espaços X_1, X_2, X_3, X_4 . Isto é

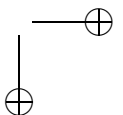
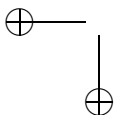
$$\begin{aligned} X_1 &= \text{Span} \{w^1, \dots, w^{d1}\}, \quad X_2 = \text{Span} \{w^{d1+1}, \dots, w^{d1+d2}\}, \\ X_3 &= \text{Span} \{w^{d1+d2+1}, \dots, w^{d1+d2+d3}\}, \\ X_4 &= \text{Span} \{w^{d1+d2+d3+1}, \dots, w^n\} \end{aligned}$$

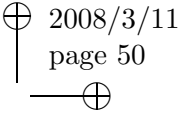
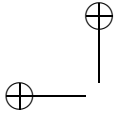
(onde $d1 + d2 + d3 + d4 = n$). Defina agora a matriz P através da transformação linear

$$P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n ; \quad Pw^k = e^k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

(4) A identidade $\tilde{A}P = PA$ e (2) implicam que os blocos $\tilde{A}_{31}, \tilde{A}_{32}, \tilde{A}_{41}$ e \tilde{A}_{42} são idênticamente nulos. A identidade $\tilde{A}P = PA$ e (1) implicam que os blocos $\tilde{A}_{21}, \tilde{A}_{23}, \tilde{A}_{41}$ e \tilde{A}_{43} são idênticamente nulos. Sejam $b_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, m$ os vetores coluna de B . Como $\text{Im}(B) \subset U$, então $b_j \in X_1 \oplus X_2$ e, portanto,

$$P b_j = \sum_{k=1}^{d1+d2} \alpha_k P w^k = \sum_{k=1}^{d1+d2} \alpha_k e^k.$$





Decorre então que os blocos \tilde{B}_3 e \tilde{B}_4 são identicamente nulos. Como $V \subset \text{Ke}(C)$, então $Cx = 0$, $x \in X_1 \oplus X_3$. De $C = \tilde{C}P$ segue agora que $\tilde{C}e^k = 0$ para $k = 1, \dots, d1, d1 + d2 + 1, \dots, d1 + d2 + d3$. Portanto, os blocos \tilde{C}_1 e \tilde{C}_3 são identicamente nulos.

(5) Seja $k := \dim U = d1 + d2$. Logo, $B = \text{Im}(U) + A \text{Im}(U) + \dots + A^{k-1} \text{Im}(U)$.³ Temos então

$$\begin{aligned} & \text{Po} \left(\left(\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{array} \right) \mid \dots \mid \left(\begin{array}{cc} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right)^{k-1} \left(\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{array} \right) \right) \\ &= \text{Po}(\tilde{B} \mid \dots \mid \tilde{A}^{k-1} \tilde{B}) \\ &= \text{Po}(B \mid \dots \mid A^{k-1} B) \\ &= \dim U = k. \end{aligned}$$

A controlabilidade de (3.4) segue agora do Teorema 8.

(6) Seja $k := \dim(X_2 \oplus X_4) = d2 + d4$. Logo, $V = \cup_{j=0}^{k-1} \text{Ke}(CA^j)$.⁴ Seja ainda M_0 a matriz de observação do sub-sistema (3.5) (conforme Teorema 8). Temos então

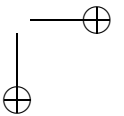
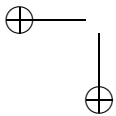
$$\begin{aligned} \text{Im}(M_0^*) &= \text{Im} \left(\begin{array}{c} (\tilde{C}_2 \mid \tilde{C}_4) \\ \vdots \\ (\tilde{C}_2 \mid \tilde{C}_4) \left(\begin{array}{cc} \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & \tilde{A}_{44} \end{array} \right)^{k-1} \end{array} \right) \\ &= \text{Im} \left(\begin{array}{c} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{k-1} \end{array} \right) = \text{Im} \left(\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{array} \right). \end{aligned}$$

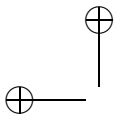
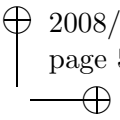
³Isto é consequência da seguinte implicação:

$$\begin{aligned} A^j \text{Im}(B) &\subseteq \text{Im}(U) + \dots + A^{j-1} \text{Im}(U) \implies \\ A^i \text{Im}(B) &\subseteq \text{Im}(U) + \dots + A^{j-1} \text{Im}(U), \forall i \geq j. \end{aligned}$$

⁴Este fato segue da implicação:

$$\begin{aligned} \text{Ke}(CA^{j-1}) &\subseteq \text{Ke}(CA^j) \implies \text{Ke}(CA^j) \subseteq \text{Ke}(CA^{j+1}) \implies \\ V &\subseteq \text{Ke}(CA^{j+1}). \end{aligned}$$





De onde concluímos que

$$\begin{aligned} \text{Po}(M_0^*) &= n - \dim \text{Ke} \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{pmatrix} \\ &= n - \dim V = n - \dim (X_1 \oplus X_3) = k. \end{aligned}$$

Logo, $\dim \text{Im}(M_0) = \dim \text{Im}(M_0^*) = k$ e a observabilidade do sistema em (3.5) segue do Teorema 26. ■

3.5 Controlabilidade e Estratégias Ótimas

Ainda investigando a controlabilidade de sistemas autônomos, vemos a seguir que é possível encontrar uma estratégia de controle que leve o estado $(0, z_0)$ no estado (T, z_1) e que seja ótima em um sentido particular.

Teorema 34. *Seja (A, B) um sistema de controle autônomo e $T > 0$. Defina a matriz $V_T := \int_0^T e^{As} B B^* e^{A^*s} ds$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

a) O controle

$$(3.6) \quad \bar{u}(t) := -B^* e^{A^*(T-t)} V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1), t \in [0, T]$$

satisfaz a propriedade

$$(3.7) \quad (0, z_0) \xrightarrow{\bar{u}} (T, z_1).$$

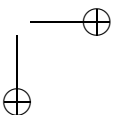
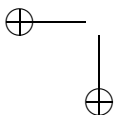
b) Entre todos os controles admissíveis u que satisfazem (3.7), \bar{u} é aquele que minimiza o funcional quadrático

$$J(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$$

e o valor mínimo atingido por J é

$$(3.8) \quad J(\bar{u}) = \int_0^T |\bar{u}(t)|^2 dt = \langle V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1), (e^{AT} z_0 - z_1) \rangle.$$

Demonstração: Para verificar a) note que a matriz de transição de um sistema autônomo é dada por $\Phi_A(t, s) = e^{A(t-s)}$. Temos portanto



$$\begin{aligned}
\Phi_A(T, 0) z_0 + \int_0^T \Phi_A(T, s) B \bar{u}(s) ds &= \\
&= e^{AT} z_0 - \int_0^T e^{A(T-s)} B B^* e^{A^*(T-s)} V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) ds \\
&= e^{AT} z_0 - \left(\int_0^T e^{As} B B^* e^{A^*s} ds \right) V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) \\
&= e^{AT} z_0 - V_T V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) = z_1.
\end{aligned}$$

Logo, a) segue da Observação 21. A equação (3.8) segue por sua vez de

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\bar{u}(t)|^2 dt &= \int_0^T |B^* e^{A^*(T-s)} V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1)|^2 ds \\
&= \left\langle \int_0^T e^{A(T-s)} B B^* e^{A^*(T-s)} V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) ds, \right. \\
&\quad \left. V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) \right\rangle \\
&= \langle V_T V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1), V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) \rangle \\
&= \langle V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1), (e^{AT} z_0 - z_1) \rangle.
\end{aligned}$$

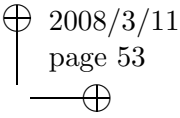
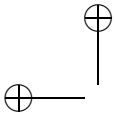
Provemos agora b). Seja $u \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^m)$ um controle qualquer satisfazendo (3.7). Podemos supor sem perda de generalidade que $J(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt < \infty$.⁵ Temos então

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u(s), \bar{u}(s) \rangle ds &= - \int_0^T \langle u(s), B^* e^{A^*(T-s)} V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) \rangle ds \\
&= - \left\langle \int_0^T e^{A(T-s)} B u(s) ds, V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) \right\rangle \\
&= \langle (e^{AT} z_0 - z_1), V_T^{-1} (e^{AT} z_0 - z_1) \rangle.
\end{aligned}$$

(Na última passagem utilizamos a Observação 21.) Acabamos de provar, portanto, que

$$(3.9) \quad \int_0^T \langle u(s), \bar{u}(s) \rangle ds = \int_0^T \langle \bar{u}(s), \bar{u}(s) \rangle ds.$$

⁵Essa hipótese garante que $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$. Note que (3.8) também implica em $\bar{u} \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$.



Note porém que o produto interno $\ll \cdot, \cdot \gg$ no espaço $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ é definido por

$$\ll f, g \gg = \int_0^T \langle f(s), g(s) \rangle ds, \quad \forall f, g \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m).$$

Logo, (3.9) é equivalente a $\ll u, \bar{u} \gg = \ll \bar{u}, \bar{u} \gg$. Temos daí que

$$\begin{aligned} & \ll \bar{u}, \bar{u} \gg + \ll u - \bar{u}, u - \bar{u} \gg \\ &= 2 \ll \bar{u}, \bar{u} \gg + \ll u, u \gg - 2 \ll u, \bar{u} \gg \\ &= \ll u, u \gg, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt = \int_0^T |\bar{u}(t)|^2 dt + \int_0^T |u(t) - \bar{u}(t)|^2 dt.$$

O item b) segue desta última identidade, completando a demonstração. ■

Observação 35. O Teorema 34 pode ser interpretado como:

A estratégia de controle \bar{u} definida em (3.6) é solução do problema de controle ótimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \int_0^T |u(t)|^2 dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m); \\ z' = Az + u; \quad z(0) = z_0, \quad z(T) = z_1. \end{array} \right.$$

□

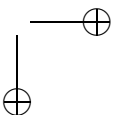
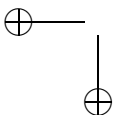
Exemplo 36. Considere a equação $\ddot{x} = u$. Do Exemplo 31, sabemos que o sistema de controle associado é completamente controlável. Tratamos agora do seguinte problema:

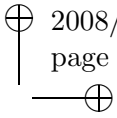
Dado $T > 0$, encontre um controle \bar{u} que leve o estado inicial $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$ no estado final $x(T) = \dot{x}(T) = 0$.

O Teorema 34 nos fornece uma receita (um tanto quanto trabalhosa) para encontrar u^* . A solução é:

$$\bar{u}(t) = -\frac{12}{T^3} \left(\frac{x_0 T^2}{2} + \frac{x_1 T^2}{3} - \frac{x_1 t T}{2} - t x_1 \right), \quad t \in [0, T].$$

□





3.6 Atingibilidade de Estados com Restrições de Controle

Um problema importante que surge em diversas aplicações práticas é aquele em que consideramos restrições às variáveis de controle. Sob essas condições é importante saber quais estados podem ser atingidos em um determinado intervalo de tempo. Consideramos novamente um sistema linear da forma (A, B) :

$$(3.10) \quad z' = A(t)z + B(t)u,$$

onde as funções matriciais

$$A : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^{n,n}, \quad B : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^{n,m}$$

são supostas contínuas. Impomos agora a seguinte restrição às variáveis de controle: As estratégias (ou ações) de controle precisam ser escolhidas a partir de um conjunto fixado *a priori*. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ o conjunto ao qual está restrita a escolha das estratégias de controle. Denominamos Ω *conjunto de controle* (ou de ações) e a partir daí definimos o conjunto⁶

$$U_{ad}(\Omega) := \{u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) \mid u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [t_0, t_1]\},$$

que é chamado *conjunto dos controles admissíveis*.

Definição 37. Seja $z_0 \in \mathbb{R}^n$. O subconjunto do \mathbb{R}^n definido por

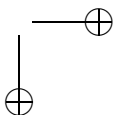
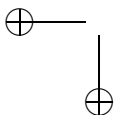
$$R(\Omega; t_0, z_0, t_1) := \{z_1 \in \mathbb{R}^n \mid (t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1) \text{ para algum } u \in U_{ad}(\Omega)\}$$

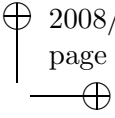
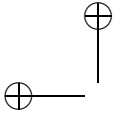
é denominado *conjunto atingível por z_0* . □

Pelo que vimos até agora, podemos garantir que $R(\Omega; t_0, z_0, t_1) = \mathbb{R}^n$ quando $\Omega = \mathbb{R}^m$ e (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$. Analisamos nesta seção o caso em que Ω é um subconjunto próprio de \mathbb{R}^m .

Teorema 38. *Sejam $\Omega, U_{ad}(\Omega), R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$ os conjuntos definidos acima. Se Ω é convexo e compacto, então $R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$ também é convexo e compacto para todo $z_0 \in \mathbb{R}^n$.*

⁶Notação: q.s. é abreviação de *quase sempre* e significa que determinada propriedade se verifica excepto por um conjunto de medida (de Lebesgue) nula.





Demonstração: Seja $\Phi_A(\cdot, \cdot)$ a matriz de transição do sistema. Temos então

$$(3.11) \quad R(\Omega; t_0, z_0, t_1) = \{z_1 \mid z_1 = \Phi_A(t_1, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s) B(s) u(s) ds, u \in U_{ad}(\Omega)\}.$$

Logo, a compacidade de Ω e a continuidade das funções $A(\cdot)$ e $B(\cdot)$ implicam na limitação do conjunto $R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$. Provamos agora que $R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$ é fechado. Seja $y = \lim_{l \rightarrow \infty} y_l$, onde $y_l \in R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Logo,

$$y_l = \Phi_A(t_1, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s) B(s) u_l(s) ds, u_l \in U_{ad}(\Omega), l \in \mathbb{N}.$$

Como Ω é limitado, então $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ e, portanto, possui uma subseqüência fracamente convergente.⁷ Suponha, sem perda de generalidade, que $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ é fracamente convergente. Então existe $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$, tal que

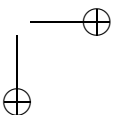
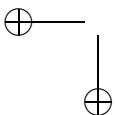
$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \langle w(t), u_l(t) \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle w(t), u(t) \rangle dt,$$

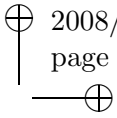
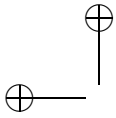
para todo $w \in L^\infty([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$. Como Ω é fechado, temos que $U_{ad}(\Omega)$ também é fechado.⁸ E como Ω é convexo, verifica-se facilmente que $U_{ad}(\Omega)$ também é convexo. Sendo $U_{ad}(\Omega)$ convexo e fechado, um resultado conhecido da análise funcional garante que $U_{ad}(\Omega)$ é fracamente fechado. De onde concluímos que $u \in U_{ad}(\Omega)$. Portanto, para todo

⁷Dizemos que a seqüência x_n converge fraco para x no espaço vetorial normado X (nota-se $x_n \xrightarrow{w} x$) quando $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para todo funcional linear limitado $f \in X'$. A conclusão do texto segue de um conhecido teorema da análise funcional: (veja demonstração em [Gr, Capítulo 3] ou [Leig, Capítulo 5]):

Teorema:[Banach–Alaoglu] Em todo espaço de Banach (de dimensão finita ou não) a bola unitária é fracamente compacta.

⁸Aqui usamos o fato da convergência fraca em $L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ de uma seqüência implicar na convergência pontual de uma subseqüência quase sempre.





$v \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} \langle v, y \rangle &= \lim_{l \rightarrow \infty} \langle v, y_l \rangle \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ \langle v, \Phi_A(t_1, t_0) z_0 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle v, \Phi_A(t_1, s) B(s) u_l(s) \rangle ds \right\} \\ &= \langle v, \Phi_A(t_1, t_0) z_0 \rangle + \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \langle B^*(s) \Phi_A(t_1, s)^* v, u_l(s) \rangle ds \\ &= \langle v, \Phi_A(t_1, t_0) z_0 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^*(s) \Phi_A(t_1, s)^* v, u(s) \rangle ds \\ &= \langle v, \{ \Phi_A(t_1, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s) B(s) u(s) ds \} \rangle. \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$y = \Phi_A(t_1, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s) B(s) u(s) ds \in R(\Omega; t_0, z_0, t_1).$$

Provando assim que $R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$ é fechado. O teorema de Heine-Borel garante que, em \mathbb{R}^n , ser compacto é equivalente a ser simultaneamente fechado e limitado, portanto $R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$ é compacto. A convexidade de $R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$ segue da representação afim de seus elementos em (3.11) e da convexidade de Ω . ■

Exemplo 39. Considere o sistema (A, B) com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

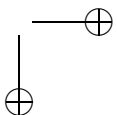
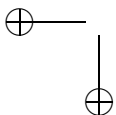
O sistema (A, B) é totalmente controlável, pois $\text{Po}(B|AB) = 2$. Logo, $R(\mathbb{R}^2; 0, z_0, T) = \mathbb{R}^2$ para todo $z_0 \in \mathbb{R}^2$. Escolha agora $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid |u| \leq r\}$, $z_0 = 0$ e $t_0 = 0$. Como a solução do sistema possui a representação

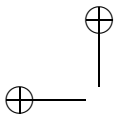
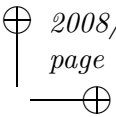
$$z(t) = \int_0^t e^{a(t-s)} u(s) ds,$$

podemos concluir que:

Se $a > 0$, então $R(\Omega; t_0, z_0, t_1) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq ra^{-1}(e^{at_1} - 1)\}$. Logo,

$$\bigcup_{T>0} R(\Omega; 0, z_0, T) = \mathbb{R}^2.$$





Se $a < 0$, então $R(\Omega; t_0, z_0, t_1) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq r|a|^{-1}(1 - e^{-at_1})\}$. Logo,

$$\bigcup_{T>0} R(\Omega; 0, z_0, T) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq |a|^{-1}r\}.$$

□

Este exemplo mostra que a investigação do fato de um determinado estado, em particular o estado $z = 0$, pertencer ao conjunto $R(\Omega; t_0, z_0, t_1)$ para algum $t_1 > t_0$ é relevante no que diz respeito à controlabilidade de um sistema. Esta questão é especialmente interessante quando observamos que 0 pode ser considerado como estado ideal a ser atingido.

Definição 40. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, o sistema autônomo (A, B) é denominado Ω -controlável ao zero em z_0 quando

$$0 \in R(\Omega; z_0) := \bigcup_{T>0} R(\Omega; 0, z_0, T).$$

□

No lema a seguir discutimos condições suficientes para obtermos a Ω -controlabilidade ao zero de sistemas de controle autônomos.

Lema 41. *Seja (A, B) um sistema de controle autônomo, totalmente controlável e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Se 0 é um ponto interior de Ω , então para todo $T > 0$ existe uma vizinhança V de 0 em \mathbb{R}^n tal que $0 \in R(\Omega; 0, z_0, T)$ para todo $z_0 \in V$.⁹*

Demonstração: Seja $T > 0$ e $V_T := \int_0^T e^{As} B B^* e^{A^*s} ds$. Defina $u \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^m)$, conforme o Teorema 34, por

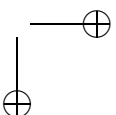
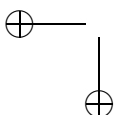
$$u(t) := -B^* e^{A^*(T-t)} V_T^{-1} e^{AT} z_0, \quad t \in [0, T].$$

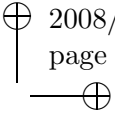
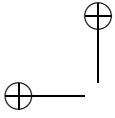
Este mesmo teorema nos garante que $(0, z_0) \xrightarrow{u} (T, 0)$. Como a aplicação $[0, T] \ni t \mapsto e^{-tA^*} \in \mathbb{R}^{n,n}$ é contínua e $[0, T]$ compacto, então existe uma constante $m > 0$ tal que

$$|u(s)| \leq m|z_0| \quad \text{para todo } [0, T] \text{ e todo } z_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Como $0 \in \text{Int}(\Omega)$, existe $R > 0$ tal que $B_R(0) \subset \Omega$. Definindo $\delta = Rm^{-1}$ e $V = B_\delta(0)$, temos que $|u(s)| \leq m\delta = R, \forall t \in [0, T], z_0 \in V$, i.e. $u(s) \in \Omega, \forall t \in [0, T], z_0 \in V$, provando o teorema. ■

⁹Adotamos a seguinte notação: $y \in \mathbb{R}^m$ é um ponto interior de Ω quando existe $r > 0$ tal que $B_r(0) := \{v \in \mathbb{R}^m \mid |v| \leq r\} \subset \Omega$. Um conjunto V é denominado vizinhança de $y \in \mathbb{R}^m$ quando existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset V$.





No teorema a seguir analisamos a relação entre a controlabilidade de um sistema autônomo e os autovalores da matriz do sistema.

Teorema 42. *Seja (A, B) um sistema autônomo e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ limitado. São válidas as afirmações:*

a) *Se 0 é um ponto interior de Ω , o sistema (A, B) é completamente controlável e existem constantes $m \geq 0$ e $\omega > 0$ tais que*

$$(3.12) \quad \|e^{At}\| \leq m e^{-\omega t}, \quad t \in [0, \infty),$$

então $0 \in R(\Omega; z_0)$ para todo $z_0 \in \mathbb{R}^n$;

b) *Se a matriz A possui um autovalor com parte real positiva, então existe $z_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \notin R(\Omega; z_0)$.*

Demonstração: Provamos primeiro a). Seja $T_1 > 0$. O Lema 41 nos garante a existência de uma vizinhança W de 0 tal que $0 \in R(\Omega; 0, w_0, T_1)$ para todo $w_0 \in W$. De (3.12) temos que, para todo $z_0 \in \mathbb{R}^n$, existe um T_2 (suficientemente grande) tal que $e^{AT_2} z_0 \in W$. Defina $w_0 := e^{AT_2} z_0$ e escolha a estratégia $u \in L^1([0, T_1]; \mathbb{R}^m)$ de forma que

$$(0, w_0) \xrightarrow{u} (T_1, 0).$$

Note agora que o controle \bar{u} definido por

$$\bar{u}(t) := \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq T_2 \\ u(t - T_2) & , T_2 \leq t \leq T_2 + T_1 \end{cases}$$

satisfaz $(0, z_0) \xrightarrow{\bar{u}} (T_1 + T_2, 0)$.

Provamos agora b). Seja $\lambda = \alpha + i\beta$ um autovalor de A^* com $\alpha > 0$ e $w = w_1 + iw_2$ o autovetor correspondente. Temos então

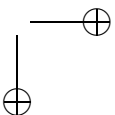
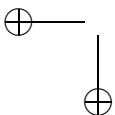
$$A^* w_1 + iA^* w_2 = (\alpha + i\beta)(w_1 + iw_2), \quad |w_1| + |w_2| \neq 0$$

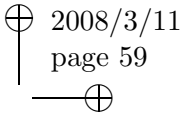
e portanto

$$A^* w_1 = \alpha w_1 - \beta w_2, \quad A^* w_2 = \beta w_1 + \alpha w_2.$$

Tome $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $q := \langle x, w_1 \rangle^2 + \langle x, w_2 \rangle^2 \neq 0$ e seja $u \in L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R}^m)$. A partir da solução z do sistema $z' = Az + Bu(t)$, $z(0) = x$, definimos a função

$$v(t) := \langle z(t), w_1 \rangle^2 + \langle z(t), w_2 \rangle^2, \quad t \in [0, \infty)$$





e obtemos para $t \geq 0$ a estimativa

$$\begin{aligned} v'(t) &= 2(\langle z'(t), w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle z'(t), w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle) \\ &= 2(\langle z(t), A^* w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle z(t), A^* w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle) \\ &\quad + 2(\langle Bu(t), w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle Bu(t), w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle) \\ &=: I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Da definição de w_1, w_2 obtemos agora $I_1(t) = 2\alpha v(t)$. Como Ω é limitado, temos ainda

$$\begin{aligned} |I_2(t)|^2 &= 4(\langle Bu(t), w_1 \rangle \langle z(t), w_1 \rangle + \langle Bu(t), w_2 \rangle \langle z(t), w_2 \rangle)^2 \\ &\leq 8(c_1 \langle z(t), w_1 \rangle^2 + c_2 \langle z(t), w_2 \rangle^2) \\ &\leq c^2 |v(t)|^2, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

onde a constante c independe de u e x . Logo,

$$|I_2(t)| \leq c \sqrt{v(t)}, \quad t \geq 0.$$

Podemos então afirmar que

$$v'(t) \geq \psi(v(t)), \quad t \geq 0,$$

onde $\psi(s) := 2\alpha s - c\sqrt{s}$, $s \in \mathbb{R}$. Como $\psi(s) > 0$ para $s > (\frac{c}{2\alpha})^2 =: s_0$, temos que v é monótona crescente caso a escolha de x satisfaça $v(0) > s_0$.¹⁰ Neste caso a estratégia u não poderá satisfazer $(0, x) \xrightarrow{u} (T, 0)$ para nenhum $T > 0$. Como $u \in L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R}^m)$ foi escolhido de forma arbitrária, concluímos que para este x certamente $0 \notin R(\Omega; x)$. O caso real $\beta = 0$ é demonstrado de forma análoga. ■

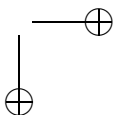
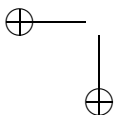
Note que a condição imposta em (3.12) no Teorema 42 é equivalente a exigir que a matriz A possua apenas autovalores negativos.

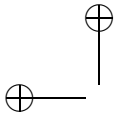
Exemplo 43. Considere o sistema de controle obtido da EDO

$$z^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{(j)} = u.$$

Como sabemos, este sistema é totalmente controlável se tomamos $\Omega = \mathbb{R}$ (veja Exemplo 31). Escolha agora como conjunto de controle $\Omega := [-\omega, \omega] \subset \mathbb{R}$. Caso o polinômio característico do sistema acima possua apenas raízes com parte real negativa, podemos concluir que o sistema de controle associado a EDO é Ω -controlável ao zero. □

¹⁰Se não for esse o caso, podemos sempre substituir x por um múltiplo seu adequado, uma vez que c e α (e portanto c_0) independem de x .





3.7 Princípio do Bang–Bang e Problemas de Tempo Mínimo

Como na secção anterior, continuamos discutindo problemas com restrição às variáveis de controle. Estamos particularmente interessados na classificação dos problemas que são solucionados por controles do tipo Bang–Bang, i.e. controles $u \in U_{ad}(\Omega)$ que satisfazem $u(t) \in \partial\Omega$ quase sempre.

Considere o sistema escalar de controle

$$(3.13) \quad z' = A(t)z + b(t)u, \quad z(t_0) = z_0,$$

com funções matriciais $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$, $b \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. O conjunto dos controles admissíveis é

$$U_{ad}(\Omega) := \{u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mensurável}; u(t) \in \Omega \text{ q.s.}\},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é convexo e compacto. Como vimos na Secção A.3, a solução do sistema (3.13) é dada por

$$z(t) = Z(t)Z^{-1}(t_0)z_0 + Z(t) \int_{t_0}^t Z^{-1}(s)b(s)u(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Definindo agora o conjunto

$$S(\Omega; t_0, t) := \left\{ \int_{t_0}^t Z^{-1}(s)b(s)u(s) ds \mid u \in U_{ad}(\Omega) \right\} \subset \mathbb{R}^n,$$

temos que $R(\Omega; t_0, z_0, t) = Z(t)z_0 + Z(t)S(\Omega; t_0, t)$, ou ainda

$$S(\Omega; t_0, t) = Z^{-1}(t)R(\Omega; t_0, z_0, t) - z_0.$$

Portanto, $z_0 \in R(\Omega; t_0, z_0, t)$ se e somente se $[Z^{-1}(t)z - z_0] \in S(\Omega; t_0, t)$.

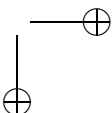
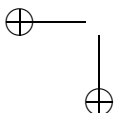
Seguindo a notação da Secção 3.6, definimos o conjunto dos controles de Bang–Bang

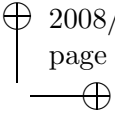
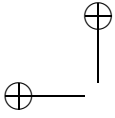
$$U_{bb}(\Omega) := \{u \in U_{ad}(\Omega) \mid u(t) \in \partial\Omega \text{ q.s.}\}$$

e o conjunto dos estados atingíveis por esse tipo de estratégia de controle

$$R_{bb}(\Omega; t_0, z_0, t) := \{z_1 \in \mathbb{R}^n \mid (t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1) \text{ para algum } u \in U_{bb}(\Omega)\}.$$

Antes de formular o resultado principal desta secção, necessitamos de um lema auxiliar um tanto quanto técnico.





Lema 44. *Dado $t \in [t_0, t_1]$, a aplicação*

$$I : L^\infty([t_0, t]; \mathbb{R}) \ni u \longmapsto \int_{t_0}^t Z^{-1}(s)b(s)u(s) ds \in \mathbb{R}^n$$

é linear e contínua, quando definida entre $U_{ad}(\Omega)$, com a topologia fraca, e o \mathbb{R}^n , com topologia usual.*

Demonstração: A linearidade segue imediatamente da definição de I . Para provar a continuidade, usamos o seguinte fato:¹¹ em $U_{ad}(\Omega)$, $u_n \xrightarrow{w^*} u$ se e somente se

$$\int_{t_0}^t y(s)u_n(s) ds \longrightarrow \int_{t_0}^t y(s)u(s) ds, \quad \forall y \in L^1([t_0, t]; \mathbb{R}).$$

Como $Z^{-1}(s)b(s) \in L^1([t_0, t]; \mathbb{R})$, o lema fica provado. ■

Apresentamos a seguir o resultado conhecido na literatura como *princípio do Bang-Bang*.

Teorema 45. *Para qualquer $t \in [t_0, t_1]$, temos $R(\Omega; t_0, z_0, t) = R_{bb}(\Omega; t_0, z_0, t)$.*

Demonstração: Obviamente $R_{bb}(\Omega; t_0, z_0, t) \subset R(\Omega; t_0, z_0, t)$. Para provar a inclusão contrária é suficiente verificar que, para todo $z \in S(\Omega; t_0, t)$, existe $\bar{u} \in U_{bb}(\Omega)$ tal que $z = I(\bar{u})$. De fato, dado $z \in R(\Omega; t_0, z_0, t)$, definimos $\tilde{z} := Z^{-1}(t)z - Z^{-1}(t_0)z_0 \in S(\Omega; t_0, t)$. Logo, existe $\bar{u} \in U_{bb}(\Omega)$ tal que $\tilde{z} = I(\bar{u})$, de onde segue que

$$z = Z(t)Z^{-1}(t_0)z_0 + Z(t)\tilde{z} = \Phi_A(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, s)b(s)\bar{u}(s) ds,$$

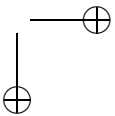
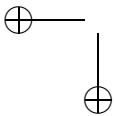
provando que $z \in R_{bb}(\Omega; t_0, z_0, t)$.

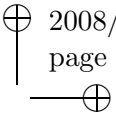
Seja portanto $z \in S(\Omega; t_0, t)$. Defina o conjunto M como a imagem inversa de z por I , isto é,

$$M := I^{-1}(\{z\}) \cap U_{ad}(\Omega) = \{u \in U_{ad}(\Omega) \mid I(u) = z\}.$$

M é o subconjunto dos controles admissíveis que garantem a inclusão de z em $S(\Omega; t_0, t)$. Basta provar então que existe $\bar{u} \in M \cap U_{bb}(\Omega)$.

¹¹Tal fato se justifica pela topologia fraca* ser metrizável em subconjuntos limitados de $L^\infty([t_0, t]; \mathbb{R})$.





Note que $S(\Omega; t_0, t)$ é convexo e compacto por ser uma translação afim de $R(\Omega; t_0, z_0, t)$ (veja Teorema 38). O Lema 44 garante então que $M \subset L^\infty([t_0, t], \mathbb{R})$ é compacto e convexo na topologia fraca*. O teorema de Krein–Milman nos permite concluir que M possui um ponto extremo,¹² que denominamos \bar{u} . Provamos a seguir que $\bar{u}(t) \in \partial\Omega$ q.s. em $[t_0, t]$.

Da hipótese, segue que Ω é um intervalo do tipo $[a, b]$, com $a, b < \infty$. Suponha por contradição que $\bar{u}(t) \notin \partial\Omega = \{a, b\}$ q.s. em $[t_0, t]$. Então, existe $E \subset [a, b]$ de medida (de Lebesgue) positiva tal que $\bar{u}(s) \in (a, b)$, para todo $s \in E$. Definindo agora

$$E_k := \{s \in E \mid \bar{u}(s) \in (a + k^{-1}, b - k^{-1})\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

temos $E = \cup_{k=1}^\infty E_k$. Logo, ao menos um dos E_k possui medida positiva, de modo que existe $\varepsilon > 0$ e $F \subset E$ de medida não nula tais que

$$\bar{u}(s) \in (a + \varepsilon, b - \varepsilon), \quad s \in F.$$

Como a medida de F é positiva, temos que $\text{Dim}[L^\infty(F; \mathbb{R})] = \infty$. Logo, a aplicação

$$I_F : L^\infty(F; \mathbb{R}) \ni v \longmapsto \int_F Z^{-1}(s)b(s)v(s) ds \in \mathbb{R}^n$$

não pode ser injetiva (por que?). Portanto, é possível escolher $v \in L^\infty(F; \mathbb{R})$ com $v \in \text{Ke}(I_F)$ e $v \not\equiv 0$ em F . Estendendo trivialmente v ao intervalo $[t_0, t]$, obtemos

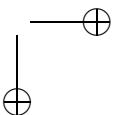
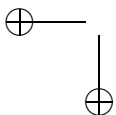
$$\bar{v} := \begin{cases} v(s), & s \in F \\ 0, & s \in [t_0, t]/F, \end{cases}$$

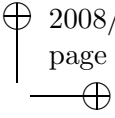
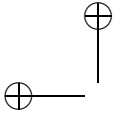
que satisfaz $I(\bar{v}) = 0$. Dividindo (se necessário) por uma constante, temos $|\bar{v}(s)| \leq 1$ q.s. em $[t_0, t]$. Logo, $a \leq \bar{u}(s) \pm \varepsilon\bar{v}(s) \leq b$ q.s., de modo que $\bar{u} \pm \varepsilon\bar{v} \in U_{ad}(\Omega)$. A linearidade de I implica em $I(\bar{u} \pm \varepsilon\bar{v}) = I(\bar{u}) = z$, provando que $\bar{u} \pm \varepsilon\bar{v} \in M$. Entretanto, isso contradiz o fato de \bar{u} ser um ponto extremo de M , pois

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \varepsilon\bar{v}) + \frac{1}{2}(\bar{u} - \varepsilon\bar{v}).$$

■

¹²Um ponto é denominado extremo de um conjunto quando não pode ser escrito como combinação linear convexa de dois outros pontos do conjunto. Para detalhes sobre o teorema de Krein–Milman consulte [Heu].





Na seqüência analisamos uma família particular de problemas de controle ótimo, que tem como característica o fato da função objetivo depender unicamente do tempo final. Tais problemas são denominados *problemas de tempo mínimo* (veja [HeLa], [Leig]).

Dadas as funções matriciais $A \in C([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n,n})$, $b \in C([t_0, \infty); \mathbb{R}^n)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$ convexo e compacto, considere o seguinte problema de controle escalar:

$$(P_{Tmin}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } t_1 \\ \text{sujeito a} \\ z' = A(t)z + b(t)u(t); \\ z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1; u \in U_{ad}(\Omega); \end{cases}$$

onde $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$ são dados e o conjunto dos controles admissíveis é definido por

$$U_{ad}(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}([t_0, \infty); \mathbb{R}) \mid u(t) \in \Omega \text{ q.s.}\},$$

Observe que o tempo final t_1 não é fixado e diferentes controles admissíveis podem atingir a condição de contorno final em diferentes intervalos de tempo. Este é um problema especial de controle ótimo com tempo final variável, em que a função objetivo $\int_{t_0}^{t_1} f(t, z, z') dt$ é da forma $f \equiv 1$.

A fim de garantir a existência de soluções para o problema (P_{Tmin}) (veja o Teorema 46), fazemos a seguinte hipótese sobre a controlabilidade do sistema (A, B) :

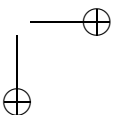
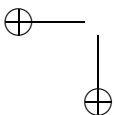
H) Existem $t_1 \geq t_0$ e $u \in U_{ad}(\Omega)$ tais que a trajetória correspondente z^u satisfaz $z^u(t_1) = z_1$.

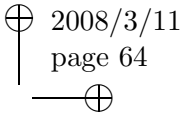
Note que a hipótese *H)* garante que o conjunto limitado inferiormente \mathcal{T} definido por

$$\mathcal{T} := \{t_1 \geq t_0 \mid \exists u \in U_{ad}(\Omega) \text{ com } z^u(t_1) = z_1\}$$

é não vazio. O candidato natural à solução de (P_{Tmin}) é formado pelo par (\bar{t}, \bar{u}) , onde $\bar{t} := \inf\{t_1 \in \mathcal{T}\}$ e \bar{u} é o controle correspondente.

Teorema 46. *Se a hipótese H) é válida, então existe um controle admissível $\bar{u} \in U_{ad}(\Omega)$ tal que o estado correspondente \bar{z} satisfaz $\bar{z}(\bar{t}) = z_1$, onde $\bar{t} := \inf\{t_1 \in \mathcal{T}\}$.*





Demonstração: Seja t_n uma seqüência minimal, i.e. $t_n \downarrow \bar{t}$ e $u_n \in U_{ad}(\Omega)$ uma seqüência de controles de modo que os estados correspondentes satisfaçam $z_n(t_n) = z_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da identidade¹³

$$\begin{aligned} z_n(t_n) - z_n(\bar{t}) &= \Phi_A(t_n, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t_n} \Phi_A(t_n, s)b(s)u_n(s) ds \\ &\quad - \Phi_A(\bar{t}, t_0)z_0 - \int_{t_0}^{\bar{t}} \Phi_A(\bar{t}, s)b(s)u_n(s) ds, \end{aligned}$$

obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} |z_1 - z_n(\bar{t})| &= |z_n(t_n) - z_n(\bar{t})| \\ &\leq |\Phi_A(t_n, t_0)z_0 - \Phi_A(\bar{t}, t_0)z_0| \\ &\quad + |Z(t_n) - Z(\bar{t})| \int_{t_0}^{\bar{t}} |Z^{-1}(s)b(s)u_n(s)| ds \\ (3.14) \quad &\quad + |Z(t_n)| \int_{\bar{t}}^{t_n} |Z^{-1}(s)b(s)u_n(s)| ds. \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos do lado direito de (3.14) convergem a zero quando $n \rightarrow \infty$, devido à continuidade de $Z(t)$. O terceiro termo em (3.14) é limitado por

$$\|Z(t_n)\| \int_{\bar{t}}^{t_n} c |Z^{-1}(s)b(s)| ds,$$

pois $u_n(t) \in \Omega$ q.s., que é convexo e compacto por hipótese. Portanto, este termo também converge a zero quando $n \rightarrow \infty$. Provamos assim que $z_n(\bar{t}) \rightarrow z_1$. Logo, $z_1 \in \overline{R}(\Omega; t_0, z_0, \bar{t})$. Como $R(\Omega; t_0, z_0, \bar{t})$ é compacto (veja Teorema 38), temos que $z_1 \in R(\Omega; t_0, z_0, \bar{t})$, o que implica na existência de um $\bar{u} \in U_{ad}(\Omega)$ satisfazendo

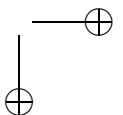
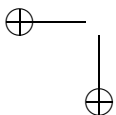
$$(t_0, z_0) \xrightarrow{\bar{u}} (\bar{t}, z_1).$$

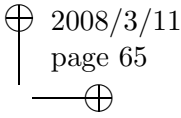
■

Corolário 47. *Se a hipótese H) é válida, então existe um controle ótimo do tipo bang–bang. Caso exista um único controle ótimo, ele é necessariamente do tipo bang–bang.*

Demonstração: Segue diretamente dos Teoremas 45 e 46. ■

¹³Para detalhes sobre notação veja a Secção A.3.





Condições necessárias e/ou suficientes para existência e unicidade de controles bang–bang são discutidas em [Kra, Capítulo 3].

O Lema 44 e os Teoremas 45 e 46 continuam válidos para controles não escalares $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ q.s. e sistemas gerais da forma $z' = A(t)z + B(t)u(t)$, com B contínua. As demonstrações destes resultados são análogas às aqui apresentadas.

Em [AtFa] são discutidas diversas aplicações relacionadas com tempo mínimo, como o oscilador harmônico, o oscilador harmônico amortecido, cinemática sem atrito (Double-integral plants). Também são discutidos problemas de consumo mínimo de combustível, que se assemelham aos problemas de tempo mínimo e possuem soluções do tipo bang-bang.

Problemas de tempo mínimo para sistemas não lineares de primeira e segunda ordem são também discutidos em [LeMa] e [Fö2]. Este último baseia sua argumentação em um resultado devido a A. Feldbaum (1962). Particularmente interessante é o problema de asfaltamento de uma rua, discutido (em detalhes) em [Fö2, capítulo 7].

3.8 Controlabilidade de Sistemas Lineares Discretos

Tratamos agora dos sistemas de controle discretos, em particular os autônomos. Um sistema autônomo discreto de controle (A, B) é representado pelas equações

$$(3.15) \quad z_{k+1} = A z_k + B u_k, \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,m}$. Seguindo a definição feita para sistemas contínuos, dizemos que o sistema discreto em (3.15) é *completamente controlável* quando, para todo par de estados $x_0, x_N \in \mathbb{R}^n$, existe uma estratégia de controle $u = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{mN}$ que satisfaz

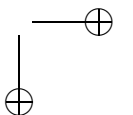
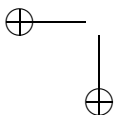
$$(3.16) \quad z_{k+1} = A z_k + B u_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad z_0 = x_0, \quad z_N = x_N.$$

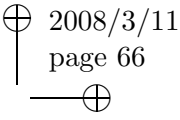
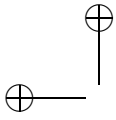
Quando uma estratégia de controle u satisfaz (3.16), utilizamos a notação

$$(0, x_0) \xrightarrow{u} (N, x_N).$$

De (3.16) obtemos uma representação para z_N em função de z_0 e de u :

$$x_N = A^N x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B u_i,$$





a qual nos fornece uma importante relação para identificar a controlabilidade do sistema discreto em (3.15):

$$(3.17) \quad x_N - A^N x_0 = S(A, B) u, \quad \text{onde } S(A, B) = (A^{N-1} B | \dots | AB | B).$$

Teorema 48. *Seja (A, B) um sistema discreto de controle e $S(A, B)$ a matriz definida em (3.17). Se a condição de posto*

$$(3.18) \quad \text{Po}(S(A, B)) = \text{Po}(A^{n-1} B | \dots | AB | B) = n$$

é satisfeita, então o controle $u \in \mathbb{R}^{mN}$ definido por

$$(3.19) \quad u := S(A, B)^* (S(A, B) S(A, B)^*)^{-1} (x_N - A^N x_0)$$

é tal que $(0, x_0) \xrightarrow{u} (N, x_N)$.

Demonstração: Basta verificar que o controle u em (3.19) satisfaz a equação (3.17). De fato, $S(A, B) S(A, B)^*$ é não singular por hipótese e de (3.19) segue que

$$\begin{aligned} S(A, B) u &= S(A, B) S(A, B)^* (S(A, B) S(A, B)^*)^{-1} (x_N - A^N x_0) \\ &= x_N - A^N x_0. \end{aligned}$$

■

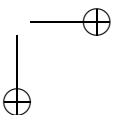
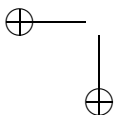
A matriz $S(A, B)^\dagger := S(A, B)^* (S(A, B) S(A, B)^*)^{-1}$ é conhecida como *pseudo inversa* (ou inversa de Moore–Penrose) de $S(A, B)$.¹⁴ Utilizando multiplicadores de Lagrange é possível verificar que o controle definido em (3.19) é a solução do problema de controle ótimo discreto:

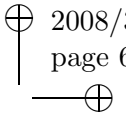
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \sum_{j=0}^{N-1} |u_j|^2 \\ \text{sujeito a} \\ u_j \in \mathbb{R}^m, \quad j = 0, \dots, N-1; \\ z_{k+1} = Az_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N-1; \\ z_0 = x_0, \quad z_N = x_1. \end{array} \right.$$

Conseguimos assim resolver o problema de controle discreto (3.15) para uma importante classe de sistemas: aqueles que satisfazem a condição de posto (3.18). Entretanto, a aplicação

$$S(A, B) \longmapsto S(A, B)^\dagger,$$

¹⁴Para detalhes veja [Gr, Capítulo 5], ou ainda [Bar, Capítulo 6].





que leva uma matriz em sua inversa generalizada, não é numericamente estável. Este fato torna esta estratégia de calcular a estratégia de controle muitas vezes inviável na prática.

Observação 49 (Controlabilidade de sistemas não lineares). Encerramos este capítulo mencionando uma importante área de pesquisa atual relacionada a sistemas não lineares. Resultados de controlabilidade local podem ser obtidos através da utilização de técnicas de linearização de sistemas [So]. Além disso, utilizando os conceitos de álgebras de Lie de campos vetoriais e de distribuições (no sentido da geometria diferencial), é possível obter um poderoso resultado (critério de integrabilidade de Frobenius) que garante que uma distribuição de posto constante é completamente integrável se, e somente se, for involutiva [So, Capítulo 4]. \square

Exercícios

3.1. Dado o sistema (A, B) com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

mostre que para todo $u \in \mathbb{R}$ a solução do sistema

$$z' = Az + b(t)u, \quad z(0) = 0$$

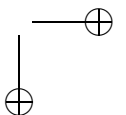
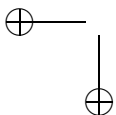
está na superfície $z_1 \sin t - z_2 \cos t = 0$. Conclua daí que o sistema não é controlável em $[0, t_1]$ para qualquer $t_1 > 0$.

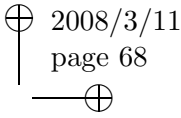
3.2. Mostre que se uma matriz A possui dois ou mais autovetores linearmente independentes associados ao mesmo autovalor, então o sistema com controle escalar $z' = Az + bu$ não é controlável.

3.3. Considere o sistema (A, B) com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Mostre que (A, B) não é controlável.
- b) Encontre o subespaço não controlável do sistema.





3.4. Seja A uma matriz simétrica com autovalores $\{\lambda_j\}_{j=1}^p$ e autovetores $\{v_{j,k}\}_{k=1}^{n_j}$, onde n_j é a multiplicidade de λ_j , $j = 1, \dots, p$ (note que $n_1 + \dots + n_p = n$). Seja B a matriz formada pelas colunas b_1, \dots, b_m . Mostre que o sistema (A, B) é controlável sse

$$P_o \begin{pmatrix} \langle b_1, v_{j,1} \rangle & \cdots & \langle b_m, v_{j,1} \rangle \\ \langle b_1, v_{j,2} \rangle & \cdots & \langle b_m, v_{j,2} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle b_1, v_{j,n_j} \rangle & \cdots & \langle b_m, v_{j,n_j} \rangle \end{pmatrix} = n_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

3.5. Conclua do exercício anterior que, para o sistema (A, B) ser controlável, é necessário que a dimensão da variável de controle seja maior que todos os n_j , i.e. $m \geq n_j$ para $j = 1, \dots, p$.

3.6. Verifique a controlabilidade do sistema (A, B) com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre $u \in L^1([0, 1]; \mathbb{R})$ tal que $(0, 0) \xrightarrow{u} (1, e^2)$.

3.7. Seja (A, B) um sistema autônomo com $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$.

a) Mostre que (A, B) é controlável em $[0, T]$ para todo $T > 0$ se e somente se $\mathbb{R}^n = M_0 + \dots + M_{n-1}$, onde $M_j := \text{Im}(A^j B)$, $j = 1, \dots, n-1$.

b) Sejam $F \in \mathbb{R}^{n,n}$, $G \in \mathbb{R}^{m,m}$, com $\det(F) \neq 0$, $\det(G) \neq 0$. Mostre que, se (A, B) é controlável em $[0, T]$, então o sistema $(F^{-1}AF, F^{-1}BG)$ é também controlável em $[0, T]$.

3.8. Considere um sistema de controle (A, B) com funções matriciais $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$, $B \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,m})$. Dado $z_1 \in \mathbb{R}^n$, prove que são equivalentes as afirmações:

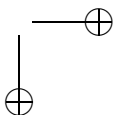
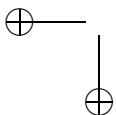
a) Existe $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ tal que $(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1)$;

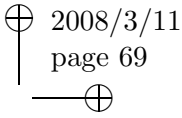
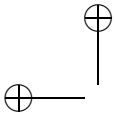
b) $z_1 \in \text{Im}(Z(t_0, t_1))$, onde

$$Z(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s) B(s) B(s)^* \Phi_A(t_1, s)^* ds.$$

Se o sistema (A, B) é autônomo, mostre ainda que $\text{Im}(Z(t_0, t_1)) = \text{Im}(SS^*)$, onde

$$S := (B|AB|\dots|A^{n-1}B).$$





EXERCÍCIOS

3.9. Complete os detalhes da demonstração do Teorema 26.

3.10. Considere um sistema autônomo (A, B) , com $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$.

a) Prove que (A, B) é controlável em $[0, T]$, para todo $T > 0$, se e somente se para todo $w \in \mathbb{C}^n$ autovetor de A^* vale $B^*w \neq 0$ (*critério de Hautus (1969)*; veja [So]).

b) Prove que (A, B) é controlável em $[0, T]$, para todo $T > 0$, se e somente se

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=0}^{n-1} M_j, \text{ onde } M_j := \text{Im}(A^j B), j = 0, \dots, n-1.$$

c) Dadas matrizes regulares $F \in \mathbb{R}^{n,n}$, $G \in \mathbb{R}^{m,m}$, mostre que, se (A, B) é controlável em $[0, T]$, então $(F^{-1}AF, F^{-1}BG)$ é também controlável em $[0, T]$.

3.11. Dado o sistema (A, B) com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

encontre uma base para o conjunto de estados atingíveis $R(\Omega; 0)$ para $\Omega = \mathbb{R}^m$. (veja Definição 40)

3.12. Verifique se os sistemas a seguir são Ω -controláveis ao zero:

a) $z'' + z' + z = u; \Omega = [-1, 1]$;

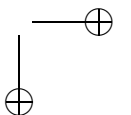
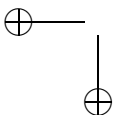
b) $z'' = u; \Omega = [-1, 1]$.

3.13. Verifique a controlabilidade do sistema no Exemplo 31.

3.14. [Piloto automático]¹⁵ Suponha que um avião voa com velocidade constante c (relativa ao solo). Sejam ϕ e α os ângulos que o eixo do avião faz com a horizontal e com a trajetória do avião respectivamente (veja Figura 3.1). A altitude do avião no tempo t é denotada por $h(t)$. Se os ângulos α e ϕ são pequenos, o deslocamento vertical do avião é modelado pelo sistema não linear

$$\alpha' = a(\phi - \alpha), \quad \phi'' = -\omega^2(\phi - \alpha - bu), \quad h' = c \alpha,$$

¹⁵Este problema é também considerado também em [So] e [Tr].



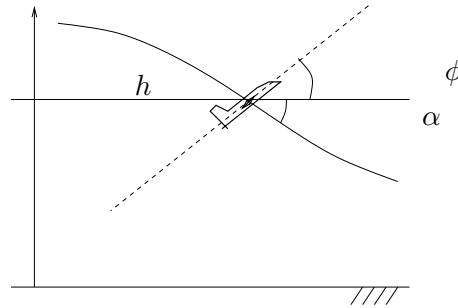
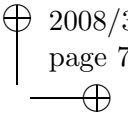
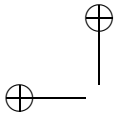


Figura 3.1: Piloto automático para controle de altitude

onde a, b, c são constantes conhecidas e u corresponde ao controle do sistema (leme de profundidade). Mostre que o sistema é totalmente controlável.

3.15. Considere um sistema de controle (A, B) com funções matriciais $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$ e $B \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,m})$. Suponha que U_{ad} é um subespaço denso de $L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$. Dado $z_1 \in \mathbb{R}^m$, prove que são equivalentes as afirmações:

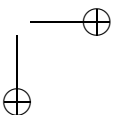
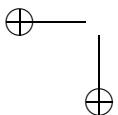
- a) Existe $u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ tal que $(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1)$;
- b) Existe $u \in U_{ad}$ tal que $(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, z_1)$;

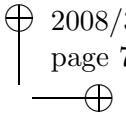
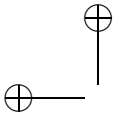
3.16. É um fato conhecido da teoria dos espaços L^p que o conjunto das funções C^∞ com suporte compacto em $[t_0, t_1]$, definido por

$$C_0^\infty([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) := \{v \in C^\infty([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) \mid v^{(j)}(t_0) = v^{(j)}(t_1) = 0, \\ j = 1, 2, \dots\},$$

é denso em $L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$. Como a equivalência do Exercício 3.15 se deixa interpretar à luz deste resultado?

3.17. Calcule o controle ótimo \bar{u} para o problema proposto no Exemplo 36.





Capítulo 4

Estabilidade

Estudamos neste capítulo o comportamento em períodos *longos* de tempo das soluções de sistemas autônomos de equações diferenciais ordinárias (EDO's). O principal interesse está em determinar se uma solução (trajetória) permanece ou não limitada e, em caso afirmativo, se esta converge assintoticamente para algum ponto de equilíbrio.

Na Secção 4.1 é definido o conceito de estabilidade de um ponto de equilíbrio. Na Secção 4.2 são discutidas condições necessárias e suficientes para estabilidade de sistemas lineares autônomos. A Secção 4.3 se destina a analisar um critério algébrico (teorema de Hurwitz) para garantir estabilidade de matrizes. Na Secção 4.4 consideramos sistemas obtidos por *perturbações* de sistemas lineares estáveis. As Secções 4.5 e 4.6 tratam do critério de estabilidade formulado por Lyapunov. Na Secção 4.7 aplicamos o critério de Lyapunov a sistemas lineares discretos.

4.1 Conceito e Exemplos

Considere a equação diferencial ordinária

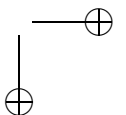
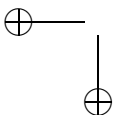
$$(4.1) \quad z' = f(z),$$

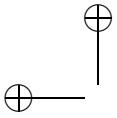
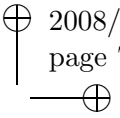
em que o campo vetorial f satisfaz as seguintes condições:

$$(4.2) \quad \bullet \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto};$$

$$(4.3) \quad \bullet \quad 0 \in D, \quad f(0) = 0;$$

$$(4.4) \quad \bullet \quad f \text{ é continuamente diferenciável em } D.$$





Como o sistema é autônomo, i.e. o campo vetorial f não depende explicitamente do tempo, podemos sem perda de generalidade estudar as soluções a partir do instante de tempo $t_0 = 0$. A hipótese (4.4) garante, para toda condição inicial $z_0 \in \mathbb{R}^n$, a existência de uma solução local para o problema de valor inicial (PVI):

$$(4.5) \quad z' = f(z), \quad z(0) = z_0.$$

Essa solução pode ser prolongada a um *intervalo máximo de existência*, o qual é aqui representado por¹

$$J(z_0) = [0, \omega(z_0)).$$

Nesse intervalo a solução é unicamente determinada. Este resultado é consequência do teorema de Picard–Lindelöf.² A chave para esse resultado é considerar a equação integral associada ao PVI (4.5)

$$z(t) = z_0 + \int_0^t f(z(s)) \, ds, \quad t \in [0, \tau],$$

no espaço $C([0, \tau]; \mathbb{R}^n)$, onde $\tau > 0$ é escolhido de forma adequada. Representamos esta *solução maximal* por $z(\cdot, z_0)$.

A condição (4.3) garante que 0 é um *ponto de equilíbrio* do sistema, pois o PVI com condição inicial $z_0 = 0$ possui apenas a solução $z(\cdot, z_0) \equiv 0$ (repouso). Note que a escolha de 0 como ponto de equilíbrio não é restritiva, uma vez que é sempre possível (através de translações) alterar um campo vetorial de forma a atingir esta configuração, desde que o campo possua apenas um zero.³

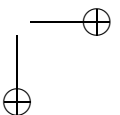
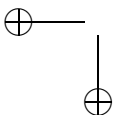
¹Estamos interessados apenas no futuro.

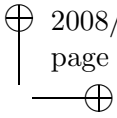
²Maiores detalhes na literatura especializada em EDO; por exemplo [Sot] ou [Wa2].

³Na definição a seguir e no resto do texto adotamos a seguinte notação: Para $r \geq 0$, temos

$$B_r(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |x - v| < r\}, \quad \bar{B}_r(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |x - v| \leq r\},$$

$$B_r = B_r(0), \quad \bar{B}_r = \bar{B}_r(0).$$





Definição 50. O ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ do sistema (4.1) é denominado *estável* quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tq } z_0 \in B_\delta(\bar{z}) \implies J(z_0) = [0, \infty) \\ \text{ e } z(t, z_0) \in B_\varepsilon \forall t \geq 0;$$

é denominado *atrativo* quando:

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } z_0 \in B_\delta(\bar{z}) \implies J(z_0) = [0, \infty) \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} z(t, z_0) = 0;$$

é denominado *assintoticamente estável* quando é simultaneamente estável e atrativo. \square

Exemplo 51. Considere o problema do pêndulo não linear modelado pela equação diferencial

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

O sistema correspondente é:

$$z' = f(z) \text{ com } f(z) := \begin{pmatrix} z_2 \\ -\sin z_1 \end{pmatrix},$$

cujos campo vetorial é mostrado na Figura 4.1.

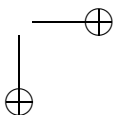
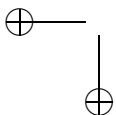
É de simples verificação o fato dos pontos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \pm k\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

serem pontos de equilíbrio do sistema. Através de uma translação, o ponto de equilíbrio $(\pi, 0)$ pode ser levado na origem e então analisado no sentido da Definição 50. É intuitivamente claro que os pontos de equilíbrio $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ são de natureza diferente. Sem entrar em detalhes, comentamos por hora que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável, enquanto que $(\pi, 0)$ não o é. \square

Exemplo 52. Consideremos agora o conhecido sistema não linear de Lorenz:

$$(4.6) \quad z' = f(z) \text{ com } f(z) = \begin{pmatrix} s(z_2 - z_1) \\ rz_1 - z_2 - z_1z_3 \\ z_1z_2 - bz_3 \end{pmatrix},$$



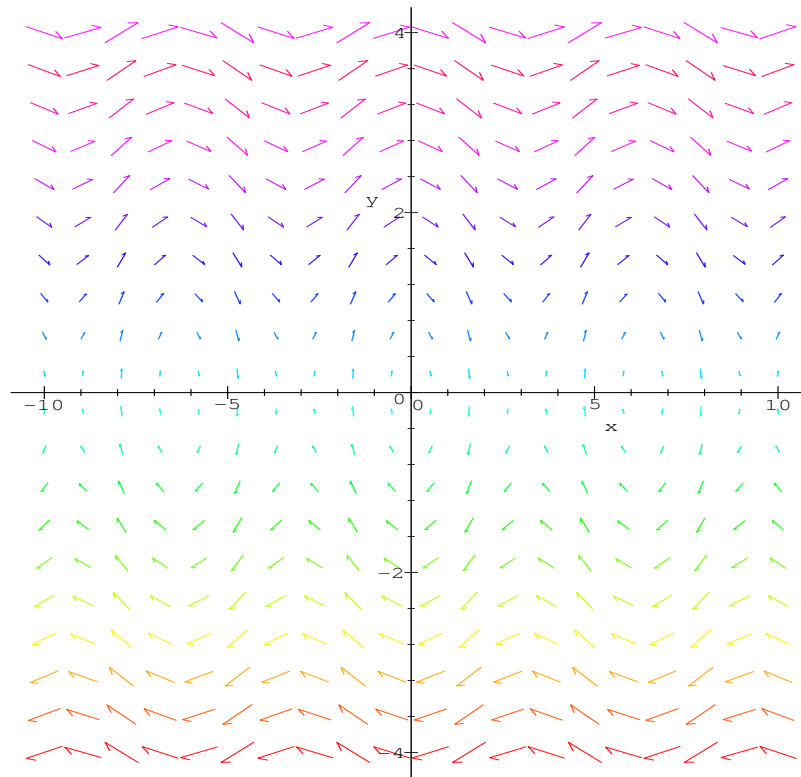
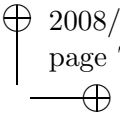
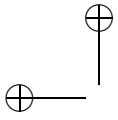


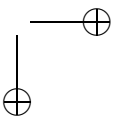
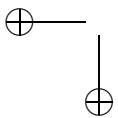
Figura 4.1: Campo vetorial de $x'' + \sin x = 0$

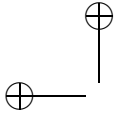
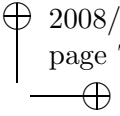
onde s , r e b são constantes positivas. Este sistema foi utilizado por Lorenz como modelo de dimensão finita para um fenômeno físico (a convecção de Rayleigh–Bénard).

Em particular, a escolha dos parâmetros $s = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$ gera um atrator estranho, que foi observado numericamente e tem sido objeto intensivo de estudo de vários grupos de pesquisadores.⁴ Para $r > 1$, o sistema possui três pontos de equilíbrio:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}.$$

⁴Maiores detalhes por exemplo em [Je].





A estabilidade destes 3 pontos de equilíbrio pode ser analisada quando conhecemos um pouco melhor a aproximação linear do campo vetorial. É possível assim, verificar de forma clara a natureza instável do sistema. □

Observação 53. É importante observar que a atratividade não implica, em geral, na estabilidade assintótica. Um exemplo é encontrado no sistema não linear

$$\begin{cases} x' = (x^2(y - x) + y^5) / (x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2) \\ y' = y^2(y - 2x) / (x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2) \end{cases}$$

cuja dinâmica é ilustrada na Figura 4.2. Entretanto, para sistemas autônomos, as definições de atratividade e estabilidade assintótica são equivalentes. Tal fato é analisado na próxima seção. Sistemas estáveis mas não atrativos são mais fáceis de ser encontrados. Considere, por exemplo, $f(z) = Az$, onde A corresponde à matriz de rotação pelo ângulo de $\pi/2$. □

4.2 Estabilidade de Sistemas Lineares

Analisamos nesta seção o importante caso particular do sistema (4.1) em que a dinâmica do sistema é descrita pela equação

$$(4.7) \quad z' = Az,$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. O objetivo principal é esclarecer a questão da estabilidade do ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$. Neste caso é usual referirmo-nos ao sistema (4.7) como sistema estável.

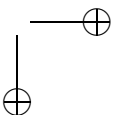
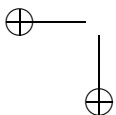
Teorema 54. *Seja o sistema (4.7). São equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) O ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é assintoticamente estável;
- b) O ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é atrativo;
- c) $\max\{Re(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } A\} < 0$.

Demonstração: a) \implies b) Segue imediatamente da Definição 50.

b) \implies c) Suponha que A possui um autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$ com $\alpha \geq 0$. Se v é um autovetor correspondente, definimos através de

$$z(s) := \operatorname{Re}(e^{\lambda s}v), \quad s \geq 0$$



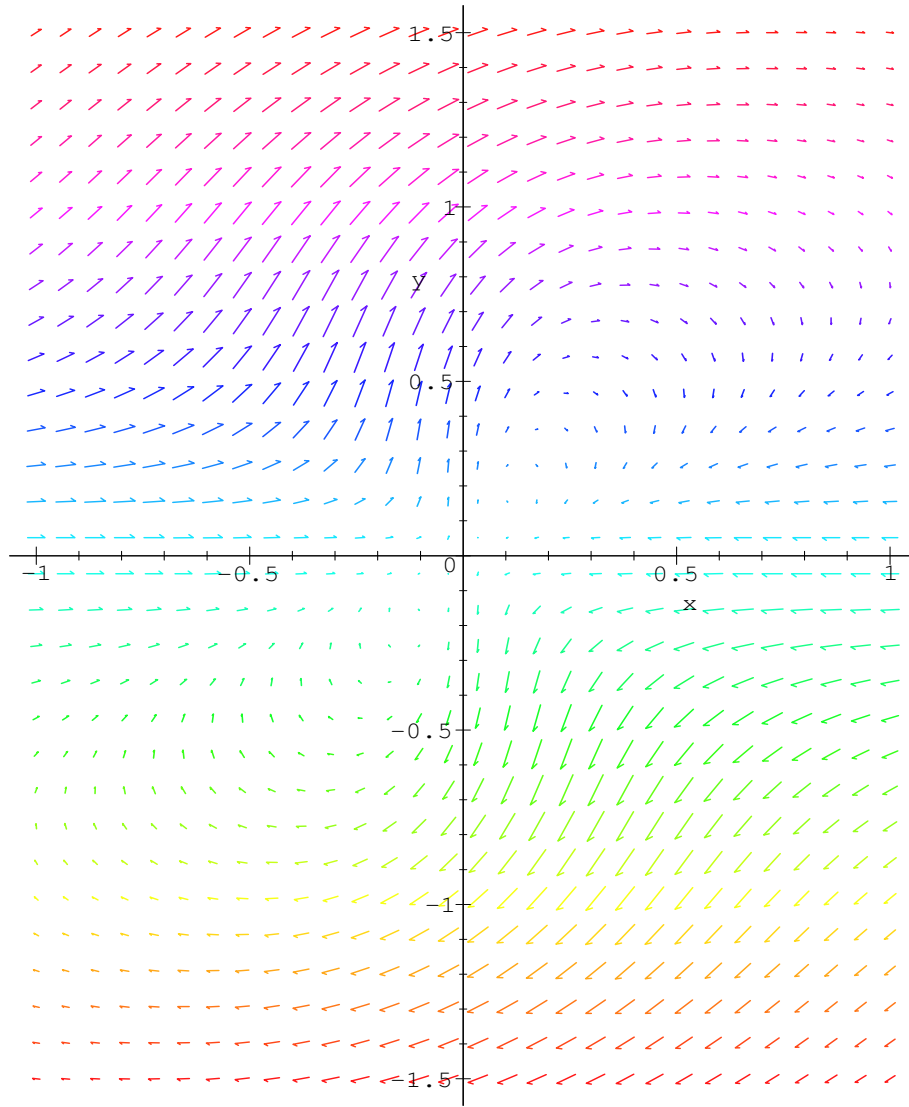
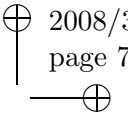
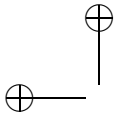
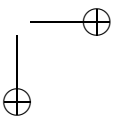
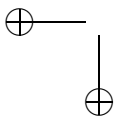
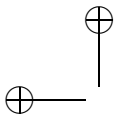
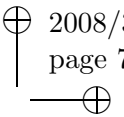


Figura 4.2: A origem é um ponto de equilíbrio atrativo, porém não é estável





uma solução que claramente não satisfaz $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

c) \implies a) Do Teorema 248 temos que

$$\|e^{At}\| \leq ce^{-\omega t}, \quad t \geq 0,$$

com constantes $c \geq 0$ e $\omega > 0$. Observando que a solução do sistema é $z(t, z_0) = e^{At}z_0$, concluímos que $\bar{z} = 0$ é assintoticamente estável. ■

Observação 55. Se o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é assintoticamente estável, podemos concluir do Teorema 54 que todas as soluções de (4.7) convergem exponencialmente para 0 quando $t \rightarrow \infty$. Esta propriedade é denominada *estabilidade exponencial*. Fica claro, portanto, que os conceitos de estabilidade assintótica e exponencial são equivalentes no caso dos sistemas lineares autônomos. □

Observação 56. Caso o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ do sistema (4.7) seja assintoticamente estável, então o sistema

$$(4.8) \quad z' = Az + b(t), \quad t \geq 0,$$

é *BIBO-estável* (*Bounded-Input Bounded-Output*). Isto é, se $b \in L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^n)$, então toda solução de (4.8) está também em $L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^n)$. Este fato segue imediatamente da representação da solução para o problema não homogêneo. Tal propriedade é entretanto perdida quando o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é somente estável (veja o próximo exemplo). □

Exemplo 57. Considere o oscilador harmônico modelado pela equação diferencial

$$\ddot{x} + a^2 x = b(t)$$

e o respectivo sistema

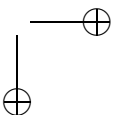
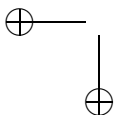
$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

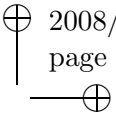
Note que $\bar{z} = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Como uma matriz fundamental para esse sistema é dada por

$$\begin{pmatrix} \sin at & \cos at \\ a \cos at & -a \sin at \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$





podemos concluir que o ponto de equilíbrio é estável.

Considere agora como inhomogeneidade (entrada) a função limitada $b(t) := \cos \omega t$. A solução correspondente é dada por

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2\omega} \sin \omega t & , \text{ para } \omega = a \\ \frac{1}{a^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos at) & , \text{ para } \omega \neq a \end{cases}$$

A interpretação da solução obtida é a seguinte:

— Para $\omega \neq a$, a solução é formada pela composição de duas vibrações com frequências respectivamente $a/2\pi$ (frequência da energia do sistema) e $\omega/2\pi$ (frequência da força externa).

— No caso $a = \omega$, observamos o fenômeno de ressonância: com o tempo o sistema ganha cada vez mais energia e a solução se torna ilimitada. Na prática, o sistema acaba sendo destruído, devido à sobrecarga de energia acumulada. \square

Observação 58. Suponha que no sistema (4.7) tenhamos $\max\{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } A \} = 0$. Nesse caso o ponto $\bar{z} = 0$ será estável exatamente quando todos os blocos de Jordan relativos aos autovalores λ com $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ tiverem forma diagonal (por quê?). \square

Definição 59. Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ que satisfaz

$$\max \{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } M \} < 0.$$

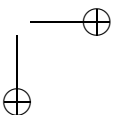
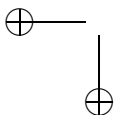
é denominada *matriz estável*. \square

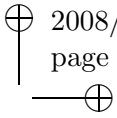
4.3 Critério de Routh–Hurwitz

Como sabemos, os autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ do sistema (4.7) são as raízes do polinômio característico de A (aqui denominado p_A). Suponha que p_A é da forma

$$p_A(r) = r^n + \sum_{i=1}^n a_i r^{n-i}.$$

Pela Definição 59 a matriz A é estável quando todas as raízes de p_A estiverem no semi-plano esquerdo do plano complexo. Discutimos nesta seção uma condição necessária (critério de Routh–Hurwitz) para a estabilidade de uma matriz.





Lema 60. *Se A é uma matriz estável, então todos os coeficientes a_1, \dots, a_n de p_A são positivos.*

Demonstração: Denotando por λ_k os autovalores reais de A e por λ_j os autovalores com parte imaginária não nula, temos que

$$p_A(r) = \prod_k (r - \lambda_k) \prod_j (r^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda_j)r + |\lambda_j|^2).$$

A hipótese da estabilidade de A implica em

$$-\lambda_k > 0, \quad -2\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0.$$

Provando assim que os coeficientes de p_A são positivos. ■

Uma desvantagem óbvia da aplicação deste critério é a necessidade do conhecimento do polinômio característico p_A . O exemplo a seguir mostra que o critério não é suficiente para garantir a estabilidade de A .

Exemplo 61. Considere a equação diferencial

$$x^{(3)} + x^{(2)} + x^{(1)} + x = 0.$$

O polinômio característico do sistema correspondente é

$$p(r) = r^3 + r^2 + r + 1$$

e possui raízes $-1, \pm i$. Portanto, o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ do sistema correspondente é estável, mas não é assintoticamente estável. □

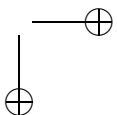
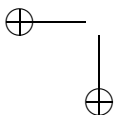
Observação 62. No caso dos polinômios de grau menor ou igual a 4, é possível encontrar condições suficientes para garantir a estabilidade da matriz A a partir da aplicação do teorema fundamental da álgebra (veja [Gon]). De fato, os polinômios

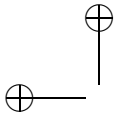
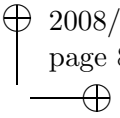
- i) $r + a$
- ii) $r^2 + ar + b$
- iii) $r^3 + ar^2 + br + c$
- iv) $r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d$

com coeficientes reais possuem apenas raízes com parte real negativa se e somente se as seguintes condições são respectivamente satisfeitas:

- i*) $a > 0$
- ii*) $a > 0, b > 0$
- iii*) $a > 0, b > 0, c > 0$ e $ab > c$
- iv*) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ e $abc > c^2 + a^2d$.

□





Exemplo 63. Considere um circuito com um resistor (de resistência R), dois indutores (cada um com indutância L) e um capacitor (de capacitância C), onde as constantes R , L e C são positivas. O problema é modelado pela equação diferencial escalar

$$L^2 C x^{(3)} + R L C x^{(2)} + 2 L x^{(1)} + R x = 0.$$

A função x representa a diferença de potencial (DDP). Da Observação 62 segue a estabilidade assintótica do circuito (veja ainda a Observação 55). \square

O próximo passo é a obtenção de uma condição suficiente para o caso geral de (4.7). O critério apresentado a seguir foi descoberto por Routh em 1877. Seja

$$p(r) = r^n + \sum_{i=1}^n a_i r^{n-i}$$

um polinômio com coeficientes reais positivos. Defina os polinômios U e V (com coeficientes também reais positivos) de modo que

$$U(r) + iV(r) = p(ir), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Temos então:

- Grau de $U = n$ e grau de $V = n - 1$, se n for par;
- Grau de $U = n - 1$ e grau de $V = n$, se n for ímpar.

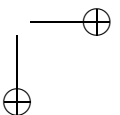
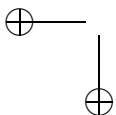
Definimos a partir de U e V os seguintes polinômios:

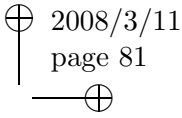
- $q_1 := U$, $q_2 := V$, se n é par;
 $q_1 := V$, $q_2 := U$, se n é ímpar.
- q_3, \dots, q_m são obtidos a partir do algoritmo de divisão de Euclides aplicado ao par q_1, q_2 . Temos assim:⁵

$$q_{k-1} = \kappa_k q_k - q_{k+1}, \quad k = 2, \dots, m - 1 \quad \text{e} \quad q_{m-1} = \kappa_m q_m.$$

Após esta construção estamos prontos para enunciar o teorema de Routh.

⁵Note que q_m é (a menos de uma constante) o maior divisor comum de q_1, q_2 .





Teorema 64. *Sejam U, V, q_1, \dots, q_m definidos como acima. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) *O polinômio p possui apenas raízes λ com $Re(\lambda) < 0$;*
- b) *$m = n + 1$ e os sinais dos coeficientes de maior grau de q_1, \dots, q_{n+1} alternam.*

A demonstração deste resultado foge aos nossos objetivos e não é apresentada. O leitor interessado pode encontrar em [Gan] uma demonstração baseada em um teorema de resíduos da análise complexa.

4.4 Perturbação de Sistemas Lineares

Consideramos nesta secção sistemas da forma

$$(4.9) \quad z' = A z + g(z),$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supomos ainda que as hipóteses em (4.3) e (4.4) sejam satisfeitas pela função

$$f(z) := A z + g(z), \quad z \in D := \mathbb{R}^n.$$

O teorema a seguir nos fornece uma condição suficiente para garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema (4.9).

Teorema 65. *Seja A uma matriz estável e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação satisfazendo $\lim_{|z| \rightarrow 0} |g(z)|/|z| = 0$. Então o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ do sistema (4.9) é assintoticamente estável.*

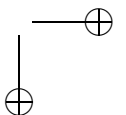
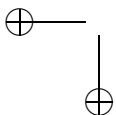
Demonstração: Das hipóteses temos que

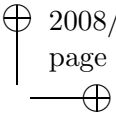
$$\exists c \geq 0, \beta > 0 \text{ tq } (\|e^{At}\| \leq ce^{-2\beta t}), \forall t \geq 0,$$

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } (|g(y)| \leq c^{-1}\beta|y|), \forall y \in B_\delta.$$

Seja $z : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução local do sistema

$$z' = A z + g(z).$$





(A existência desta solução é garantida pela hipótese (4.4).) Temos então

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{At} z(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} g(z(s)) ds, \\ |z(t)| &\leq \|e^{At}\| |z(0)| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| |g(z(s))| ds \\ &\leq c e^{-2\beta t} |z(0)| + \beta \int_0^t e^{-2\beta(t-s)} |z(s)| ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Definindo $w(t) := e^{2\beta t} |z(t)|$ para $t \in [0, T)$, obtemos a estimativa

$$w(t) \leq c |z(0)| + \beta \int_0^t w(s) ds, \quad t \in [0, T).$$

Temos agora como resultado do lema de Gronwall (veja Lema 264) que

$$w(t) \leq c |z(0)| e^{\beta t}, \quad t \in [0, T),$$

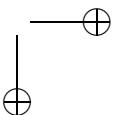
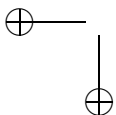
de onde segue

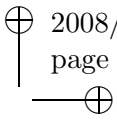
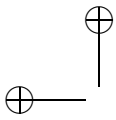
$$(4.10) \quad z(t) \leq c |z(0)| e^{-\beta t}, \quad t \in [0, T).$$

Podemos então concluir que a solução local z pode ser prolongada ao intervalo $[0, \infty)$. Logo, a estimativa (4.10) vale para $T = \infty$ e o teorema fica provado. ■

Observação 66. A importância do Teorema 65 é a forma pela qual ele pode ser aplicado na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio dos sistemas de controle em (4.9):

- Expanda o campo vetorial f no ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$. O sistema resultante é da forma (4.9), onde $A = df(0)$ e $g(z) = f(z) - df(0)z$. (A hipótese de g estar definida em todo \mathbb{R}^n não é restritiva, pois na demonstração necessitamos de g somente em uma vizinhança de $\bar{z} = 0$.)
- Verifique se $A = df(0)$ é uma matriz estável.
- A hipótese $\lim_{|z| \rightarrow 0} |g(z)|/|z| = 0$ é trivialmente satisfeita, pois f é suposta continuamente diferenciável.





Note, entretanto, que este método de linearização fornece apenas uma condição suficiente para a estabilidade. Tal condição é por demasiado restritiva e está longe de ser necessária (veja o Exemplo 69). \square

Exemplo 67. Aplicamos o método de linearização ao oscilador não linear com amortecimento $a > 0$, que é descrito pela equação diferencial

$$\ddot{x} + 2a \dot{x} + \sin x = 0.$$

O sistema correspondente é:

$$(4.11) \quad z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -2az_2 - \sin z_1 \end{pmatrix}$$

e a linearização do sistema no ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ nos fornece a matriz

$$A = df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que os autovalores da matriz A são:

$$\lambda_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

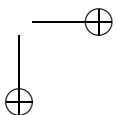
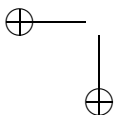
A matriz A é portanto estável e o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é assintoticamente estável. O sistema (4.11) possui ainda outro ponto de equilíbrio, a saber: $\hat{z} = (\pi, 0)$. A linearização neste ponto gera a matriz

$$\hat{A} = df(\hat{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2a \end{pmatrix},$$

que possui um autovalor λ com $Re(\lambda) > 0$. O Teorema 65 não se aplica, entretanto o ponto de equilíbrio \hat{z} não é estável. Nas Figuras 4.3 e 4.4 é mostrado o campo em vizinhanças dos pontos $\bar{z} = 0$ e $\hat{z} = (\pi, 0)$, respectivamente. \square

Exemplo 68. Consideremos novamente o sistema de Lorenz (veja Exemplo 52), descrito pela equação diferencial

$$(4.12) \quad z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z) = \begin{pmatrix} s(z_2 - z_1) \\ rz_1 - z_2 - z_1z_3 \\ z_1z_2 - bz_3 \end{pmatrix},$$



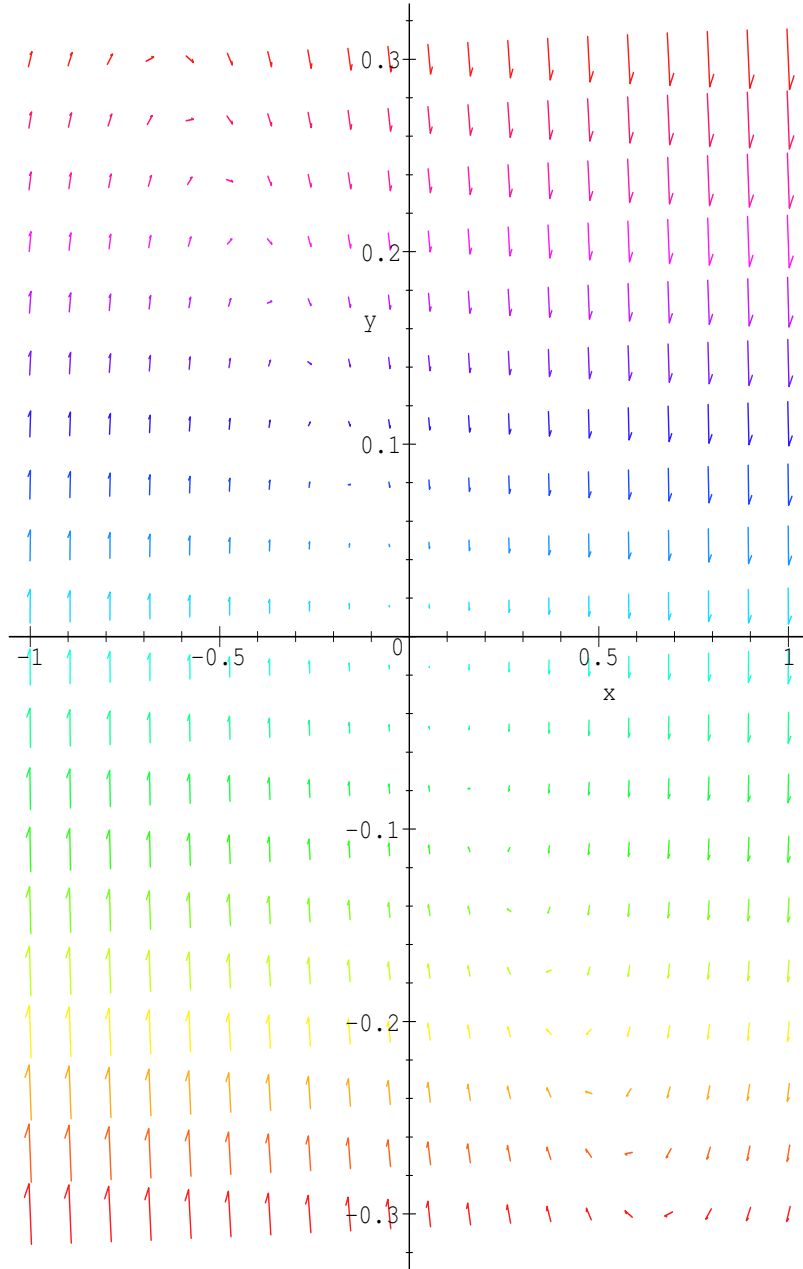
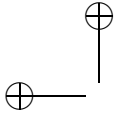
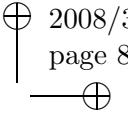
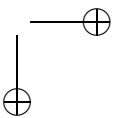
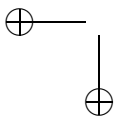


Figura 4.3: Campo vetorial de $x'' + 2ax' + \sin x = 0$ (para $a = 1$) em uma vizinhança do ponto $\bar{z} = 0$.



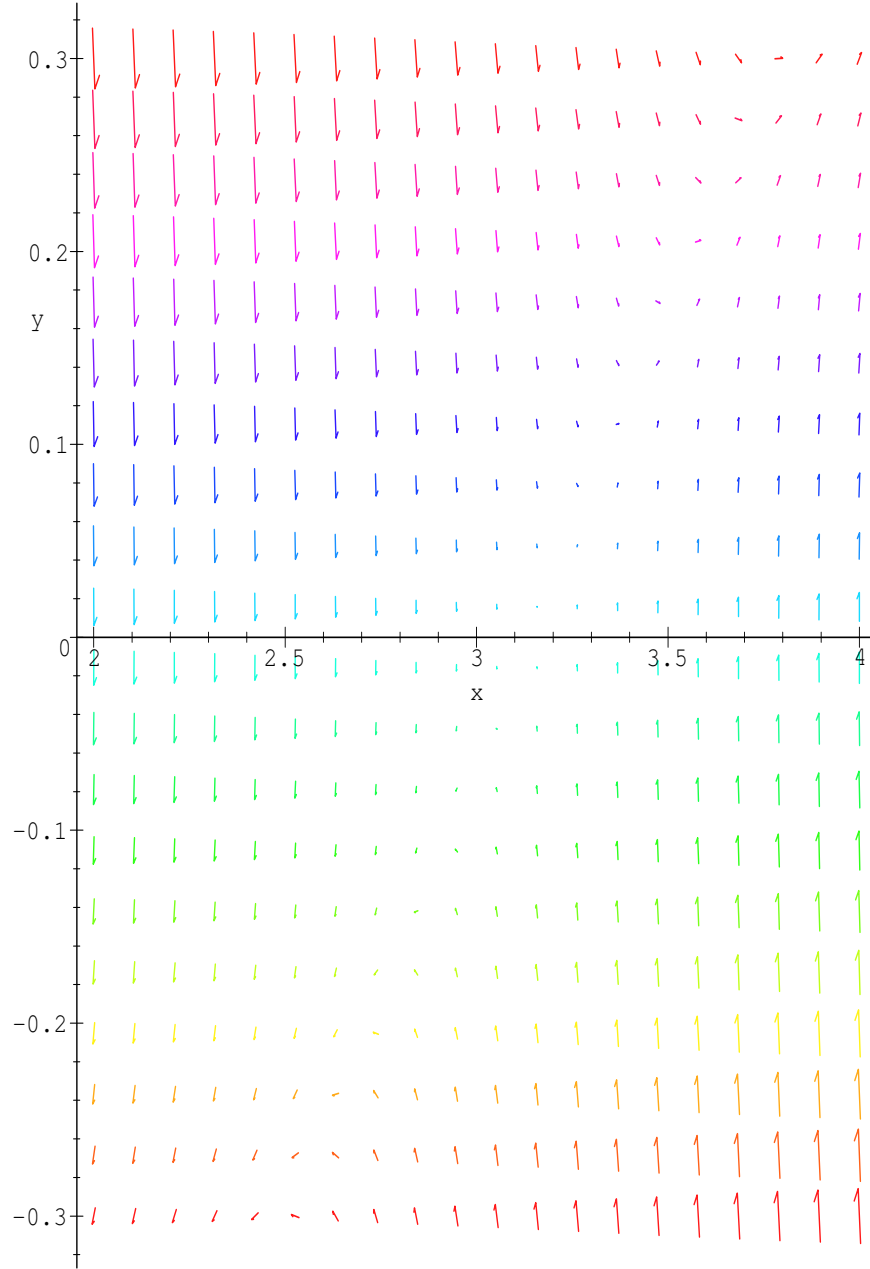
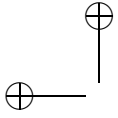
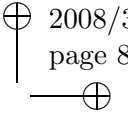
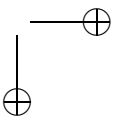
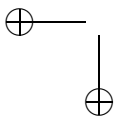
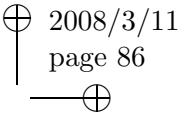


Figura 4.4: Campo vetorial de $x'' + 2ax' + \sin x = 0$ (para $a = 1$) em uma vizinhança do ponto $\hat{z} = (\pi, 0)$.





onde s , r e b são constantes positivas. É fácil verificar que, para $r > 1$, existem três pontos de equilíbrio:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}.$$

Linearizando o sistema nestes pontos, obtemos respectivamente as matrizes:

$$\bar{A} = df(\bar{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = df(\hat{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix},$$

e

$$\tilde{A} = df(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

Para o ponto de equilíbrio \bar{z} obtemos o polinômio característico

$$p(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^2 + (s + 1)\lambda - s(r - 1)),$$

o qual possui duas raízes negativas e uma positiva. Portanto, a estabilidade numa vizinhança de \bar{z} é improvável.

Os pontos de equilíbrio \hat{z} e \tilde{z} estão associados ao mesmo polinômio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (s + 1 + b)\lambda^2 + b(s + r)\lambda + 2bs(r - 1).$$

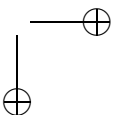
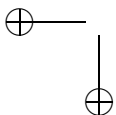
O critério de Routh–Hurwitz é aplicável quando⁶

$$(s + 1 + b)b(s + r) - 2bs(r - 1) > 0$$

Este é o caso se

$$s > b + 1, \quad r < r_c := s \frac{s + 3 + b}{s - b - 1},$$

⁶Veja Observação 62.



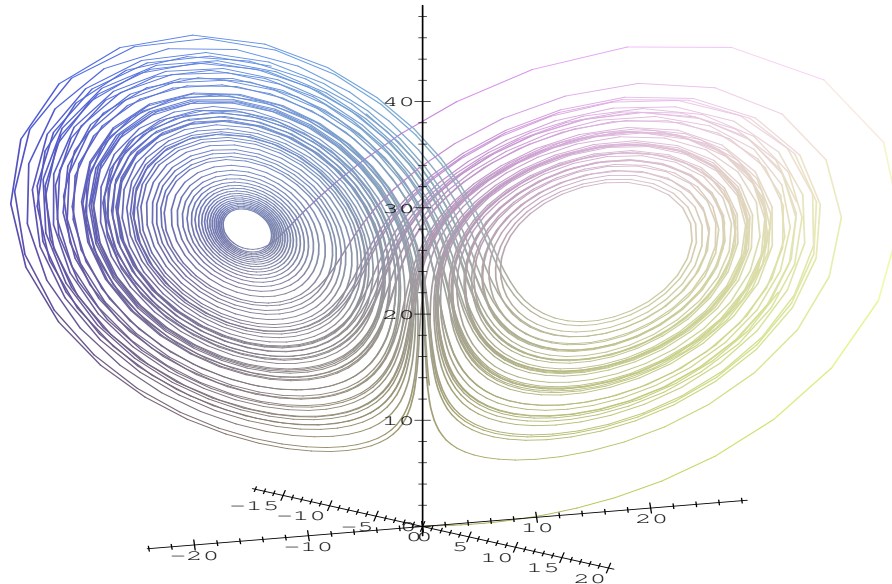
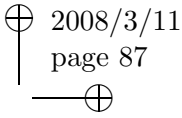
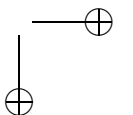
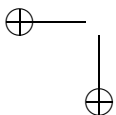


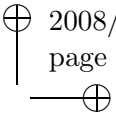
Figura 4.5: Órbita do atrator de Lorenz (4.12) para os parâmetros $s = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$; condição inicial: $z(0) = (0.1, 0.1, 0.1)$.

quando então podemos concluir que os pontos de equilíbrio \hat{z} e \tilde{z} são assintoticamente estáveis. Para os valores especiais $s = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$, temos $r > r_c \approx 24.74$ e os três pontos de equilíbrio não mais são estáveis. Entretanto, os polinômios característicos de \hat{z} e \tilde{z} ainda possuem uma raiz negativa, fato que contribui para o comportamento ímpar das órbitas do sistema (veja Figura 4.5). \square

4.5 Método de Lyapunov

Um método eficiente de se verificar a estabilidade é o desenvolvido por *A.M. Lyapunov (1893)*. O método trata de sistemas não lineares da forma (4.1) e se baseia na análise de autovalores. Analisamos a seguir um exemplo que serve de motivação para o método apresentado nesta secção.





Exemplo 69. Considere o sistema

$$(4.13) \quad z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} -3z_2 - z_1^5 \\ -2z_2 + z_1^5 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz $A = df(0)$ são 0 e -2 . Logo, A não é uma matriz estável e a questão da estabilidade do ponto de equilíbrio 0 permanece em aberto.

Defina $V(z_1, z_2) := z_1^6 + 9z_2^2$ e seja $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ uma solução do sistema (4.13). Temos então

$$\frac{d}{dt}V(z_1(t), z_2(t)) = -6z_1(t)^{10} - 36z_2(t)^2 \leq 0,$$

de onde segue

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(z_1(t), z_2(t)) \\ &= V(z_1(0), z_2(0)) - \int_0^t (6z_1(s)^{10} + 36z_2(s)^2) ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

A estabilidade do ponto de equilíbrio 0 é agora uma consequência direta desta desigualdade. Além disto, temos ainda que $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. De fato, como a função $t \mapsto V(z_1(t), z_2(t))$ é monótona não crescente, existe o limite $a := \lim_{t \rightarrow \infty} V(z_1(t), z_2(t))$.

Como $V(z_1, z_2) = 0$ se e somente se $(z_1, z_2) = 0$, basta verificar que $a = 0$. Suponha por contradição que $a > 0$. Temos então que

$$0 < a \leq V(z_1(t), z_2(t)) \leq V(z_1(0), z_2(0)), \quad t \geq 0.$$

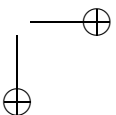
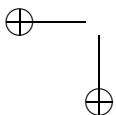
Defina

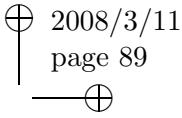
$$m := \inf\{6z_1^{10} + 36z_2^2 \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2; a \leq V(z_1, z_2) \leq V(z_1(0), z_2(0))\}.$$

Como V é contínua, temos que $m > 0$. Para $t \geq 0$ temos agora

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(z_1(t), z_2(t)) \leq V(z_1(0), z_2(0)) - m \int_0^t dt \\ &= V(z_1(0), z_2(0)) - mt. \end{aligned}$$

Como o lado direito da última expressão se torna negativo para t suficientemente grande, chegamos à desejada contradição. \square





Definição 70. Uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é uma vizinhança qualquer de $\bar{z} = 0$, é denominada *função de Lyapunov* para o sistema $z' = f(z)$ quando satisfaz:

- i) V é contínua em U e continuamente diferenciável em $U \setminus \{0\}$;
- ii) $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ para todo $x \in U$, $x \neq 0$;
- iii) $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ para todo $x \in U \setminus \{0\}$.

V é denominada *função de Lyapunov estrita* quando, ao invés da condição iii), satisfizer:

iii*) $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$ para todo $x \in U \setminus \{0\}$.

□

Teorema 71. *Seja U uma vizinhança qualquer de $\bar{z} = 0$ e $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para o sistema $z' = f(z)$. São verdadeiras as afirmativas:*

- a) $\bar{z} = 0$ é um ponto de equilíbrio estável ;
- b) $\bar{z} = 0$ é um ponto de equilíbrio atrativo se e somente se existe vizinhança W de 0 de modo que a solução estacionária é a única solução $z : [0, \infty) \rightarrow U$ de $z' = f(z)$ com $z(0) \in W$ e $\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0$, $\forall t \in [0, \infty)$.

Demonstração: Provamos primeiro o item a). Seja $r > 0$ tal que $B_{2r} \subset U$. Defina $\beta := \min\{V(x) \mid |x| = r\}$ e $U_\beta := \{x \in U \mid V(x) < \beta\} \cap \bar{B}_r \subset B_r$. Então $\beta > 0$ e a continuidade de V implica que $U_\beta \neq \emptyset$ e que U_β é uma vizinhança de 0 . Seja z uma solução de

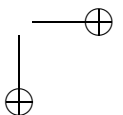
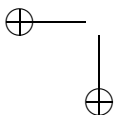
$$z' = f(z), \quad z(0) = z_0 \in U_\beta.$$

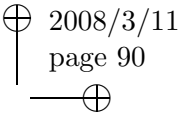
Temos então $V(z(0)) < \beta$ e

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}V(z(t)) &= \langle \nabla V(z(t)), z'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla V(z(t)), f(z) \rangle \leq 0, \quad t \in [0, \omega(z_0)), \end{aligned}$$

onde $\omega(z_0)$ é o maior real que satisfaz $z(t) \in \bar{B}_r$, $\forall t \in [0, \omega(z_0)]$. Se existisse $t_1 \in (0, \omega(z_0)]$ tal que $|z(t_1)| = r$, teríamos

$$V(z(0)) < \beta \leq V(z(t_1))$$





pela definição de β e

$$V(z(t_1)) \leq V(z(0))$$

como conseqüência de (4.14), nos levando a uma contradição. Portanto, temos necessariamente $z(t) \in B_r$, para todo $t \in [0, \omega(z_0)]$. Isto porém contradiz a maximalidade do intervalo $[0, \omega(z_0)]$, provando assim que $\omega(z_0) = \infty$ e $z(t) \in B_r$ para todo $t \in [0, \infty)$. Fica assim provado que $\bar{z} = 0$ é um ponto de equilíbrio estável.

Provamos agora b). Defina inicialmente $W := U_\beta$.

(\implies) Como \bar{z} é atrativo, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z_0 \in B_\delta$, a solução correspondente $z(\cdot, z_0)$ converge para \bar{z} quando $t \rightarrow \infty$. Caso $W \not\subseteq B_\delta$, redefina $W := U_\beta \cap B_\delta$. Seja $z : [0, \infty) \rightarrow U$ uma solução de $z' = f(z)$; $z(0) = z_0 \in W$ satisfazendo $\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0$, $t \in [0, \infty)$. Temos então

$$V(z(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(z(t)) = V(\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)) = V(0) = 0.$$

Logo, $z(0) = 0$ e de $V(z(t)) = V(z(0))$, $\forall t$, concluímos que $z(t) = 0$, $t \in [0, \infty)$.

(\impliedby) Seja z uma solução de $z' = f(z)$ com $z(0) \in W$. Do item a) temos que $z : [0, \infty) \rightarrow B_r$. Logo, para toda seqüência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\lim_n t_n = \infty$, a seqüência $(z(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subseqüência convergente. Para provar que 0 é um ponto de equilíbrio atrativo, basta verificarmos que o limite $\lim_n z(t_n)$ é sempre 0. Suponhamos por contradição que existe uma seqüência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\lim t_n = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} z(t_n) = \hat{z} \neq 0$. Se $|\hat{z}| = r$ chegaríamos (como em a)) à contradição: $V(z(0)) < \beta \leq V(\hat{z})$ e $V(\hat{z}) \leq V(z(0))$. Logo $\hat{z} \in B_r$. Note ainda que a hipótese $V(\hat{z}) = \beta$ implica na mesma contradição acima. Logo $V(\hat{z}) < \beta$ e portanto $\hat{z} \in U_\beta = \{x \in U \mid V(x) < \beta\} \cap \bar{B}_r$.

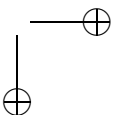
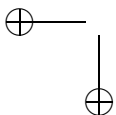
Considere agora a solução \tilde{z} do sistema

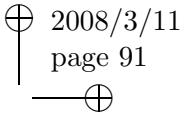
$$\tilde{z}' = f(\tilde{z}), \quad \tilde{z}(0) = \hat{z}.$$

Do item a) temos que

$$\tilde{z} : [0, \infty) \rightarrow B_r,$$

Como $\hat{z} \neq 0$ e $V(\tilde{z}(t))$ é monótona não crescente, então $V(\tilde{z}(t)) \leq V(\tilde{z}(0)) = V(\hat{z})$, $\forall t$. Caso a igualdade sempre se verificasse, a hipótese em b) implicaria em $\tilde{z}(t) \equiv 0$ e $\hat{z} = 0$. Portanto, existe um $\tau > 0$ com $V(\tilde{z}(\tau)) < V(\hat{z})$.





A equação diferencial é autônoma, logo as funções $z_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por $z_n(t) := z(t_n + t)$ são soluções respectivamente de $z'_n = f(z_n)$, $z_n(0) = z(t_n)$. Como $\lim_n z(t_n) = \hat{z}$, segue do Lema 266 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n(t) - \tilde{z}(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z(t_n + t) - \tilde{z}(t)| = 0, \quad t \in [0, \tau].$$

Isto é, $\lim_n z_n(t) = \tilde{z}(t)$, $t \in [0, \tau]$. Temos, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(z(t_n + \tau)) = V(\tilde{z}(\tau)) < V(\hat{z}).$$

Isto porém é um absurdo, pois sendo $V(z(t))$ monótona não crescente, é possível encontrar, para todo $n \in \mathbb{N}$, um $m \in \mathbb{N}$ tal que $V(z(t_n + \tau)) \geq V(z(t_m)) \geq V(\hat{z}) = \lim_n V(z(t_n))$. ■

Corolário 72 (Lyapunov). *Seja V uma função de Lyapunov estrita em U , uma vizinhança de 0 , para o sistema $z' = f(z)$. Então, o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é assintoticamente estável.*

Demonstração: O Teorema 71 a) garante estabilidade de \bar{z} em alguma vizinhança $B_r \subset U$. Note agora que, para toda solução de $z' = f(z)$ que permanece em B_r para $t \geq 0$, a aplicação $t \mapsto V(z(t))$ é monótona estritamente decrescente. Portanto, a única dentre essas soluções que satisfaz $\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0$, $t \geq 0$ é a solução estacionária $z(t) \equiv 0$. Do Teorema 71 b) segue que \bar{z} é atrativo. ■

Exemplo 73. Considere novamente o sistema não linear

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} -3z_2 - z_1^5 \\ -2z_2 + z_1^5 \end{pmatrix}.$$

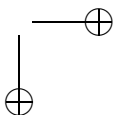
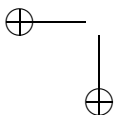
No Exemplo 69 introduzimos a função de Lyapunov estrita

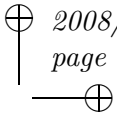
$$V(z_1, z_2) := z_1^6 + 9z_2^2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$$

a fim de analisar este sistema. Podemos agora concluir diretamente do Corolário 72 que o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é assintoticamente estável. □

Exemplo 74. Considere a equação diferencial para o circuito elétrico RLC:

$$CL\ddot{x} + RC\dot{x} + x = 0,$$





cujo sistema associado é

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -[LC]^{-1} & -RL^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

onde R , L e C são constantes positivas. Uma função de Lyapunov para este sistema é

$$V(z_1, z_2) := Lz_2^2 + C^{-1}z_1^2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,$$

de onde calculamos

$$\langle \nabla V(z_1, z_2), f(z_1, z_2) \rangle = -2Rz_2^2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, V não é uma função de Lyapunov estrita e o Teorema 71 a) garante que $\bar{z} = 0$ é estável. Note porém que a condição $-2Rz_2(t)^2 = 0$, para todo $t \geq 0$, implica em $z_2(t) = z_2'(t) = 0, t \geq 0$. Da equação diferencial temos então $z_1(t) = 0, t \geq 0$. Assim sendo, o Teorema 71 b) garante que $\bar{z} = 0$ é também atrativo e, portanto, assintoticamente estável. \square

Exemplo 75. Considere agora o sistema

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Uma função de Lyapunov é dada por $V(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$. O Teorema 71 garante que $\bar{z} = 0$ é um ponto de equilíbrio estável mas não atrativo (verifique!). \square

4.6 Equação Matricial de Lyapunov

Iniciamos esta secção recordando alguns importantes conceitos da álgebra linear, relacionados com os autovalores de uma matriz.

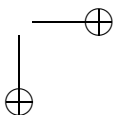
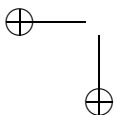
Definição 76. Uma matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ é denominada

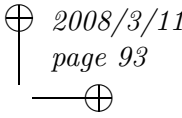
Positiva definida quando $\langle x, Mx \rangle > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;

Positiva semi-definida quando $\langle x, Mx \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

Negativa definida quando $-M$ é positiva definida. \square

No lema a seguir apresentamos a solução de uma equação matricial que é fundamental para a formulação do critério de Lyapunov.





Lema 77. *Sejam $U \in \mathbb{R}^{n,n}$, $V \in \mathbb{R}^{m,m}$ e $W \in \mathbb{R}^{n,m}$. Se U e V são matrizes estáveis, então a solução única da equação matricial*

$$UX + XV + W = 0 \quad (X \in \mathbb{R}^{n,m})$$

é a matriz estável X definida por

$$X := \int_0^\infty e^{tU} W e^{tV} dt.$$

Demonstração: Do Teorema 248 e da hipótese, temos que existem constantes $c \geq 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\|e^{tU}\| \leq ce^{-\beta t}, \quad \|e^{tV}\| \leq ce^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Note que para $T > 0$, temos

$$\begin{aligned} e^{TU} W e^{TV} - W &= \int_0^T \frac{d}{dt}(e^{tU} W e^{tV}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W V e^{tV}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W e^{tV} V) dt. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $T \rightarrow \infty$, temos que

$$X = \int_0^\infty e^{tU} W e^{tV} dt$$

é solução da equação matricial $-W = UX + XV$, ficando assim provada a existência de soluções. Para provar unicidade, suponha que X_1, X_2 são ambas soluções de $UX + XV + W = 0$ e defina $\hat{X} := X_1 - X_2$. Logo, $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n,m}$ é solução de

$$U\hat{X} + \hat{X}V = 0.$$

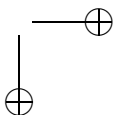
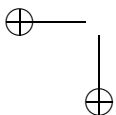
Temos então

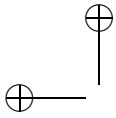
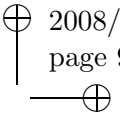
$$\frac{d}{dt}(e^{tU} \hat{X} e^{tV}) = e^{tU}(U\hat{X} + \hat{X}V)e^{tV} = 0$$

e portanto,

$$e^{tU} \hat{X} e^{tV} = e^{0U} \hat{X} e^{0V} = \hat{X}.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow \infty$, obtemos $\hat{X} = 0$. ■





No teorema a seguir é apresentada uma equação matricial, que fornece uma forma equivalente de definir a estabilidade de uma matriz.

Teorema 78. *Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) A é uma matriz estável;
- b) Existe uma matriz positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tal que

$$(4.15) \quad A^*P + PA = -I.$$

Demonstração: Se a matriz A é estável, a existência de P segue do Lema 77 com $U = A^*$, $V = A$ e $X = P$. Reciprocamente, se P satisfaz a equação (4.15), defina

$$V(x) := \langle x, Px \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, a função diferenciável V satisfaz $V(0) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ e ainda

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), Ax \rangle &= \langle Px + P^*x, Ax \rangle \\ &= \langle A^*Px, x \rangle + \langle x, PAx \rangle \\ &= \langle (A^*P + PA)x, x \rangle \\ &= -\langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

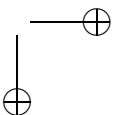
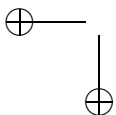
Isto é, V é uma função de Lyapunov estrita. O Corolário 72 implica que o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é assintoticamente estável. O Teorema 54 garante por fim que os autovalores de A possuem parte real estritamente negativa. ■

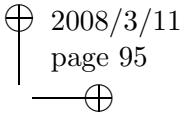
Observação 79. No Teorema 78, a equação (4.15) pode ser substituída pela exigência de $A^*P + PA$ ser negativa definida. □

Teorema 80. *Sejam $A, X, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $C \in \mathbb{R}^{l,n}$ matrizes satisfazendo*

- $A^*X + XA = -W$;
- $W - C^*C$ é positiva semi-definida;
- (A, C) é observável.

Então a matriz A é estável se X for positiva definida.





Demonstração: (\implies) Seja A uma matriz estável. Do Lema 77 temos que $X = \int_0^\infty e^{tA^*} W e^{tA} dt$. Logo, para $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned} \langle x, Xx \rangle &= \int_0^\infty \langle e^{tA} x, W e^{tA} x \rangle dt \\ &\geq \int_0^\infty \langle e^{tA} x, C^* C e^{tA} x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty |C e^{tA} x|^2 dt. \end{aligned}$$

Como (A, C) é observável, concluímos que $C e^{tA} x = 0, \forall t \geq 0$ se $x = 0$.⁷ O que prova que X é positiva definida.

(\impliedby) Suponha X positiva definida. Defina como na demonstração do Teorema 78 a função

$$V(x) := \langle x, Xx \rangle, x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $W - C^*C$ é positiva semi-definida, então W também o é. Logo, V é uma função de Lyapunov, pois $\langle \nabla V(z(t)), Az(t) \rangle = -\langle z, Wz \rangle$ (veja Observação 79). Seja agora z uma solução de $z' = Az$ com $\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0, t \geq 0$. Temos então

$$0 = \frac{d}{dt}V(z(t)) = -\langle z(t), Wz(t) \rangle.$$

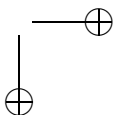
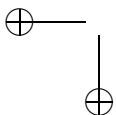
Logo,

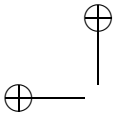
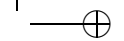
$$0 \leq \langle z(t), (W - C^*C)z(t) \rangle = -\langle Cz(t), Cz(t) \rangle, t \geq 0.$$

Portanto, $Cz(t) = 0, t \geq 0$, e da observabilidade de (A, C) temos $z(0) = 0$. O Teorema 71 b) garante que o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ é assintoticamente estável e do Teorema 54 segue a estabilidade da matriz A . ■

A equação matricial (4.15) é denominada *equação matricial de Lyapunov*. Igualmente interessante na análise da estabilidade de sistemas não lineares é o critério de Popov, que fornece condições suficientes para garantir a *estabilidade absoluta* de sistemas de loop fechado. Para detalhes sobre o conceito de estabilidade absoluta e sobre o critério de Popov veja [Fö3].

⁷Veja Definição 6.





4.7 Estabilidade de Sistemas Lineares Discretos

Uma análise de estabilidade semelhante à realizada na Secção 4.2 para problemas contínuos pode ser estendida para sistemas de evolução discretos da forma

$$(4.16) \quad x_{k+1} = A x_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 0$.

Definição 81. O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ do sistema (4.16) é denominado:

estável quando: dado $\delta > 0$, para todo $x_0 \in B_\delta$, temos $x_k \in B_\delta$, $k = 1, 2, \dots$

atractivo quando: para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. □

Como nos sistemas contínuos autónomos, a atratividade implica na estabilidade. A análise da estabilidade de tais sistemas é bastante simples e é esclarecida com os seguintes lemas:

Lema 82. *Dado um sistema linear discreto da forma (4.16), são equivalentes as afirmações:*

- a) *O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é atractivo;*
- b) *O operador A considerado como elemento do espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é contrativo, i.e.*

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1.$$

Demonstração: a) \implies b) Seja λ um autovalor de A e x_0 o respectivo autovetor. Logo, $x_k = A^k x_0 = \lambda^k x_0$. Da hipótese temos agora

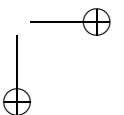
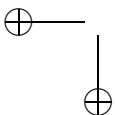
$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^k \|x_0\| = 0,$$

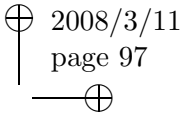
o que implica em $|\lambda| < 1$. Como λ é arbitrário, b) fica provado.

b) \implies a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos da hipótese

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| \leq \|x_0\| \lim_{k \rightarrow \infty} \|A\|^k = 0$$

e o teorema fica provado. ■





No que se refere à verificação da estabilidade do ponto de equilíbrio de (4.16) temos o lema a seguir, que por sua semelhança com o Lema 82 é deixado para o leitor como exercício.

Lema 83. *Dado o sistema linear discreto (4.16), são equivalentes as afirmações:*

- a) *O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é estável;*
- b) *O operador A considerado como elemento do espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é não expansivo, i.e.*

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1.$$

O critério de Lyapunov também se aplica a sistemas discretos, com a finalidade de estabelecer condições suficientes para estabilidade.

Definição 84. Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada *função de Lyapunov quadrática* para o sistema $x_{k+1} = Ax_k$ quando satisfaz:

- i) V é da forma: $V(x) = \langle x, Px \rangle$, com P positiva definida;
- ii) $V(Ax) < V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

□

Lema 85. *Seja V uma função de Lyapunov quadrática para o sistema (4.16). Então o ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é atrativo.*

Demonstração: Seja λ um autovalor de A e x o respectivo autovetor. Por hipótese temos

$$|\lambda|^2 \langle x, Px \rangle = \langle Ax, PAx \rangle < \langle x, Px \rangle,$$

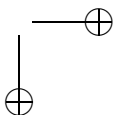
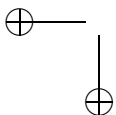
provando assim que $|\lambda| < 1$. Como λ é arbitrário, o lema fica provado.

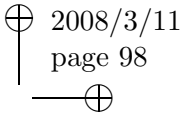


Do Lema 85, obtemos para sistemas discretos um resultado análogo ao Teorema 78.

Lema 86. *O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ do sistema $x_{k+1} = Ax_k$ é atrativo se e somente se existe matriz definida positiva P tal que $A^*PA - P$ é negativa definida.*

Demonstração: (\implies) Como $\|A\| < 1$, é fácil verificar que $P = I$ (a matriz identidade) é tal que $A^*PA - P$ é negativa definida. (Na verdade para qualquer matriz positiva definida P a expressão acima é negativa





definida.)

(\Leftarrow) Basta observar que $V(x) := \langle x, Px \rangle$ define uma função de Lyapunov quadrática para o sistema. ■

A equação $A^*PA - P = -I$ é denominada *equação matricial discreta de Lyapunov*.

Corolário 87. *Se o ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ do sistema $x_{k+1} = Ax_k$ é atrativo, então existe uma função de Lyapunov quadrática para o sistema.*

Demonstração: Segue imediatamente do Lema 86. ■

Exercícios

4.1. Verifique que o ponto de equilíbrio do sistema no Exemplo 75 é estável mas não atrativo.

4.2. Considere o sistema do oscilador não linear amortecido (veja Exemplo 67)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\beta x_2 - \alpha \sin(x_1),$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são constantes.

a) Mostre que $V(x_1, x_2) := 2^{-1}x_2^2 - \alpha \cos x_1$ é uma função de Lyapunov para o sistema;

b) Verifique que todas as soluções do sistema possuem intervalo de existência $[0, \infty)$;

c) Prove que toda solução (x_1, x_2) do sistema satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (2\pi k, 0),$$

onde $k \in \mathbb{N}$ depende da condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$.

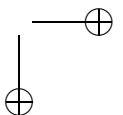
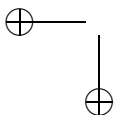
4.3. Encontre para o sistema

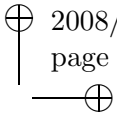
$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_1^3x_2$$

uma função de Lyapunov da forma

$$V(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

provando assim que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.





EXERCÍCIOS

4.4. Encontre para o sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 - 4x_3$$

uma função de Lyapunov da forma

$$V(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3.$$

4.5. Complete os detalhes da demonstração do Lema 83.

4.6. Para sistemas não autônomos, o método de linearização não pode, via de regra, ser utilizado na análise de estabilidade. Tal fato se torna claro mesmo para sistemas lineares. Considere o sistema $z' = A(t)z$, com

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 - 2 \cos 4t & 2 + 2 \sin 4t \\ -2 + 2 \sin 4t & -1 + 2 \cos 4t \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule os autovalores de $A(t)$;
- b) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio instável;
(Dica: Observe que a equação diferencial possui uma solução da forma: $e^{\alpha t + i\beta t}$.)

4.7. O que se pode afirmar, a partir do método de linearização, sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio $(0, 0, 0)$ do sistema no Exercício 4.4?

4.8. Considere novamente o oscilador harmônico ($\xi > 0, \gamma > 0$)

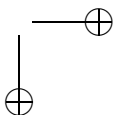
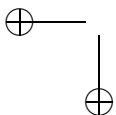
$$\ddot{x} + F_\xi(\dot{x}) + \gamma x = 0, \quad \text{com } F_\xi(s) := \begin{cases} -\xi, & s > 0 \\ \xi, & s < 0 \end{cases}$$

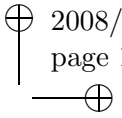
- a) Faça um esboço da família de soluções no plano (x, \dot{x}) ;
- b) Encontre os pontos de equilíbrio (x, \dot{x}) do sistema.

4.9. Considere o sistema ($\kappa > 0, b > 0$)

$$\ddot{x} = \kappa U(t), \quad \text{com } U(t) := \begin{cases} -b, & t > 0 \\ b, & t < 0 \end{cases}$$

- a) Faça um esboço da família de soluções no plano (x, \dot{x}) ;
- b) Mostre que existem soluções periódicas e calcule o período da órbita.





4.10. Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é positiva indefinida, i.e. não é nem positiva definida nem negativa definida.

4.11. Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = 3x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2.$$

- a) Mostre que o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é assintoticamente estável;
 b) Prove que $V(x_1, x_2) := \frac{5}{3}x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ é uma função de Lyapunov estrita;
 c) Considere a solução correspondente à condição inicial $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$. Estime o tempo $t_s > 0$ em que a solução (x_1, x_2) alcança a região $x_1^2 + x_2^2 \leq 0.02$.
 (Dica: Encontre $a > 0$ com $\dot{V}(x) \leq -aV(x)$.)

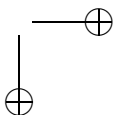
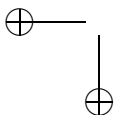
4.12. Prove que o polinômio $p(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 9$ possui somente raízes com parte real negativa.

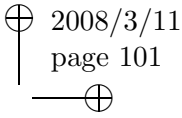
4.13. Seja $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\sigma \in \mathbb{R}$. Prove a equivalência das afirmações abaixo:

- a) $\max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } A\} < -\sigma$;
 b) Para cada matriz positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n,n}$, a equação matricial

$$A^*W + XA + 2\sigma X = -W$$

possui uma única solução positiva definida X .



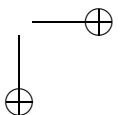
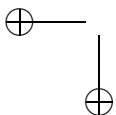


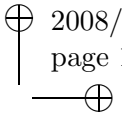
Capítulo 5

Estabilização

Neste capítulo utilizamos o conceito de estabilidade introduzido no Capítulo 4 e analisamos a seguinte questão: Como e quando é possível tornar estável um sistema de controle. Tal tarefa, denominada de estabilização, tem se mostrado nos últimos anos como uma das aplicações mais importantes da teoria de controle em problemas de engenharia e tecnologia. A forma clássica de realizá-la é obter a entrada (ou controle) a partir do estado ou da saída do sistema. Falamos então de realimentação de estado ou de saída. A questão da estabilização permite abordagens tanto qualitativas quanto quantitativas, ambas aqui discutidas.

Na Secção 5.1, definimos os sistemas lineares estabilizáveis e discutimos um resultado sobre estabilização de sistemas autônomos controláveis. A seguir é analisada uma condição necessária e suficiente para estabilização de sistemas autônomos. Na Secção 5.2, consideramos o problema quantitativo relacionado à estabilização. O método de colocação de pólos nos fornece uma estratégia de estabilização, na qual é possível escolher o grau de estabilidade do sistema estabilizado. Na Secção 5.3 é apresentada a estratégia de Luenberger (observador dinâmico), através da qual o estado de um sistema paralelo é utilizado para estabilizar o sistema dado. Na Secção 5.4 é discutido um método de estabilização que combina o observador dinâmico com a realimentação de saída. Na Secção 5.5 consideramos o problema de estabilizar o ponto de operação (desconhecido) de um sistema linear.





5.1 Sistemas Lineares

Em aplicações são utilizadas essencialmente estratégias de realimentação de saída e de realimentação de estado, com o objetivo de alterar a dinâmica do sistema livre (sem controle) obtendo determinadas propriedades, que podem ser:

- BIBO-estabilidade; (qualitativo)
- Estabilidade assintótica; (qualitativo)
- Aceleração do retorno ao ponto de equilíbrio. (quantitativo)

No caso dos sistemas de controle lineares autônomos, as propriedades acima estão intrinsecamente relacionadas com os autovalores da matriz do sistema. Dadas $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, considere o sistema de controle

$$(5.1) \quad z' = Az + Bu.$$

Supondo que o controle u é obtido a partir do estado z por uma lei linear, escrevemos

$$u = Fz,$$

onde $F \in \mathbb{R}^{m,n}$. Substituindo em (5.1), obtemos

$$(5.2) \quad z' = (A + BF)z.$$

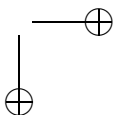
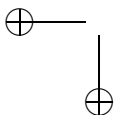
A fim de tornar o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ assintoticamente estável, devemos escolher F de modo que $A + BF$ seja uma matriz estável (veja Definição 59).

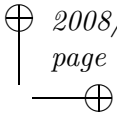
Definição 88. O sistema de controle (A, B) é denominado *estabilizável* quando existe $F \in \mathbb{R}^{m,n}$ tal que a matriz $A + BF \in \mathbb{R}^{n,n}$ é estável. \square

O sistema (5.1), quando escrito com o controle de malha fechada, toma a forma $(A + BF, B)$. Como foi visto no Lema 32, a controlabilidade de (A, B) implica na controlabilidade de $(A + BF, B)$. Este argumento nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 89. *Seja (A, B) é um sistema autônomo controlável. Então (A, B) é estabilizável pela matriz de realimentação*

$$F := -B^*W_T^{-1},$$





onde

$$W_T := \int_0^T e^{-tA} B B^* e^{-tA^*} dt, \quad T > 0.$$

Demonstração: A idéia é utilizar o Teorema 80 com

$$(A, C) = ((A + BF)^*, B^*) \quad \text{e} \quad X = W_T.$$

Para garantir a estabilidade de $(A + BF)$ – ou equivalentemente de $(A + BF)^*$ – basta verificar que:

- (1) W_T é positiva definida;
- (2) $((A + BF)^*, B^*)$ é observável;
- (3) $W := -(A + BF)W_T - W_T(A + BF)^*$ é tal que $W - BB^*$ é positiva semi-definida.

(1) Por construção, W_T é positiva semi-definida. O Teorema 26 garante que W_T é não singular para $T > 0$. Logo, W_T é positiva definida.

(2) Como (A, B) é controlável, $(-A, B)$ também o é. O Teorema 32 garante agora a controlabilidade de $(-(A + BF), B)$. Por fim, do Teorema 24 segue a observabilidade de $((A + BF)^*, B^*)$.

(3) Observe que

$$\begin{aligned} (A + BF)W_T + W_T(A + BF)^* &= AW_T - BB^* + W_TA^* - BB^* \\ &= - \int_0^T \frac{d}{dt} (e^{-tA} B B^* e^{-tA^*}) dt - 2BB^* \\ &= -e^{-TA} B B^* e^{-TA^*} + BB^* - 2BB^* \\ &= -e^{-TA} B B^* e^{-TA^*} - BB^*. \end{aligned}$$

Chegamos assim à identidade

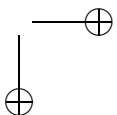
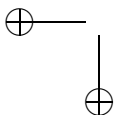
$$W = e^{-TA} B B^* e^{-TA^*} + BB^*,$$

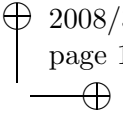
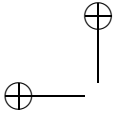
a qual nos permite concluir que $W - BB^*$ é positiva semi-definida. ■

Observação 90. O Teorema 89 garante que sistemas autônomos controláveis são estabilizáveis por realimentação de estado. A recíproca entretanto não é verdadeira, conforme podemos verificar no seguinte exemplo trivial:

$$\begin{cases} A \text{ matriz estável, } B = 0 \\ z' = Az + Bu \end{cases}$$

□





A fim de esclarecer a questão levantada na Observação 90, investigamos condições suficientes para garantir a controlabilidade de sistemas estabilizáveis. Este é o objetivo do teorema

Teorema 91. *Seja (A, B) um sistema autônomo de controle. Então (A, B) é controlável se e somente se (A, B) e $(-A, -B)$ são ambos estabilizáveis.*

Demonstração: Seja (A, B) controlável. Então $(-A, -B)$ é controlável e a estabilidade de (A, B) e $(-A, -B)$ segue do Teorema 89. Reciprocamente, sejam (A, B) e $(-A, -B)$ estabilizáveis. O Teorema 33 nos permite escrever os sistemas $(\pm A, \pm B)$ na forma normal

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

onde (A_{11}, B_1) é controlável. O sistema

$$\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

é estabilizável quando existe uma matriz $F = (F_1, F_2)$ tal que

$$\pm \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 F_1 & A_{12} + B_1 F_2 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

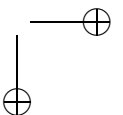
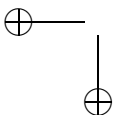
é uma matriz estável. Concluímos daí que os blocos $\pm A_{22}$ possuem somente autovalores com parte real estritamente menor que zero. Como essa condição não pode ser satisfeita simultaneamente para A_{22} e $-A_{22}$, temos que o bloco A_{22} não pode existir na forma normal. O Teorema 33 nos garante então que

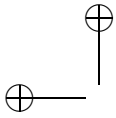
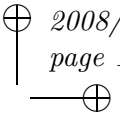
$$A = P^{-1} A_{11} P, \quad B = P^{-1} B_1,$$

onde P é não singular. A controlabilidade de (A, B) segue agora da controlabilidade de (A_{11}, B_1) . ■

Exemplo 92. Considere novamente o problema do equilíbrio de um bastão visto na Secção 1.2.5. A equação diferencial é

$$\ddot{\phi} - g\phi = -u(t),$$





que se escreve na forma do sistema

$$z' = Az + Bu \quad \text{com} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O sistema (A, B) é controlável devido à condição de posto. Logo, o Teorema 91 garante sua estabilidade. O Teorema 89 nos permite ainda calcular a matriz de ganho F , isto porém exige algumas contas longas.

□

O problema da estabilização de sistemas não lineares é discutido em [Is]. Em particular os sistemas *Single-Input Single-Output* (SISO) não lineares são tratados no Capítulo 4, onde é possível identificar semelhanças com a abordagem aqui apresentada para sistemas lineares. Uma técnica baseada na utilização de séries de Fourier (*equilíbrio harmônico*) pode ser encontrada em [Fö1, Capítulo 2].

5.2 Colocação de Pólos

Uma vez esclarecida a questão de que todo sistema controlável pode ser estabilizado por uma estratégia de controle de realimentação do tipo $u = Fz$, concentramo-nos no problema de escolher a posição no plano complexo dos autovalores da matriz do sistema

$$z' = (A + BF)z.$$

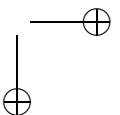
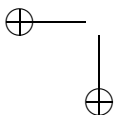
Esta tarefa é equivalente à de escolher os pólos de uma função racional – colocação de pólos. Tratamos nesta secção apenas de sistemas com controle escalar ($m = 1$), isto é, da forma

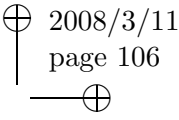
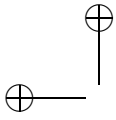
$$z' = Az + bu \quad \text{com} \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Investigamos a princípio um resultado do tipo forma-normal.

Lema 93. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$. São equivalentes as afirmações:*

- a) (A, b) é controlável;





b) Existe $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ inversível tal que o sistema (A, b) nas coordenadas $x = Pz$ tenha a forma $x' = \tilde{A}x + \tilde{b}u$ com

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Os números a_0, \dots, a_{n-1} são os coeficientes do polinômio característico p de A : $p(r) = r^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^i$.

Demonstração: a) \implies b) Basta encontrar uma base w^1, \dots, w^n para \mathbb{R}^n , de modo que a matriz $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ definida pelas equações

$$Pw^k = e^k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

satisfaça

- (i) $Pb = e^n$,
- (ii) $PAP^{-1}e^1 = -a_0e^n$,
- (iii) $PAP^{-1}e^{k+1} = e^k - a_k e^n, \quad 1 \leq k < n$.

Definimos w^k recursivamente por

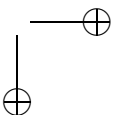
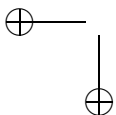
$$w^n = b, \quad w^k = Aw^{k+1} + a_k b, \quad 1 \leq k < n.$$

Temos então

$$(5.3) \quad w^k = A^{n-k}b + \sum_{j=1}^{n-k} a_{n-j} A^{n-k-j}b, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Como $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ são linearmente independentes (devido à controlabilidade de (A, b)), temos de (5.3) que w^1, \dots, w^n também o são. Do teorema de Caley–Hamilton, temos que $p(A) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} Pb &= Pw^n = e^n \text{ (provando (i))}; \\ Aw^1 &= A^n b + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} A^{n-j}b \pm a_0 b = p(A)b - a_0 b = -a_0 b \\ &= -a_0 w^n \text{ (provando (ii))}; \\ Aw^{k+1} &= w^k - a_k e^n, \quad 1 \leq k \leq n \text{ (provando (iii))}. \end{aligned}$$



$b) \implies a)$ Seja agora o sistema (\tilde{A}, \tilde{b}) satisfazendo as hipóteses do item $b)$. O critério do posto nos garante que esse sistema é controlável. Logo, (A, b) é também controlável. ■

O teorema a seguir esclarece o resultado principal sobre a colocação de raízes dos polinômios característicos de sistemas de controle.

Teorema 94. *Seja (A, b) um sistema controlável e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ números complexos dados, com $r + 2(s - r) = n$. Então existe $f \in \mathbb{R}^n$ tal que o polinômio característico de $A + bf$ possui como raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$.*

Demonstração: Seja f um vetor com componentes f_0, \dots, f_{n-1} . O Lema 93 nos permite escrever o sistema $A + bf$ (a menos de uma mudança de variáveis) na forma

$$A + bf = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ f_0 - a_0 & f_1 - a_1 & f_2 - a_2 & \cdots & f_{n-2} - a_{n-2} & f_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix},$$

onde $a_0, \dots, a_{n-1}, 1$ são os coeficientes do polinômio característico de A . Logo, o polinômio característico p de $A + bf$ satisfaz

$$p(r) = r^n + \sum_{i=0}^{n-1} (f_i - a_i)r^i.$$

Como os coeficientes $f_i - a_i$, $i = 0, \dots, n - 1$ são determinados pelas raízes do polinômio, podemos determinar f_0, \dots, f_{n-1} (observe que é preciso resolver um sistema não linear com n variáveis e n equações). ■

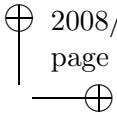
Exemplo 95. Considere novamente o sistema linear (veja Secção 1.2.5 e Exemplo 92)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A estabilização com $f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nos leva à matriz

$$A + bf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g - f_0 & -f_1 \end{pmatrix},$$

cujos polinômio característico é: $\lambda^2 + f_1\lambda + (f_0 - g)$. Se escolhemos os autovalores $\lambda_{\pm} = -1$, obtemos os coeficientes $f_0 = g + 1$, $f_1 = 2$. □



Observação 96. É possível obter um resultado semelhante ao apresentado no Teorema 94 para sistemas genéricos (A, B) – com $m \geq 1$. Neste caso, a demonstração baseia-se na forma normal obtida no Teorema 33. Discutimos aqui o caso geral na forma de algoritmo.

Seja o sistema de controle

$$z' = Az + Bu, \quad \text{com } A \in \mathbb{R}^{n,n}, B \in \mathbb{R}^{n,m}.$$

Procuramos uma matriz $F \in \mathbb{R}^{m,n}$ tal que os autovalores de $A + BF$ sejam os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ dados (note que os autovalores complexos aparecem com seus conjugados).

Os autovetores de $A + BF$ devem ser encontrados satisfazendo:

$$(A + BF)v^i = \lambda_i v^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Definindo $q^i := Fv^i$, $1 \leq i \leq n$, obtemos

$$(A - \lambda_i I)v^i + Bq^i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} v^i \\ q^i \end{pmatrix} \in \text{Ke}(A - \lambda_i I | B), \quad 1 \leq i \leq n, \quad F = (q^1 | \dots | q^n)(v^1 | \dots | v^n)^{-1},$$

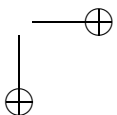
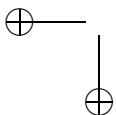
caso $\det(v^1 | \dots | v^n) \neq 0$. Essa última condição é satisfeita quando $A + BF$ é diagonalisável, o que por sua vez pode ser garantido pela escolha dos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. \square

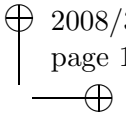
Exemplo 97. Considere o sistema de controle com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores do sistema livre ($u = 0$) são $-1, -2, 2$. Escolhemos para novos autovalores os valores: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -4$. Calculamos a seguir o núcleo de $(A - \lambda_i I | B)$ $i = 1, 2, 3$, onde

$$(A - \lambda_i I | B) = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -\lambda_i - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$





Um simples cálculo nos permite obter $Ke(A - \lambda_i I | B)$, sendo estes para $i = 1, 2, 3$ respectivamente

$$\text{span}\{(1, -2, 4, 0, 0)^*, (1, 0, 0, -2, -4)^*\},$$

$$\text{span}\{(3, 2, -6, -5, 0)^*, (2, -3, 9, 0, 26)^*\},$$

$$\text{span}\{(2, 1, -4, -9, 0)^*, (-2, -4, 16, 0, -36)^*\}.$$

Podemos escolher então:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{52}{5} \end{pmatrix},$$

$$v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad q^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Obtemos assim a matriz de ganho

$$F = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ \frac{52}{5} & -12 & -5 \end{pmatrix},$$

e a matriz do sistema de malha fechada é

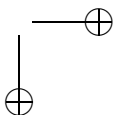
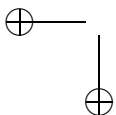
$$A + BF = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{72}{5} & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

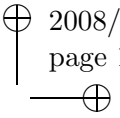
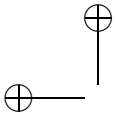
□

Uma interessante aplicação da colocação de pólos para um modelo de um reator químico é discutida em [KnKw] (ver exemplo 5.5). Neste problema a variável de estado ($z \in \mathbb{R}^5$) corresponde à temperatura em diferentes partes do reator, enquanto que o controle ($u \in \mathbb{R}^3$) corresponde à abertura de três válvulas de refrigeração disponíveis.

5.3 Observador Dinâmico

Dadas $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{l,n}$ considere o sistema de controle (A, B, C) . Na Secção 5.1, vimos que para estabilizar um sistema utilizando uma estratégia de realimentação de estado da forma $u = Fz$ temos que encontrar F de modo a tornar a matriz $(A + BF)$ estável.





Fazemos agora o desenvolvimento equivalente para o problema de realimentação de saída, quando procuramos controladores da forma $u = Fy$. Note que

$$u = Fy = FCz, \quad F \in \mathbb{R}^{m,l}.$$

O objetivo é então encontrar F de modo que o ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$ do sistema $z' = (A + BFC)z$ seja assintoticamente estável. Tal abordagem encontra sérios obstáculos à sua realização, pois mesmo as hipóteses

$$(A, B) \text{ controlável, } (A, C) \text{ observável}$$

não são suficientes para garantir a estabilidade da matriz $(A + BFC)$. Tal fato pode ser comprovado no simples exemplo a seguir.

Exemplo 98. Considere o problema de controle descrito por

$$\ddot{x} + x = u, \quad y = x.$$

Na forma de sistema temos

$$\begin{cases} z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

É fácil verificar que os sistemas (A, B) e (A, C) são respectivamente controlável e observável. Escolhendo agora uma estratégia de controle linear de realimentação de saída, temos

$$u := fy, \quad \text{com } f \in \mathbb{R}^{1,1}.$$

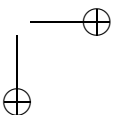
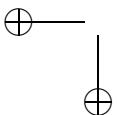
Obtemos assim a equação $\ddot{x} + (1 - f)x = 0$, que corresponde ao sistema $z' = (A + BfC)z$, com

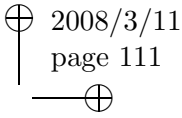
$$(A + BfC) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico deste novo sistema, obtemos $p(r) = r^2 + (1 - f) = 0$, que possui raízes:

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{f - 1}.$$

Obviamente é impossível encontrar $f \in \mathbb{R}$ que satisfaça $\text{Re}(\lambda_+) < 0$ e $\text{Re}(\lambda_-) < 0$ ao mesmo tempo. Portanto, o sistema não é estabilizável. \square





Na Secção 5.4 é analisada uma alternativa para a estabilização por realimentação de saída, que consiste de duas etapas: inicialmente o estado é reconstruído a partir da saída; em um segundo passo utiliza-se a aproximação do estado na realimentação.

A fim de reconstruir dinamicamente o estado z a partir da observação y , utilizamos a seguinte idéia:

- O sistema (A, B, C) é simulado por outro com a mesma estrutura;
- Seja x o estado desse sistema paralelo e $w = Cx$ sua saída;
- O controle do sistema paralelo é constituído pelo controle do sistema usual adicionado de uma componente da forma $L(w - y)$, com $L \in \mathbb{R}^{n,l}$;
- Obtemos assim o sistema

$$x' = Ax + Bu + L(Cx - y), \quad w = Cx,$$
 que é denominado *observador dinâmico*;¹
- A diferença entre os estados do observador e do sistema original é definida por $\varepsilon := z - x$ e satisfaz

$$\varepsilon' = A\varepsilon - L(Cx - Cz) = (A + LC)\varepsilon;$$
- L é escolhido tal que $(A + LC)$ seja estável, garantindo assim

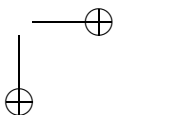
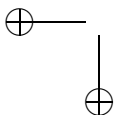
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

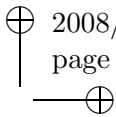
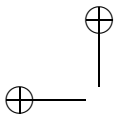
A análise da estabilidade de $(A + LC)$ nos leva ao conceito de detectabilidade discutido no Capítulo 2 (veja Definição 14). O teorema a seguir estabelece a equivalência entre a detectabilidade de um sistema $(A, , C)$ e a estabilidade da matriz do observador dinâmico $(A + LC)$.

Teorema 99. *Dadas $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $C \in \mathbb{R}^{l,n}$, são equivalentes as afirmações:*

- a) $(A, , C)$ é detectável;

¹A escolha da letra L para o observador se deve a D.G. Luenberger, que introduziu esta idéia.





b) Se $v \in \mathbb{C}^n$ é autovetor de A e seu autovalor λ satisfaz $Re(\lambda) \geq 0$, então $Cv \neq 0$;

c) $(A^*, -C^*)$ é estabilizável;

d) Existe $L \in \mathbb{R}^{n,l}$ tal que a matriz $(A + LC)$ é estável.

Demonstração: a) \implies b) Sejam v e λ como em b). Considere as soluções especiais do problema de valor inicial $z' = Az$, $z(0) = v$ dadas por

$$z_r(t) := Re(e^{\lambda t}v), \quad z_i(t) := Im(e^{\lambda t}v), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que, se $Cv = 0$, então v pertence ao subespaço não observável de (A, C) . Neste caso, $\lim_t z_r(t) \neq 0$, contradizendo a detectabilidade de (A, C) .

b) \implies c) O Teorema 33 nos permite escrever o sistema $(A^*, -C^*)$ na forma normal

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_I & \times \\ 0 & A_{II} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C_I \\ 0 \end{pmatrix},$$

com (A_I, C_I) controlável. Analisamos separadamente as duas possíveis situações:

Se o bloco A_{II} não existir, temos $(A^*, -C^*) = (P^{-1}A_I P, P^{-1}C_I)$. Logo, $(A^*, -C^*)$ é controlável. O item c) segue agora do Teorema 89.

Suponha que o bloco A_{II} esteja presente na forma normal. Se μ é um autovalor de A_{II}^* e w um autovetor correspondente, temos para $v = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$ que

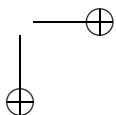
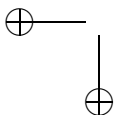
$$\tilde{A}^*v = \mu v, \quad \tilde{C}v = 0.$$

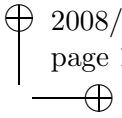
Da hipótese em b) segue que $Re(\mu) < 0$, provando assim que A_{II}^* (e conseqüentemente A_{II}) é uma matriz estável. Da controlabilidade de (A_I, C_I) segue sua estabilizabilidade, i.e. existe F_I tal que $(A_I + C_I F_I)$ é estável. Temos então que a matriz

$$\tilde{A} + \tilde{C}(F_I | 0) = \begin{pmatrix} A_I + C_I F_I & \times \\ 0 & A_{II} \end{pmatrix}$$

é estável. Como $\tilde{F} = (F_I | 0)$ estabiliza (\tilde{A}, \tilde{C}) e $(P^{-1}\tilde{A}P, P^{-1}\tilde{C}) = (A^*, -C^*)$, então $F = \tilde{F}P$ estabiliza $(A^*, -C^*)$.

c) \implies d) Por hipótese, existe uma matriz D tal que a matriz $A^* + (-C^*)(-D)$ é estável. Logo, $A + LC$ é estável com a escolha $L := D^*$.





$d) \implies a)$ Dado $z_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} Ke(CA^k)$ defina $z(t) := e^{tA}z_0, t \in \mathbb{R}$. Do teorema de Caley–Hamilton segue $Cz(t) = 0$, para $t \geq 0$. Logo, z também é solução de

$$z' = (A + LC)z.$$

Como os autovalores da matriz $(A + LC)$ possuem parte real negativa, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. ■

Exemplo 100. Vamos aplicar a idéia do observador dinâmico ao sistema (A, B, C) com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0).$$

É fácil ver que (A, B) é controlável e (A, C) observável, e portanto também detectável. Os autovalores de $A + LC$ com $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ são obtidos resolvendo-se a equação

$$(5.4) \quad 0 = \det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^2 + (3 - l_1)\lambda + (2 - 2l_1 - 3l_2).$$

Escolhemos para a matriz $A + LC$ os autovalores $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = -10$. Resolvendo (5.4) para (l_1, l_2) , obtemos $l_1 = -16, l_2 = -56/3$. O observador dinâmico possui então a seguinte estrutura:

$$x' = \hat{A}x + Bu - Ly,$$

com

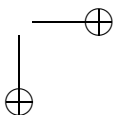
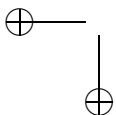
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -17 & 3 \\ -56/3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, L = (-16 \ -56/3).$$

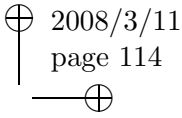
O observador dinâmico nos permite reconstruir a componente z_2 do estado – note que a componente z_1 já é observada. Suponha que temos a seguinte situação:

$$u(t) \equiv 1, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com $\xi \in \mathbb{R}$. O erro de reconstrução $\varepsilon := z - x$ satisfaz

$$\begin{cases} \varepsilon' = (A + LC)\varepsilon \\ \varepsilon(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \end{cases}$$





Os autovalores de $A + LC$ são $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = -10$ e os respectivos autovetores são $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/3 \end{pmatrix}$. Temos então

$$\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 3e^{-9t} - 3e^{-10t} \\ 8e^{-9t} - 7e^{-10t} \end{pmatrix}.$$

Nos interessa saber o quão rápido ε_2 converge a zero. Para $t = 0.5$, temos $e_2(t) = 0.041 \xi$ (aproximadamente 4% do erro inicial) e para $t = 0.9$, temos $e_2(t) = 0.015 \xi$ (i.e. 0.1% do erro inicial). \square

É possível utilizar sistemas auxiliares *observadores* também para sistemas de controle não lineares. Para maiores detalhes, consulte [KIF], [Is]. Ainda no contexto de sistemas autônomos, o leitor pode encontrar em [KnKw] detalhes sobre o *observador reduzido* (semelhante ao observador discutido nesta secção).

5.4 Estabilização por Realimentação de Saída

O Exemplo 98 nos mostra que a forma clássica da estabilização por realimentação de saída $u = Fy = FCx$ nem sempre é possível. Uma alternativa é utilizar o observador dinâmico para encontrar uma aproximação para o estado, e, a partir desta aproximação, escolher o controle.

O observador dinâmico é definido pelo sistema (veja Secção 5.3)

$$(5.5) \quad \begin{cases} x' = Ax + Bu + L(w - y) \\ w = Cx \end{cases}.$$

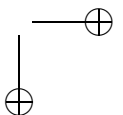
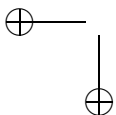
A partir do estado x escolhemos um controle de realimentação da forma $u = Fx$. Substituindo esse controlador no sistema (A, B) , obtemos para (z, x) o sistema acoplado:

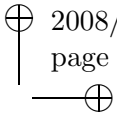
$$(5.6) \quad \begin{cases} z' = Az + BFx \\ x' = (A + BF + LC)x - LCz \end{cases}$$

que está associado à matriz

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & BF \\ -LC & A + BF + LC \end{pmatrix}.$$

Se a matriz \hat{A} for estável, conseguimos atingir o nosso objetivo inicial de estabilizar (A, B, C) através do sistema acoplado (5.6) – constituído de





processo mais observador. Note que esta abordagem nos permite, além de estabilizar o processo, reconstruir seu estado.

Defina agora $w := z - x$. O sistema (5.6) se escreve nas novas variáveis (z, w) como

$$(5.7) \quad \begin{cases} z' = (A + BF)z + BFw \\ w' = (A + LC)w \end{cases}$$

Concluimos assim que a matriz \hat{A} é semelhante à matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{pmatrix}.$$

A tarefa de estabilizar \hat{A} é portanto equivalente à de estabilizar \tilde{A} . Note, porém, que a estrutura de \tilde{A} nos permite escrever

$$p_{\tilde{A}} = p_{(A+BF)} p_{(A+LC)},$$

onde p_M representa o polinômio característico da matriz M . Sendo assim, nossa tarefa se reduz a:

- Determinar F tal que a matriz $A + BF$ é estável;
- Determinar L tal que a matriz $A + LC$ é estável.

Conhecemos, entretanto, da Definição 88 e do Teorema 99 condições necessárias e suficientes para que os objetivos acima possam ser alcançados. São essas respectivamente:

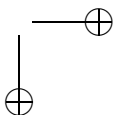
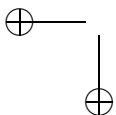
- (A, B) estabilizável,
- (A, C) detectável.

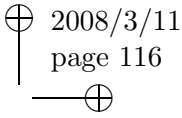
Exemplo 101. Considere o sistema (A, B, C) do Exemplo 100 com matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0).$$

Vimos naquele exemplo que a matriz

$$L = \begin{pmatrix} -16 \\ -56/3 \end{pmatrix}$$





é tal que $A + LC$ possui autovalores -9 e -10 . Se $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix}$, os autovalores de $A + BF$ são dados pelas raízes do polinômio característico

$$\det(\lambda I - (A + BF)) = \lambda^2 + (3 - f_1 - f_2)\lambda + (2 - 5f_1 - f_2).$$

Escolhendo para $A + BF$ os autovalores $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -6$, obtemos para F os coeficientes: $f_1 = -5$, $f_2 = -3$. Portanto, a matriz do sistema (5.7) assume a forma

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -17 & 3 \\ 0 & 0 & -56/3 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

A estabilização por realimentação de saída para sistemas SISO não lineares especiais é considerada em [KIF].

5.5 Pontos de Operação

Nesta secção consideramos os problemas de determinação e estabilização de pontos de operação. Considere um sistema de controle (A, B) , no qual a variável de controle u se decompõe em uma entrada fixa \bar{u} (desconhecida) e um sinal de controle v . O sistema se escreve então como

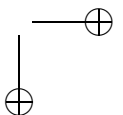
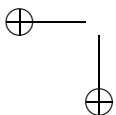
$$(5.8) \quad z' = Az + B(\bar{u} + v).$$

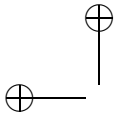
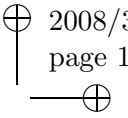
O *ponto de operação* z_o do sistema (5.8) corresponde ao ponto de equilíbrio do sistema livre (i.e. $v \equiv 0$). Temos assim

$$z_o = -A^{-1}B\bar{u}.$$

O problema abordado nesta secção é o de encontrar uma estratégia de controle v que torne o ponto de operação assintoticamente estável e que, se possível, nos permita identificá-lo.

Note que se \bar{u} é conhecido, recaímos no problema de estabilização do sistema (A, B) . De fato, uma vez calculado z_o , basta fazer a mudança de variável $x = z - z_o$ para que o estado x satisfaça a dinâmica $x' = Ax + Bv$.





Utilizando uma abordagem semelhante à do observador dinâmico, é possível não somente estabilizar o ponto de operação, como também determiná-lo. Vamos aproximar o estado z por x satisfazendo a dinâmica:

$$x' = L(z - x),$$

onde $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ é não singular. Escolhemos agora para (5.8) um controle da forma

$$v = F(z - x).$$

Fazendo a mudança de variáveis $\hat{z} = z - z_o$, $\hat{x} = x - z_o$, obtemos

$$\hat{x}' = L(z - x) = L(\hat{z} - \hat{x})$$

e ainda

$$\hat{z}' = z' = Az + B\bar{u} + BF(z - x) = A\hat{z} + BF\hat{z} - BF\hat{x}.$$

Temos então, para o par $(\hat{z} \hat{x})$, o sistema

$$(5.9) \quad \begin{pmatrix} \hat{z}' \\ \hat{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BF & -BF \\ L & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix}.$$

Portanto, basta encontrar matrizes F e L , tais que a matriz do sistema (5.9) seja estável. Note que, se A é estável, uma escolha possível é $F = 0$, $L = -I$.

Exemplo 102. Considere o sistema de controle (A, B) com matrizes:

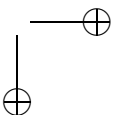
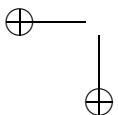
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

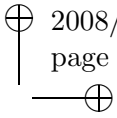
Supomos F e L da forma:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_1 \end{pmatrix}.$$

A fim de torna a matriz $A + BF$ estável, escolhemos $f_1 = f_2 = -3$, obtendo assim:

$$A + BF = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$





Temos então

$$\begin{pmatrix} A + BF & -BF \\ L & -L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 & 3 \\ l_1 & l_2 & -l_1 & -l_2 \\ l_2 & l_1 & -l_2 & -l_1 \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (7 + 2l_1)\lambda^3 + (10 + 8l_1 + l_1^2 - l_2^2 - 6l_2)\lambda^2 + (8l_1 + l_1^2 - l_2^2 - 12l_2)\lambda + 2(l_2^2 - l_1^2).$$

A observância do critério de Hurwitz (veja Teorema 64) nos leva a escolher os coeficientes $l_1 = 1$, $l_2 = -3$. As raízes obtidas são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = -4.$$

Logo, $F = \begin{pmatrix} -3 & -3 \end{pmatrix}$ e $L = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ estabilizam o ponto de operação.

Para fins de cálculo, suponha $\bar{u} = -2$. O ponto de operação correspondente é $z_o = -A^{-1}B\bar{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Suponha as condições iniciais: $z(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $x(0) = 0$. Temos então

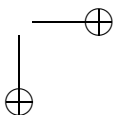
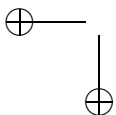
$$\begin{pmatrix} \hat{z}(0) \\ \hat{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e a solução do sistema $(\hat{z}' \hat{x}')$ é:

$$\begin{pmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66e^{-t} + 66e^{-2t} + 48te^{-2t} \\ 33e^{-t} - 34e^{-2t} - 48te^{-2t} \\ -77e^{-t} + 96te^{-2t} + 12e^{-4t} + 60e^{-2t} \\ 55e^{-t} - 44e^{-2t} - 96te^{-2t} - 12e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

□

Observação 103 (Estabilização de sistemas não lineares). Encerramos este capítulo mencionando um importante resultado relacionado a estabilização de sistemas não lineares. Para dinâmicas autônomas de classe C^1 é possível obter uma condição necessária para estabilidade local do sistema. O critério de Brockett garante que, para que um sistema seja localmente estabilizável em um determinado estado é necessário que a imagem da função descrevendo a dinâmica contenha uma vizinhança desse estado [So, Capítulo 5]. □



Exercícios

5.1. Considere o sistema SISO (A, b) com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre a forma normal (\hat{A}, \hat{b}) do sistema $(\hat{b} = (0, 0, 1))$.

5.2. Considere o sistema SISO (A, b) com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma estratégia de realimentação de estado $u = fx$, com $f = (f_1, f_2, f_3)$, tal que o sistema de malha fechada $A + bf$ possua autovalores $-1 + i$, $-1 - i$, -4 .

5.3. Considere o sistema (A, B) com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que (A, B) é controlável;

b) Encontre uma estratégia de realimentação de estado $u = Fx$, tal que o sistema de malha fechada $A + BF$ possua autovalores -4 , -5 , -6 .

5.4. Construa um observador dinâmico para o sistema

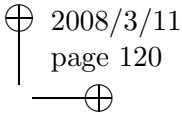
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 1 \ 1),$$

tal que $A + LC$ possua autovalores -8 , -9 , -10 .

5.5. Encontre uma estratégia de realimentação F e um observador L para o sistema (A, B, C) com

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 1 \ 1),$$

tal que $A + BF$ possua autovalores -4 , -5 , -6 e $A + LC$ possua autovalores -8 , -9 , -10 .



Capítulo 6

Identificação de Parâmetros

Consideramos neste capítulo o problema de identificar parâmetros desconhecidos na dinâmica de sistemas de controle. Tais problemas de reconstrução podem ser encontrados em várias aplicações da teoria de controle à engenharia e à tecnologia, uma vez que os parâmetros a ser determinados quase sempre descrevem propriedades importantes do modelo em estudo (coeficientes de rigidez, difusão, permeabilidade, elasticidade, etc ...).

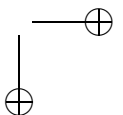
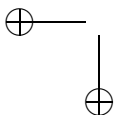
Ainda que os parâmetros de um sistema sejam conhecidos no tempo inicial, estes podem vir a variar (lentamente) com o tempo devido a influências externas ou a própria natureza do problema. Este é outro fator que motiva a tarefa de identificação. Discutimos algumas estratégias de identificação para problemas lineares não autônomos e não homogêneos. Alguns exemplos simples são utilizados para ilustrar a complexidade da tarefa a ser realizada.

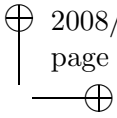
Na Seção 6.1 é apresentada, no contexto dos sistemas lineares, a aplicação denominada controle automático. Na Seção 6.2 é discutida a tarefa principal dentro do controle automático, que é a de identificar parâmetros do sistema. Na Seção 6.3 são analisados alguns métodos iterativos para executar a tarefa de identificação.

6.1 Controle Automático

Considere o sistema de controle autônomo (A, B, C) :

$$(6.1) \quad z' = Az + Bu, \quad y = Cz,$$





onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{l,n}$. O conceito de *controle automático* se refere ao fato de que a ação de controle u deve ser obtida a partir da saída y e deve conduzir a trajetória z ao ponto de equilíbrio $\bar{z} = 0$. Eventualmente, tal objetivo deve ser atingido com conhecimento apenas *parcial* das matrizes A , B , C , assim como da condição inicial z_0 .

A estratégia a ser seguida é a seguinte: Deve-se projetar um sistema auxiliar linear, denominado *sistema de referência*, que permita, a partir da entrada u e da saída y do sistema real, acompanhar a evolução do estado do sistema real. O sistema de referência nos fornece uma saída, que deve ser comparada com a saída do sistema real através de um *critério de erro*. Desta comparação é gerada uma entrada para o sistema real e o sistema de referência é *ajustado*. O sistema real e o modelo são denominados *sistema modelo de referência adaptativa* (MRAS; *model reference adaptive system*).

Assim sendo, a fim de implementar o controle automático, é necessário, simultaneamente (*on line*) a evolução do sistema real, realizar as seguintes tarefas:

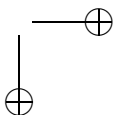
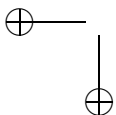
- Reconstrução do estado a partir de observações incompletas, eventualmente com conhecimento apenas parcial do sistema real;
- Identificação de parâmetros do sistema (coeficientes de A , B e/ou C) a partir de dados incompletos;
- Escolha da estratégia de controle (entrada) do sistema real.

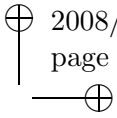
Neste capítulo, analisamos exclusivamente a tarefa de reconstruir (identificar) parâmetros de operação do sistema a partir de dados do sistema real. O problema de acoplar esta reconstrução com a estabilização do sistema real, utilizando controle de realimentação, não é aqui discutida.

6.2 Identificabilidade

Inicialmente analisamos o problema de, a partir da saída de um sistema, obter informações sobre os parâmetros do mesmo. Apesar de considerarmos apenas sistemas de controle lineares, o problema de identificação é, em geral, não linear. Considere um sistema da forma

$$(6.2) \quad z' = A(p)z + B(p)u, \quad y = C(p)z ;$$





onde p é um parâmetro desconhecido, sobre o qual temos a informação: $p \in Q \subset \mathbb{R}^k$. Supomos ainda que, dado $q \in Q$, as matrizes $A(q) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B(q) \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C(q) \in \mathbb{R}^{l,n}$ estão bem definidas.

Nosso objetivo é, a partir de experimentos com condições iniciais $z_0 := z(0)$ e controles pré-escolhidos u , identificar qual parâmetro $p \in Q$ corresponde à saída y obtida.

Seja $Z_0 \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto das condições iniciais admissíveis (exemplo $Z_0 = B_R(0)$, com R grande) e Ω o conjunto das possíveis ações de controle. Logo, o conjunto dos controles admissíveis é

$$U := \{u \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^m) \mid u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } (0, T)\}.$$

Supomos ainda que Ω é aberto. Note que, para cada $(z_0, u, p) \in Z_0 \times U \times Q$, a solução $z = z(\cdot; z_0, u)$ de (6.2) está bem definida. Logo, as aplicações

$$L : Z_0 \times U \times Q \ni (z_0, u, p) \longmapsto z(\cdot, z_0, u, p) \in C([0, T]; \mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{L} : Z_0 \times U \times Q \ni (z_0, u, p) \longmapsto C(p)L(\cdot, z_0, u, p) \in C([0, T]; \mathbb{R}^l)$$

também estão bem definidas. A seguir é apresentado um conceito essencial para essa discussão:

Definição 104. O parâmetro $q \in Q$ é denominado *identificável através do experimento* $(z_0, u) \in Z_0 \times U$, quando

$$\mathcal{L}(z_0, u, p) \neq \mathcal{L}(z_0, u, q) \text{ para todo } q \in Q, p \neq q.$$

O parâmetro $q \in Q$ é denominado *identificável*, quando q for identificável por algum experimento (z_0, u) . □

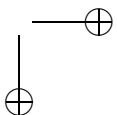
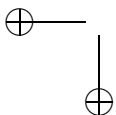
Exemplo 105. Considere o sistema

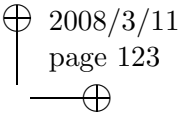
$$z' = pz + u, \quad y = z,$$

com $Z_0 := \{0\}$, $Q := \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}$. A saída y é dada por

$$y(t) = \int_0^t e^{p(t-s)} u(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Observe que o experimento $(0, 0)$ não identifica nenhum parâmetro, enquanto que qualquer parâmetro é identificado pelo experimento $(0, \bar{u})$, $\bar{u}(t) := t$, $t \in \mathbb{R}$. □





Exemplo 106. Considere o sistema

$$\begin{aligned} z_1' &= -(p_1 + p_2)z_1 + p_2z_2u \\ z_2' &= p_2z_1 - p_3z_2 \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

para $Z_0 := \{(0, 0)\}$, $Q := \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 \mid q_1, q_2, q_3 \geq 0\}$, $\Omega = \mathbb{R}$. Dados $q \in Q$ e $u \equiv 1$, considere a equação

$$\mathcal{L}(z_0, u, p) = \mathcal{L}(z_0, u, q),$$

para $p \in Q$. Por diferenciação (note que o campo vetorial resultante é analítico), obtemos equações da forma

$$\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \mathcal{L}(z_0, u, p)(0) = \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \mathcal{L}(z_0, u, q)(0), \quad \mu = 0, 1, \dots$$

O caso $\mu = 1$ não é interessante. Porém, para $\mu = 2$, obtemos a equação

$$-(p_1 + p_2) = -(q_1 + q_2).$$

Por hora abandonamos os cálculos neste ponto. Adiante no texto, uma solução é obtida de forma mais simples (veja Exemplo 109). \square

Retomamos agora a idéia apresentada no exemplo anterior. Para tanto, utilizamos as seguintes representações (veja Apêndice A):

$$y(t) = C(p)e^{A(p)t}z_0 + \int_0^t C(p)e^{A(p)(t-s)}B(p)u(s)ds, \quad t \geq 0,$$

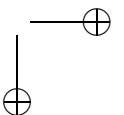
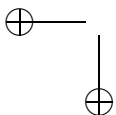
i.e.,

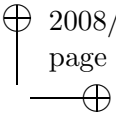
$$(6.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(z_0, u, p)(t) &= C(p)e^{A(p)t}z_0 \\ &+ \int_0^t C(p)e^{A(p)(t-s)}B(p)u(s)ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Definindo as funções $Y_j(p) := C(p)A(p)^jB(p)$, $p \in Q$, $j = 0, 1, \dots$, podemos formular o seguinte lema:

Lema 107. *Sejam os parâmetros $p, q \in Q$. São equivalentes as afirmativas:*

a) $\mathcal{L}(z_0, u, p) = \mathcal{L}(z_0, u, q)$ para todo experimento $(z_0, u) \in Z_0 \times U$;





b) $Y_j(p) = Y_j(q), j = 0, 1, \dots;$

c) $Y_j(p) = Y_j(q), j = 0, 1, \dots, 2n - 1.$

Demonstração: b) \implies c) e b) \implies a): nada a fazer.

a) \implies b) Da representação em (6.3), temos

$$\int_0^t [C(p)e^{A(p)(t-s)}B(p) - C(q)e^{A(q)(t-s)}B(q)]u(s)ds = 0, t \geq 0,$$

para todo $u \in U$. Como Ω é aberto por hipótese, temos

$$v(t) := C(p)e^{A(p)t}B(p) = C(q)e^{A(q)t}B(q) =: w(t), t \in [0, T].$$

O item b) segue agora de $v^{(j)}(0) = w^{(j)}(0), j = 0, 1, \dots$

c) \implies b) Seja $r \in Q$ e $p_{A(r)}(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(r)\lambda^i$ o polinômio característico de $A(p)$. Do teorema de Caley–Hamilton, segue

$$A(r)^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(r)A(r)^i.$$

De onde temos que

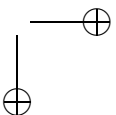
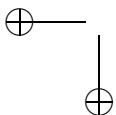
$$(6.4) \quad Y_j(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(r)Y_{j-n+i}(r), j \geq n.$$

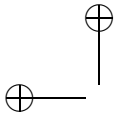
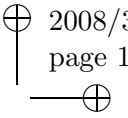
Sejam $a_i := \alpha_i(p) - \alpha_i(q), 0 \leq i \leq n - 1$. Usando um argumento indutivo em N , provamos agora que, para $N \geq 2n$, as seguintes identidades são válidas:

i) $Y_j(p) = Y_j(q), j = 0, 1, \dots, N - 1.$

ii) $Y_j(p) = Y_j(q) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y_{j-n+i}(p), j = n, \dots, N.$

Para $N = 2n$, temos que i) e ii) são verdadeiras devido a (6.4). Note





ainda que de (6.4) segue que

$$\begin{aligned}
 Y_N(p) - Y_N(q) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y_{N-n+i}(p) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l Y_{N-n+i-n+l}(p) \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(p) \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y_{N+i-2n+l}(p) \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(p) (Y_{N+l-n}(p) - Y_{N+l-n}(q)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 Y_{N+1}(p) - Y_{N+1}(q) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i(p) Y_{N+1-n+i}(p) - \alpha_i(q) Y_{N+1-n+i}(q)) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y_{N+1-n+i}(p).
 \end{aligned}$$

Deste modo, a argumentação indutiva fica completa. O item *b)* segue agora de *ii)*. ■

Teorema 108. *O parâmetro $q \in Q$ é identificável se e somente se, para todo $p \in Q$, existir $j \in \{0, \dots, 2n - 1\}$ com $Y_j(p) \neq Y_j(q)$.*

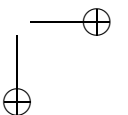
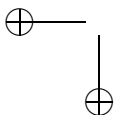
Demonstração: Segue diretamente do Lema 107. ■

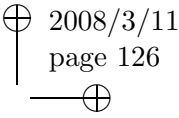
Exemplo 109. Consideramos novamente o sistema do Exemplo 106:

$$\begin{aligned}
 z'_1 &= -(p_1 + p_2)z_1 + p_2 z_2 u \\
 z'_2 &= p_2 z_1 - p_3 z_2 \\
 y &= z_1
 \end{aligned}$$

onde $Z_0 := \{(0, 0)\}$, $Q := \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 \mid q_1, q_2, q_3 \geq 0\}$, $\Omega = \mathbb{R}$. Temos então

$$Y_0(p) = 1, \quad Y_1(p) = -(p_1 + p_2), \quad Y_2(p) = (p_1 + p_2)^2 + p_2^2,$$





$$Y_3(p) = -(p_1 + p_2)(p_1^2 + 2p_1p_2 + 3p_2^2) - p_2^2p_3.$$

Podemos então concluir que todo parâmetro $q \in Q$ com $p_3 > 0$ é identificável. \square

Observação 110. A matriz

$$M(p) := (Y_0(p) \mid \cdots \mid Y_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{m,2nl}$$

é denominada matriz de *parâmetros de Markov*. Note que a aplicação

$$Q \ni p \mapsto M(p) \in \mathbb{R}^{m,2nl}$$

é injetiva em uma vizinhança de $p \in Q$, caso a matriz jacobiana $\frac{\partial M}{\partial p}(p)$ possua posto máximo. \square

6.3 Identificação Adaptativa: Introdução

Nesta secção consideramos sistemas do tipo

$$(6.5) \quad z' = \bar{A}z + f(t), \quad t \geq 0, \quad y = z,$$

onde $f \in C([0, \infty); \mathbb{R}^n)$. Supomos ainda que o sistema é observável em todo intervalo $[0, T]$, $T > 0$ (veja Definição 6). Nosso objetivo é discutir a identificabilidade de \bar{A} .

Em comparação com a abordagem da secção anterior, os parâmetros a serem identificados são os próprios coeficientes da matriz \bar{A} . A estratégia de identificação é assim resumida:

Ajuste dinamicamente um parâmetro $A(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ na base formada pelos vetores $z(t)$, de modo a obter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \bar{A}.$$

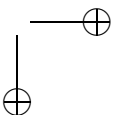
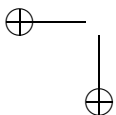
A realização desta idéia pode ser levada a cabo da seguinte forma:

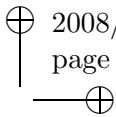
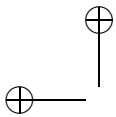
Passo 1. Projete um modelo:

$$(6.6) \quad x' = G(x, A; z(t), f(t)), \quad t \geq 0;$$

Passo 2. Projete uma regra de adaptação

$$(6.7) \quad A' = F(x, A; z(t)), \quad t \geq 0;$$





Passo 3. Mostre que

$$(6.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \bar{A}.$$

Note que x e A em (6.8) são soluções de (6.6) e (6.7), respectivamente. (As condições iniciais ainda precisam ser escolhidas.) O sistema (6.6), (6.7) juntamente com o processo (6.5) é denominado *sistema de referência adaptativo*.

Defina

$$w(t) := x(t) - z(t), \quad R(t) := A(t) - \bar{A}, \quad t \geq 0.$$

A realização dos passos **1.** e **2.** pode ser feita através de um dos seguintes métodos:

M1 Método de resíduos:

Modelo: $x' = Az(t) + f(t), t \geq 0;$

Regra de adaptação: $A' = -Q(x - z(t))z(t)^*, t \geq 0;$

A matriz $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ é a matriz de passo. Note que w, R satisfazem o sistema

$$(6.9) \quad w' = Rz(t), \quad R' = -Qwz(t)^*, \quad t \geq 0.$$

M2 Método do gradiente:

Modelo: $x' = Ax + f(t), t \geq 0;$

Regra de adaptação: $A' = -Q(x - z(t))x^*, t \geq 0;$

A matriz $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ é a matriz de passo. Para w, R obtemos um sistema não linear, que não pode ser desacoplado de x e A .

M3 Método do gradiente linearizado:

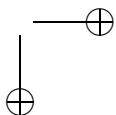
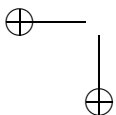
Modelo: $x' = Cx + (A - C)z(t) + f(t), t \geq 0,$

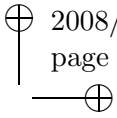
onde a matriz $C \in \mathbb{R}^{N,N}$ precisa ser escolhida adequadamente (veja abaixo);

Regra de adaptação: $A' = -Q(x - z)z(t)^*, t \geq 0;$

A matriz $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ é a matriz de passo. Para w, R obtemos o sistema linear não autônomo:

$$(6.10) \quad w' = Cw + Rz(t), \quad R' = -Qwz(t)^*, \quad t \geq 0.$$





Sobre a nomenclatura *gradiente linearizado* mencionamos, sem entrar em detalhes, que este método pode ser interpretado como um método de gradiente adaptativo.

Nesse ponto fica claro que a verificação de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \bar{A}$$

está relacionada com a estabilidade do ponto de equilíbrio $(0, \bar{A})$. Entretanto, os sistemas a serem analisados são não autônomos, o que torna a utilização da teoria espectral quase que impraticável. A fim de levar adiante a análise, consideramos com mais cuidado a idéia por trás de cada um dos métodos descritos acima.

O método **M1** está baseado na idéia de ajustar o parâmetro A , utilizando como informação o erro (resíduo) na equação de estado. A equação do modelo desempenha um papel secundário, pois a adaptação do parâmetro A é feita considerando-se unicamente a saída $y = z$ do sistema. A equação de evolução do erro (6.9) sugere, qualitativamente, como a matriz Q deve ser escolhida. De (6.9) temos

$$\frac{\partial \|R\|^2}{\partial t}(t) = -\langle R(t), QR(t) \rangle z(t)z(t)^*, \quad t \geq 0.$$

Na equação acima, o produto interno e a norma em $\mathbb{R}^{n,n}$ são definidos da seguinte forma:

$$\langle M, \hat{M} \rangle := \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \hat{m}_{ij}, \quad \|M\| := \sqrt{\langle M, M \rangle},$$

onde $M = (m_{ij})$, $\hat{M} = (\hat{m}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$.

O método **M3** é discutido a seguir em maiores detalhes. Note que dispomos de uma equação para o modelo da forma:

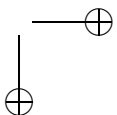
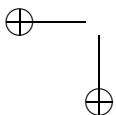
$$x' = Cx + (A - C)z(t) + f(t), \quad t \geq 0.$$

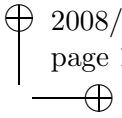
(Note que a equação acima descreve um modelo linear.) A regra de adaptação utilizada é

$$x' = F(x, z(t)), \quad t \geq 0.$$

Logo, obtemos para w, R o seguinte sistema:

$$(6.11) \quad w' = Cw + Rz(t), \quad R' = F(w + z(t), z(t)), \quad t \geq 0.$$





Procuramos agora um candidato à função de Lyapunov (note que, para sistemas não autônomos, não dispomos de maiores informações analíticas sobre o método de Lyapunov) da forma

$$V(w, R) := \frac{1}{2}(\langle w, Qw \rangle + \|R\|^2),$$

onde a matriz Q ainda precisa ser escolhida. Calculando a derivada total de V ao longo das trajetórias do sistema (6.11), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{d}{dt}V(w(t), R(t)) \\ &= -\langle w(t), Ww(t) \rangle + \langle Qw(t)z(t)^*, R(t) \rangle \\ &\quad + \langle F(w(t) + z(t), z(t)), R(t) \rangle, \end{aligned}$$

onde W é dado por

$$(6.12) \quad C^*Q + QC = -\frac{1}{2}W.$$

Escolhemos agora a regra de adaptação

$$A' = -Q(x - z(t))z(t)^*, \quad t \geq 0,$$

e a matriz Q , de forma a garantir que W seja positiva definida. Assim, temos que

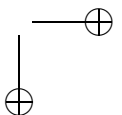
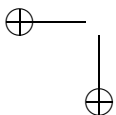
$$\dot{V}(t) \leq 0, \quad t \geq 0.$$

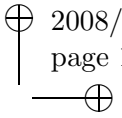
Resumindo, precisamos implementar o seguinte esquema:

- i) Escolher uma matriz estável C ;
- ii) Escolher uma matriz positiva definida W ;
- iii) Calcular Q através da equação (6.12);
- iv) Escolher uma condição inicial A_0 para $A(0)$;
- v) Calcular a solução do sistema

$$\begin{aligned} x' &= Cx + (A - C)z(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = z_0, \\ A' &= -Q(x - z)z(t)^* \quad \quad \quad , \quad t \geq 0, \quad A(0) = A_0. \end{aligned}$$

Note que o Teorema 78 garante a existência de uma solução Q (positiva definida) para a equação (6.12).





Exemplo 111. Considere o sistema em que

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} d_1 \sin \pi e_1 t \\ d_2 \sin \pi e_2 t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

A função f e o estado inicial z_0 podem ser calculados a partir daí. A seguir aplicamos o método **M3**, resolvendo o problema de valor inicial através do método de Runge–Kutta.

1º problema: $d_1 = d_2 = e_1 = 1, e_2 = 2$. Escolhemos as matrizes

$$C = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o problema de valor inicial, obtemos

$$A(3) = \begin{pmatrix} -2.0076 & -1.0014 \\ -1.0059 & -4.0014 \end{pmatrix}.$$

2º problema: $d_1 = d_2 = e_1 = e_2 = 1$. Escolhemos agora as matrizes

$$C = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o problema de valor inicial, obtemos

$$A(3) = \begin{pmatrix} -1.5002 & -1.5002 \\ -2.5002 & -2.5002 \end{pmatrix}.$$

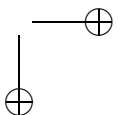
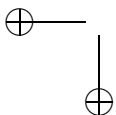
3º problema: $d_1 = 1, d_2 = 0, e_1 = 1, e_2 = 2$ e matrizes

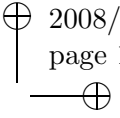
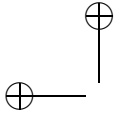
$$C = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o problema de valor inicial, obtemos

$$A(3) = \begin{pmatrix} -2.0001 & +5.0000 \\ -1.0001 & +5.0000 \end{pmatrix}.$$

A comparação entre os resultados obtidos para os três problemas é inevitável. Uma análise detalhada é apresentada na próxima seção. Por hora observe que, enquanto a trajetória do primeiro problema possui duas componentes distintas, as componentes da trajetória do segundo problema são idênticas. Já no terceiro problema, uma das componentes se anula identicamente. \square





6.4 Identificação Adaptativa: Estabilidade

A análise do método de identificação adaptativa **M3** depende tão somente de (6.10), o sistema de evolução do erro $(w, R) = (x - z, A - \bar{A})$. Recordando, o sistema é

$$(6.13) \quad w' = Cw + Rz(t), \quad w(0) = w_0, \quad R' = -QRwz(t)^*, \quad R(0) = R_0, \quad t \geq 0.$$

Uma vez que a trajetória z é uma função contínua, podemos, argumentando como na Secção A.4, garantir a existência de soluções locais para o sistema. Fazemos agora as seguintes hipóteses adicionais:

z é limitada, Q é positiva definida, C é uma matriz estável.

Lema 112. *O sistema (6.13) possui uma única solução (global), a qual está definida no intervalo $[0, \infty)$. Para esta solução (w, R) , são verdadeiras as afirmativas:*

a) *Existe constante positiva c , independente de w e R , tal que*

$$(6.14) \quad \sup_{t \geq 0} \{|w(t)|^2 + \|R(t)\|^2\} + \int_0^\infty \|w(s)\|^2 ds \leq c;$$

b) $(w, R) \in C^1((0, \infty); \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n});$

c) $w \in L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^n) \cap L^2([0, \infty); \mathbb{R}^n);$

d) $R \in L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^{n,n}), R' \in L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^{n,n}) \cap L^2([0, \infty); \mathbb{R}^{n,n});$

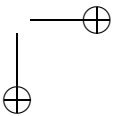
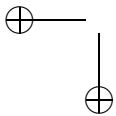
e) $\bar{V} := \lim_{t \rightarrow \infty} V(w(t), R(t))$ existe, onde V é definida por $V(w, R) := \frac{1}{2}(\langle w, Qw \rangle + \|R\|^2)$.

Demonstração: Uma vez que existe uma solução local, obtemos de (6.13) para cada t pertencente ao intervalo de existência da solução local

$$V(w(t), R(t)) - V(w(0), R(0)) = \int_0^t \langle w(s), Ww(s) \rangle ds,$$

$$\langle w(t), Qw(t) \rangle + \|R(t)\|^2 + \int_0^t \langle w(s), Ww(s) \rangle ds = \langle w(0), Qw(0) \rangle + \|R(0)\|^2,$$

$$c_1|w(t)|^2 + \|R(t)\|^2 + c_2 \int_0^t |w(s)|^2 ds \leq c_3,$$



onde as constantes c_1, c_2, c_3 independem de w e R . Este é exatamente o argumento que precisamos para garantir que a solução local pode ser estendida ao intervalo $[0, \infty)$. Note ainda que a estimativa (6.14) segue da última linha acima.

As afirmativas $b)$ e $c)$ seguem diretamente de (6.14). A afirmativa $d)$ segue de $R' = -QRwz(t)^*$, juntamente com (6.14). A afirmativa $e)$ é consequência do fato da aplicação $t \mapsto V(w(t), R(t))$ ser monótona não crescente. ■

Do Teorema 112, temos que o sistema

$$\begin{aligned} x' &= Cx + (A - C)z(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = z_0, \\ A' &= -Q(x - z)z(t)^*, \quad t \geq 0, \quad A(0) = A_0 \end{aligned}$$

possui uma única solução (x, A) definida no intervalo $[0, \infty)$ e ainda que esta solução possui as seguintes propriedades:

$$(x, A) \in C^1((0, \infty); \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n}), \quad (x, A) \in L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n}).$$

Teorema 113. *Seja w, R a solução de (6.13) para a condição inicial w_0, R_0 . Temos então para $x := w + z$ e $A := R + \tilde{A}$ que*

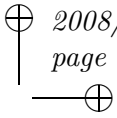
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - z(t) = 0.$$

Demonstração: De $w' = Cw + Rw$, segue que

$$\frac{d}{dt} \langle w, Qw \rangle = -\langle w, Ww \rangle + 2\langle Qw, Rz \rangle.$$

Da desigualdade (6.14), obtemos agora para $0 \leq t_1 \leq t_2$

$$\begin{aligned} |\langle w(t_2), Qw(t_2) \rangle - \langle w(t_1), Qw(t_1) \rangle| &\leq \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \langle w(s), Ww(s) \rangle ds \right| + 2 \left| \int_{t_1}^{t_2} \langle Qw(s), R(s)z(s) \rangle ds \right| \\ &\leq c_1 \int_{t_1}^{t_2} |w(s)|^2 ds + 2 \int_{t_1}^{t_2} |Qw(s)| |R(s)z(s)| ds \\ &\leq c_1 \int_{t_1}^{t_2} |w(s)|^2 ds + 2c_2 \int_{t_1}^{t_2} |w(s)| \|R(s)\| |z(s)| ds \\ &\leq c_1 \int_{t_1}^{t_2} |w(s)|^2 ds + 2c_3 \int_{t_1}^{t_2} |w(s)| ds \\ &\leq c_1 \int_{t_1}^{t_2} |w(s)|^2 ds + 2c_3 \sqrt{t_2 - t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} |w(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



de onde concluímos que

$$(6.15) \quad \forall r > 0, \forall \epsilon > 0, \exists t_0 \geq 0 : \\ \forall t_1, t_2 > t_0, |t_2 - t_1| < r, \text{ temos } |\langle w(t_2), Qw(t_2) \rangle - \langle w(t_1), Qw(t_1) \rangle| < \epsilon.$$

Suponha por contradição que w não converge para 0 quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso, existe $\delta > 0$ e uma seqüência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo

$$t_{n+1} - t_n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} t_n = \infty, \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} \langle w(t_n), Ww(t_n) \rangle \geq \delta.$$

De (6.15), obtemos para $r = 1, \epsilon = \delta/2$, um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle w(t), Ww(t) \rangle \geq \delta/2, \quad \forall t \in (t_n, t_n + 1), \quad n \geq n_0.$$

Temos então que

$$\int_0^\infty |w(s)|^2 ds \geq c \int_0^\infty \langle w(s), Qw(s) \rangle ds \\ \geq c \sum_{n=n_0}^\infty \langle w(s), Qw(s) \rangle \geq \sum_{n=n_0}^\infty 2 \frac{\delta}{2} = \infty.$$

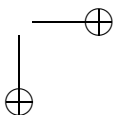
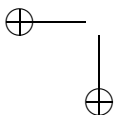
Esta última desigualdade, entretanto, contradiz (6.14). ■

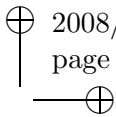
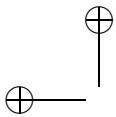
Uma consequência óbvia do Teorema 113 é que, no método **M3**, a saída x do modelo converge para a saída $y = z$ do sistema real. Neste caso, diz-se que o método possui a característica de identificar a saída. A propriedade que realmente procuramos, i.e. que o parâmetro $A(t)$ fornecido pela regra de adaptação convirja para \bar{A} , não pode ser obtida sem hipóteses adicionais (lembre do Exemplo 111).

Lema 114. *Seja $R(t) = A(t) - \bar{A}$. São verdadeiras as afirmativas:*

- a) *O limite $\bar{R} := \lim_{t \rightarrow \infty} \|R(t)\|$ existe;*
- b) *$R' \in L^2([0, \infty); \mathbb{R}^{n,n})$, $\lim_{t \rightarrow \infty} R'(t) = 0$.*

Demonstração: O item a) segue dos Lema 112 e Teorema 113. O item b) é consequência do Teorema 113 e do fato de $w \in L^2([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ (que segue do Lemma 112). ■





Teorema 115. *Suponha que existem $\delta > 0$, $\epsilon > 0$, $T > 0$ e uma seqüência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ e*

$$(6.16) \quad \forall V \in \mathbb{R}^{n,n}, \forall k \in \mathbb{N}, \exists s_k \in [t_k, t_k + T] \text{ tal que} \\ \left| \int_{s_k}^{s_k + \delta} Vz(s)ds \right| \geq \epsilon \|V\|.$$

Temos então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \bar{A}.$$

Demonstração: Do Lema 114 sabemos que $\bar{R} := \lim_{t \rightarrow \infty} \|R(t)\|$ existe. Suponha que $\bar{R} > 0$. Podemos então, sem perda de generalidade, supor que

$$\|R(t_k)\| \geq a := \bar{R}/2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da equação diferencial $w' = Cw + Rz(t)$, obtemos para $0 \leq t_1 \leq t_2$

$$(6.17) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} R(s)z(s)ds \right| \leq |w(t_2)| + |w(t_1)| + c\sqrt{t_2 - t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} |w(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da equação diferencial $R' = -Qwz(t)^*$, obtemos agora

$$(6.18) \quad \|R(t_2) - R(t_1)\| \leq c\sqrt{t_2 - t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} |w(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso temos, para todo $t \geq 0$, a seguinte desigualdade:

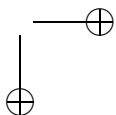
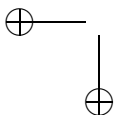
$$(6.19) \quad \left\| \int_t^{t+\delta} R(t)z(s)ds - \int_t^{t+\delta} R(s)z(s)ds \right\| \leq c \int_t^{t+\delta} \|R(t) - R(s)\| ds.$$

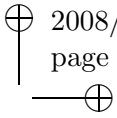
Defina $V_k := \|R(t_k)\|^{-1}R(t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, onde $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é a seqüência fornecida na hipótese do teorema. Argumentando agora com (6.16) e com a técnica de subseqüências diagonais, podemos garantir a existência de uma seqüência $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com

$$(6.20) \quad s_k \in [t_k, t_k + T], \quad k \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_{s_k}^{s_k + \delta} V_k z(s)ds \right| \geq c\epsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De (6.17), (6.18), (6.19) temos que

$$\int_{s_k}^{s_k + \delta} R(s)z(s)ds = 0, \quad \lim_{k \in \mathbb{N}} \|R(t_k) - R(s_k)\| = 0,$$





$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \int_{s_k}^{s_k + \delta} \|R(t_k) - R(s)\| ds = 0,$$

que, por sua vez, implica em

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \|R(t_k)\| \left| \int_{s_k}^{s_k + \delta} V_k z(s) ds \right| \right\} = \left| \int_{s_k}^{s_k + \delta} R(t_k) z(s) ds \right| = 0.$$

Esta última identidade contradiz (6.20), ficando assim provado o teorema. ■

Sem a hipótese adicional (6.16) é ainda possível provar a convergência de $A(t)$ para \bar{A} . Entretanto, como a unicidade do parâmetro \bar{A} é (em geral) desconhecida, o limite $\lim_t A(t)$ depende da escolha da condição inicial A_0 . Analisamos a seguir um resultado dessa natureza.

Teorema 116. *Suponha que a saída $y = z$ é uma função T -periódica. Então temos*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = A^\dagger + \mathcal{P}(A_0),$$

onde \mathcal{P} é a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^{n,n}$ sobre o subespaço

$$\mathcal{A}_o := \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid Az(s) = 0, \forall s \in [0, T]\}$$

e A^\dagger é o elemento de norma mínima no subespaço afim $\mathcal{A} := \bar{A} + \mathcal{A}_o$.

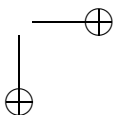
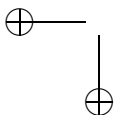
Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $A_0 \in \mathcal{A}_o^\perp$ (é fácil ver que o caso geral sempre pode ser reescrito desta forma). Da equação diferencial $x' = Cx + (A - C)z(t) + f(t)$, $t \geq 0$, segue que $A(t) \in \mathcal{A}_o^\perp$, para $t \geq 0$. Como a seqüência $\{R(kT)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, podemos extrair uma subseqüência $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que o limite $\hat{R} := \lim_j R(k_j T)$ existe. Como \mathcal{A}_o^\perp é fechado e $A(t) = \bar{A} + R(t)$, $t \geq 0$, temos $\hat{A} := \bar{A} + \hat{R} \in \mathcal{A}_o^\perp$.

Sejam $t_1, t_2 \in [0, T]$ com $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ e sejam

$$t_{1,j} := t_1 + k_j T, \quad t_{2,j} := t_2 + k_j T, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Argumentando como na demonstração do Teorema 115 com a extração de subseqüências diagonais, concluímos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_{1,j}}^{t_{2,j}} R(s) z(s) ds = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_{1,j}}^{t_{2,j}} (R(s) - R(k_j T)) ds = 0.$$



Da periodicidade de z segue agora que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_{1,j}}^{t_{2,j}} R(s)z(s)ds &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_{1,j}}^{t_{2,j}} R(k_j T)z(s)ds \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} R(k_j T)z(s)ds = \int_{t_1}^{t_2} \hat{R}z(s)ds. \end{aligned}$$

Como $t_1, t_2 \in [0, T]$ são arbitrários, temos $\hat{R}z(s) = 0$ para todo $s \in [0, T]$. Portanto,

$$\hat{R} \in \mathcal{A}_o \text{ e } \hat{A} = \bar{A} + \hat{R} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_o^\perp.$$

Isto prova que \hat{A} é a única matriz de norma mínima procurada. Da unicidade de \hat{A} , concluímos agora que a seqüência $\{A(kT)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge necessariamente para \hat{A} . Da equação diferencial $A' = -Qwz(t)^*$ obtemos, argumentando como na demonstração do Teorema 115, que $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \hat{A}$. ■

Comparando agora os resultados obtidos nos problemas do Exemplo 111 com o Teorema 116, fica claro o porquê de termos encontrado aproximações distintas para \bar{A} .

Observação 117. Os métodos descritos acima podem ainda ser utilizados quando a saída é conhecida apenas em intervalos finitos da forma $[0, T]$. Para tanto, basta reiniciar o método utilizando como condição inicial $A_0 = A(T)$, onde $A(T)$ é a primeira aproximação obtida para \bar{A} . Obviamente, o método pode ser *reiniciado* quantas vezes se desejar. □

Exemplo 118. Considere novamente o sistema do Exemplo 111 em que

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} d_1 \sin \pi e_1 t \\ d_2 \sin \pi e_2 t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Reconstruímos o parâmetro \bar{A} utilizando o método **M3**, de acordo com a Observação 117 com $T = 1$. Como no Exemplo 111, os problemas de valor inicial são resolvidos através do método de Runge–Kutta.

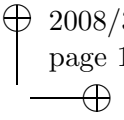
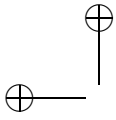
Considere o primeiro problema, em que $d_1 = d_2 = e_1 = 1, e_2 = 2$ e

$$C = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Reiniciando o método **M3** por três vezes, obtemos a seguinte aproximação para \bar{A} :

$$\begin{pmatrix} -2.0060 & -1.0017 \\ -1.0042 & -4.0015 \end{pmatrix}.$$

□



Exercícios

6.1. Considere o sistema

$$z' = pz + u, \quad y = z,$$

com $Z_0 := \{0\}$, $Q := \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}$, do Exemplo 105. Verifique que qualquer parâmetro $p \in \mathbb{R}$ é identificado pelo experimento $(0, \bar{u})$, $\bar{u}(t) := t$, para $t \in \mathbb{R}$.

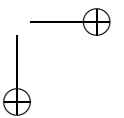
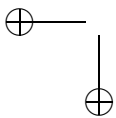
Quais parâmetros $p \in \mathbb{R}$ podem ser identificados pelo experimento $(0, \bar{u})$, $\bar{u}(t) \equiv 1$?

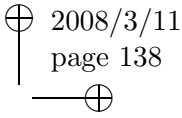
6.2. Considere o sistema do Exemplo 109:

$$\begin{aligned} z'_1 &= -(p_1 + p_2)z_1 + p_2z_2u \\ z'_2 &= p_2z_1 - p_3z_2 \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

onde $Z_0 := \{(0, 0)\}$, $Q := \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 \mid q_1, q_2, q_3 \geq 0\}$, $\Omega = \mathbb{R}$. Verifique a afirmação de que todo parâmetro $q \in Q$ com $p_3 > 0$ é identificável.

Encontre $q_1, q_2 \in Q$ tais que $\mathcal{L}(z, u, q_1) = \mathcal{L}(z, u, q_2)$, para todo $(z, u) \in Z_0 \times \Omega$.



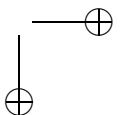
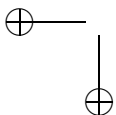


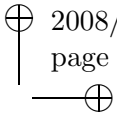
Capítulo 7

Cálculo Variacional

Neste capítulo são discutidos resultados preliminares da teoria conhecida como cálculo variacional. De forma simplificada, tal teoria pode ser entendida como extensão à uma família particular de problemas de otimização (em espaços de dimensão infinita), de resultados da análise em várias variáveis, os quais permitem caracterizar os candidatos à solução de problemas de otimização em \mathbb{R}^n . Um papel fundamental no desenvolvimento da teoria é desempenhado pelo teorema de multiplicadores de Lagrange e pelas condições de Kuhn–Tucker, discutidos no Apêndice B (veja Secção B.1).

Na Secção 7.1 são apresentados os problemas variacionais e introduzidos os conceitos de *mínimos locais* e de *variações de Gâteaux*. Sob hipóteses adicionais de convexidade, é apresentado um resultado sobre condições suficientes para otimalidade (equação de Euler–Lagrange). Na Secção 7.2 é apresentado um lema auxiliar (lema de du Bois–Raymond) de fundamental importância para obtenção de condições necessárias. Na Secção 7.3 analisamos condições necessárias para otimalidade, apresentadas na forma da *equação de Euler–Lagrange* e de sua primeira integral. Nas Secções 7.4 e 7.5 estendemos os resultados anteriores para problemas com trajetórias contínuas por partes e para problemas vetoriais respectivamente.





7.1 Problemas Variacionais e Convexidade

Um problema típico do cálculo das variações é a minimização de funcionais do tipo

$$(7.1) \quad I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt,$$

onde o intervalo $[a, b]$ é fixo e a aplicação $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é conhecida. A minimização do funcional definido em (7.1) é realizada entre as funções $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis em $[a, b]$.¹

É comum considerar o problema de minimizar (7.1) sujeito a diferentes restrições como:

- Impor condições a y nas extremidades do intervalo, i.e. $y(a) = y_a$ e/ou $y(b) = y_b$;
- Exigir que $g(t, y(t), y'(t)) \equiv 0$ para $t \in [a, b]$, onde $g : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- Exigir que $\int_a^b g(t, y(t), y'(t)) dt = c$, onde $g : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$;

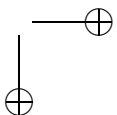
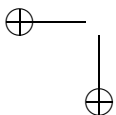
O primeiro tipo de restrição é denominado *condição de contorno* e pode ser exigido em ambos ou em apenas um dos extremos do intervalo $[a, b]$. O segundo tipo é denominado *restrição lagrangeana*, devido à sua semelhança com as restrições feitas nos problemas de otimização restritos em dimensão finita. O terceiro tipo é chamado *restrição isoperimétrica* (ou integral), devido ao fato dos primeiros problemas de interesse relacionados a esta restrição exigirem que os candidatos y tivessem todos o mesmo *comprimento*, o que está relacionado com a escolha $g(t, y, y') = |y'|$.

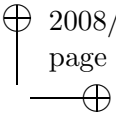
As restrições acima podem aparecer de forma combinada, de modo que um mesmo problema pode estar sujeito a restrições de diferentes tipos, ou a várias restrições do mesmo tipo. Analisamos inicialmente o tipo mais simples de restrição, a saber: as condições de contorno. Problemas variacionais sujeitos a restrições lagrangeanas e isoperimétricas são discutidos na Secção 9.2. Sendo assim, considere a família de problemas

¹Adotamos no texto a seguinte notação:

$$C[a, b] := \{y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid y \text{ contínua}\},$$

$$C^1[a, b] := \{y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid y \text{ diferenciável em } [a, b], y' \in C[a, b]\}.$$





variacionais

$$(7.2) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in Y_{ad} := \{y \in C^1[a, b] \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}. \end{cases}$$

O conjunto Y_{ad} é denominado conjunto das *funções admissíveis* (ou viáveis). Da análise real, sabemos que é preciso distinguir entre mínimos locais e globais do funcional I .

Definição 119. $\bar{y} \in Y_{ad}$ é denominado *mínimo global* de $I : Y_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ quando

$$I(y) \geq I(\bar{y}),$$

para todo $y \in Y_{ad}$. □

Definimos a seguir os mínimos locais. A importância destes mínimos vem do fato de que condições apenas necessárias, em geral, os englobam juntamente com os mínimos globais. Antes da definição, porém, relembremos alguns fatos importantes sobre a topologia dos espaços $C[a, b]$ e $C^1[a, b]$.

O espaço vetorial $C[a, b]$ é completo (espaço de Banach) com a norma do supremo (ou de Tschebyscheff), definida por

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} \{|f(t)|\}, \quad f \in C[a, b].$$

Assim sendo, esta norma induz uma métrica (distância) em $C[a, b]$, definida por

$$dist(f, g) := \|f - g\|_\infty, \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

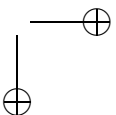
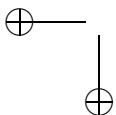
Analogamente, podemos construir uma métrica para $C^1[a, b]$ com a distância

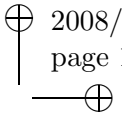
$$\|f - g\|_{1, \infty} := \|f - g\|_\infty + \|f' - g'\|_\infty, \quad \forall f, g \in C^1[a, b].$$

Uma vez lembrados estes conceitos, caracterizamos a seguir os pontos de mínimo local de um funcional $I : Y_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 120. $\bar{y} \in Y_{ad}$ é denominado *mínimo local fraco* de I quando

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall y \in Y_{ad} \text{ com } \|y - \bar{y}\|_{1, \infty} < \delta \text{ temos } I(y) \geq I(\bar{y}).$$





$\bar{y} \in Y_{ad}$ é denominado *mínimo local forte* de I quando

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall y \in Y_{ad} \text{ com } \|y - \bar{y}\|_\infty < \delta \text{ temos } I(y) \geq I(\bar{y}).$$

□

De especial interesse para os problemas variacionais são os mínimos locais fracos. Note que uma vizinhança forte de $y \in Y_{ad}$ possui mais elementos do que a vizinhança fraca correspondente. Portanto, a exigência de y ser mínimo local forte é mais restritiva.

A seguir, é apresentada uma definição que estende o conceito de derivada parcial de aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e é de importância fundamental para a caracterização de uma solução do problema (7.2).

Definição 121. Seja Y um espaço vetorial e $I : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Dados $y, v \in Y$, definimos a *variação de Gâteaux* de I em y na direção de v como

$$\delta I(y; v) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(y + \varepsilon v) - I(y)}{\varepsilon},$$

quando o limite existe.

□

Note que a Definição 121 nos permite concluir que

$$\delta I(y; v) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0},$$

caso a derivada total em relação à variável ε da aplicação real

$$\mathbb{R} \ni \varepsilon \mapsto I(y + \varepsilon v) \in \mathbb{R}$$

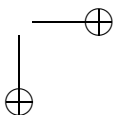
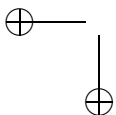
esteja bem definida em $\varepsilon = 0$. Da Definição 121 segue ainda a linearidade da variação de Gâteaux em relação ao funcional I , i.e. fixados $y, v \in Y$ temos

$$(7.3) \quad \delta(\alpha I_1 + \beta I_2)(y; v) = \alpha \delta I_1(y; v) + \beta \delta I_2(y; v), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pressuposto, é claro, que as variações envolvidas existam. Outra propriedade interessante se verifica em relação à direção de derivação:

$$(7.4) \quad \delta I(y; \alpha v) = \alpha \delta I(y; v), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Novamente supondo que as variações envolvidas existam.



Exemplo 122. Seja $Y = \mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(Y; \mathbb{R})$. Dados $y, v \in Y$, temos

$$\delta f(y; v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(y + \varepsilon v) - f(y)}{\varepsilon} = \langle \nabla f(y), v \rangle,$$

que é a derivada parcial de f em y na direção do vetor v . \square

Exemplo 123. Seja $Y = C^1[a, b]$ e $I : Y \ni y \mapsto \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt \in \mathbb{R}$, onde L é uma aplicação $C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Dados $y, v \in Y$, temos

$$\begin{aligned} \delta I(y; v) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \left[\left. \frac{d}{d\varepsilon} L(t, y + \varepsilon v, y' + \varepsilon v') \right|_{\varepsilon=0} \right] dt \\ &= \int_a^b [L_y(t, y(t), y'(t))v(t) + L_{y'}(t, y(t), y'(t))v'(t)] dt. \end{aligned}$$

\square

Os primeiros resultados relativos à caracterização das soluções de (7.2) surgem quando trabalhamos com hipóteses sobre a convexidade da função objetivo. Isto justifica a introdução do seguinte conceito.

Definição 124. Dado um espaço vetorial Y e um funcional $I : D \subset Y \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I é *convexo em D* quando, para todo par de elementos $y, v \in Y$, temos

$$I(\alpha y + (1 - \alpha)v) \leq \alpha I(y) + (1 - \alpha)I(v), \quad \alpha \in [0, 1].$$

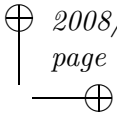
I é denominado *estritamente convexo em D* quando a desigualdade na expressão acima for estrita. \square

Caso a variação de Gâteaux $\delta I(y; v)$ do funcional I esteja definida para todos elementos $y, y + v \in D$, é possível fornecer uma definição equivalente de convexidade:

Lema 125. *Seja Y um espaço vetorial e $I : D \subset Y \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo par de elementos y, v de Y satisfazendo $y, y + v \in D$, a variação de Gâteaux $\delta I(y; v)$ existe. São equivalentes as afirmações:*

- a) I é convexo em D ;
- b) Para todo par de elementos $y, v \in Y$ com $y, y + v \in D$, temos

$$I(y + v) - I(y) \geq \delta I(y; v).$$



E ainda, I é estritamente convexo em D quando a igualdade na desigualdade do item b) ocorre se e somente se $v = 0$.

Demonstração: É bastante demonstrarmos a equivalência entre a) e b).
 a) \implies b) Note que, para $0 < \varepsilon < 1$, podemos escrever $y + \varepsilon v$ na forma da combinação linear convexa

$$y + \varepsilon v = (1 - \alpha)y + \alpha(y + v),$$

com $\alpha = \varepsilon \in [0, 1]$. Da definição de convexidade, segue que

$$I(y + \varepsilon v) \leq (1 - \varepsilon)I(y) + \varepsilon I(y + v),$$

de onde obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon} [I(y + \varepsilon v) - I(y)] \leq I(y + v) - I(y).$$

Tomando agora o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos a desigualdade em b).
 b) \implies a) Dados $y, v \in Y$ e $\alpha \in [0, 1]$, defina $w := \alpha y + (1 - \alpha)v$. Da hipótese b) segue

$$\delta I(w; h_1) \leq I(v) - I(w), \quad \delta I(w; h_2) \leq I(y) - I(w),$$

para $h_1 = \alpha(v - y)$, $h_2 = (1 - \alpha)(y - v)$. De (7.4) segue agora que

$$\frac{1}{\alpha} [I(v) - I(w)] \geq \delta I(w; (v - y)) \geq \frac{1}{(1 - \alpha)} [I(w) - I(y)],$$

de onde obtemos $\alpha I(y) + (1 - \alpha)I(v) \geq I(w)$ e o teorema fica provado. ■

Apresentamos agora uma condição suficiente para um problema de otimização em que a função objetivo é convexa.

Lema 126. *Dado um espaço vetorial Y e um funcional convexo $I : D \subset Y \rightarrow \mathbb{R}$, então cada \bar{y} que satisfaz*

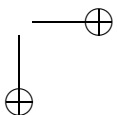
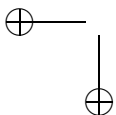
$$\delta I(\bar{y}; v) = 0, \quad \forall \bar{y} + v \in D,$$

minimiza I em D . Se I é estritamente convexo, então \bar{y} é único.

Demonstração: Dado $y \in D$, defina $v := y - \bar{y} \in Y$. Logo,

$$I(y) - I(\bar{y}) = I(\bar{y} + v) - I(\bar{y}) \geq \delta I(\bar{y}; v) = 0.$$

A unicidade de \bar{y} é consequência imediata da definição de convexidade estrita. ■



Estamos agora aptos para formular um resultado que fornece condições suficientes para determinar a solução do problema (7.2).

Teorema 127. *Seja $Y = C^1[a, b]$, $Y_{ad} = \{y \in Y; y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$, $I : Y_{ad} \ni y \mapsto \int_a^b L(t, y, y') dt \in \mathbb{R}$, onde $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ satisfaz*

$$(7.5) \quad L(t, y + v, z + w) - L(t, y, z) \geq L_y(t, y, z)v + L_z(t, y, z)w,$$

para todo $(t, y, z), (t, y + z, z + w) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$. São verdadeiras as afirmações:

- a) I é convexo em Y_{ad} ;
- b) Se L é tal que a igualdade em (7.5) ocorre se e somente se $vw = 0$, então I é estritamente convexo em Y_{ad} ;
- c) Cada $\bar{y} \in Y_{ad}$ que satisfaz a equação diferencial

$$(7.6) \quad \frac{d}{dt} L_{y'}(t, \bar{y}, \bar{y}') = L_y(t, \bar{y}, \bar{y}'), \quad t \in [a, b]$$

é um mínimo global de I em Y_{ad} .

- d) Se a hipótese do item b) é verificada, o elemento $\bar{y} \in Y_{ad}$ que satisfaz a equação diferencial do item c) é o único mínimo global de I em Y_{ad} .

Demonstração: Dados $y, y + v \in Y_{ad}$, a desigualdade (7.5) implica em

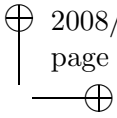
$$(7.7) \quad L(t, y + v, y' + v') - L(t, y, y') \geq L_y(t, y, y')v + L_{y'}(t, y, y')v'.$$

Integrando, obtemos

$$\int_a^b [L(t, y + v, y' + v') - L(t, y, y')] dt \geq \int_a^b [L_y(t, y, y')v + L_{y'}(t, y, y')v'] dt,$$

i.e. $I(y + v) - I(y) \geq \delta I(y; v)$, provando o item a). Se a hipótese em b) é verdadeira, então dados $y, y + v \in Y_{ad}$ a igualdade em (7.7) ocorre se e somente se $v(t)v'(t) \equiv 0$ em $[a, b]$. Note que $v(t)v'(t) = 1/2(v^2(t))'$, logo $v(t)v'(t) \equiv 0$ se e somente se $v^2(t)$ é constante. Note ainda que $v^2(a) = 0$.² Portanto, $I(y + v) - I(y) = \delta I(y; v)$ se e somente se $v \equiv 0$ e o item b) fica provado.

²De fato, como y e $y + v$ pertencem a Y_{ad} , então $v(a) = v(b) = 0$.



Os itens *c)* e *d)* são os mais importantes do teorema. Suponha que $\bar{y} \in Y_{ad}$ é solução da equação diferencial (7.6). Logo, para $v \in Y$ com $\bar{y} + v \in Y_{ad}$ temos

$$\begin{aligned} \delta I(\bar{y}; v) &= \int_a^b [L_y(t, y, y')v + L_{y'}(t, y, y')v'] dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} L_{y'}(t, y, y')v \right] dt \\ &= [L_{y'}(t, y(t), y'(t))v(t)]_a^b = 0. \end{aligned}$$

Como I é convexo (veja o item *a)*), o item *c)* segue do Lema 126. Se a hipótese do item *b)* é verificada, então I é estritamente convexo e a unicidade de \bar{y} segue da segunda parte do Lema 126. ■

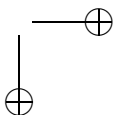
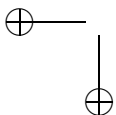
A equação diferencial (7.6) é a conhecida *equação de Euler–Lagrange* – uma das mais importantes do cálculo variacional. O Teorema 127, além de fornecer condições suficientes para garantir a convexidade do funcional I , garante ainda que, se I é convexo, a equação de Euler–Lagrange representa uma condição suficiente para otimalidade de $y \in Y_{ad}$. Voltaremos a analisar esta equação diferencial de segunda ordem na Secção 7.3, quando investigamos condições necessária para otimalidade.

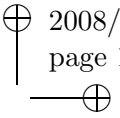
7.2 Lemas de du Bois–Reymond e Lagrange

Nesta secção estudamos um lema, cuja formalização impulsionou fortemente o desenvolvimento do cálculo variacional. Trata-se do *lema de du Bois–Reymond*, que foi objeto de investigação de matemáticos como Euler e Lagrange, tendo sido apresentado por P. du Bois–Reymond no ano de 1879. Foi entretanto K. Weierstrass que em seus seminários (1875–1882) apresentou pela primeira vez uma demonstração clara e completa. A demonstração deste lema utiliza um resultado auxiliar que enunciamos a seguir.

Lema 128. *Seja $h \in C[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b h(t) v'(t) dt = 0,$$





para todo $v \in C_0^1[a, b] := \{w \in C^1[a, b] \mid w(a) = w(b) = 0\}$. Então a função h é constante no intervalo $[a, b]$.

Demonstração: Dado $c \in \mathbb{R}$ defina a função $v(t) := \int_a^t (h(s) - c) ds$, $t \in [a, b]$. Por construção, $v \in C^1[a, b]$ e $v(a) = 0$. A escolha particular $\bar{c} := 1/(b - a) \int_a^b h(s) ds$ gera uma função \bar{v} que satisfaz

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b (h(t) - \bar{c})^2 dt &= \int_a^b (h(t) - \bar{c})\bar{v}'(t) dt \\ &= \int_a^b h(t)\bar{v}'(t) dt - [\bar{c}\bar{v}]_a^b = 0, \end{aligned}$$

provando assim que $h(t) = \bar{c}$, para $t \in [a, b]$. ■

Lema 129 (du Bois–Reymond). *Seja $f \in C[a, b]$ tal que, para todo $v \in C^1[a, b]$ com $v(a) = v(b) = 0$, tenhamos*

$$\int_a^b f(t)v(t) dt = 0.$$

Então, $f \equiv 0$ em $[a, b]$.

Demonstração: Definindo $g(t) := \int_a^t f(s) ds$, segue da hipótese (integrando por partes) que

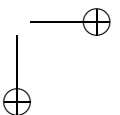
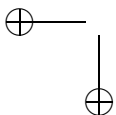
$$-\int_a^b g(s)v'(t) dt = 0, \forall v \in C_0^1[a, b].$$

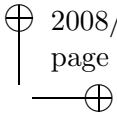
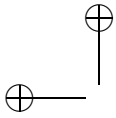
O Lema 128 implica que $g(t) = c$, $t \in [a, b]$. O lema de du Bois-Reymond segue agora da identidade $g' = f$. ■

As funções v utilizadas nos Lemas 128 e 129 são denominadas *funções teste*, devido ao papel por elas desempenhado. O espaço $C_0^1[a, b]$ é também denominado *espaço de funções teste*. Discutimos a seguir uma generalização do lema de du Bois–Reymond, formulada por Lagrange.

Lema 130 (Lagrange). *Seja $f \in C[a, b]$ tal que, para todo $v \in C_0^k[a, b] := \{v \in C^k[a, b] \mid v^{(j)}(a) = v^{(j)}(b) = 0, j = 0, 1, \dots, k\}$, tenhamos*

$$\int_a^b f(t)v(t) dt = 0.$$





Então $f \equiv 0$ em $[a, b]$.

Demonstração: Suponha que $f(t_0) > 0$ para algum $t_0 \in (a, b)$. Como f é contínua, existe $[c, d] \subset (a, b)$ tal que

$$t_0 \in (c, d) \quad \text{e} \quad f(t) \geq \frac{1}{2}f(t_0) > 0, \quad t \in (c, d).$$

Definindo a função

$$v(t) := \begin{cases} [(t-c)(d-t)]^{k+1}, & t \in [c, d] \\ 0, & t \in [a, b]/[c, d] \end{cases}$$

observamos que v é não negativa e $v \in C_0^k[a, b]$. Por construção, temos que $\int_a^b f v dt = \int_c^d f v dt > 0$, o que contradiz a hipótese. Logo, $f(t) \leq 0$, $t \in (a, b)$. A continuidade de f implica que $f(t) \leq 0$ em $[a, b]$. Analogamente, provamos que $f(t) \geq 0$ em $[a, b]$. ■

7.3 Equação de Euler-Lagrange

Suponha que $L : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes continuamente diferenciável e que o mínimo local fraco $\bar{y} \in Y_{ad} := \{y \in C^1[a, b] \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$ do funcional I satisfaz $\bar{y} \in C^2[a, b]$. Dados $\eta \in C_0^1[a, b]$ e $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, definimos a família de funções admissíveis

$$y(\cdot; \varepsilon) := \bar{y}(\cdot) + \varepsilon \eta(\cdot), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

Por construção, temos $\|y(\cdot; \varepsilon) - \bar{y}\|_{1, \infty} = |\varepsilon| \|\eta\|_{1, \infty}$. Note ainda que, pelo fato de \bar{y} ser mínimo local fraco de I em Y_{ad} , temos

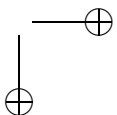
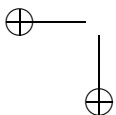
$$J(\varepsilon) := I(y(\cdot; \varepsilon)) \geq I(\bar{y}) = J(0), \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

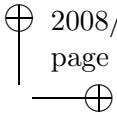
Isto é, $\bar{\varepsilon} = 0$ é mínimo local da função real J , definida pela composição de I com a família $y(\cdot; \varepsilon)$. Da análise real sabemos que uma condição necessária para que isto aconteça (caso J seja diferenciável) é que

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Da Definição 121, segue que

$$(7.8) \quad \delta I(\bar{y}; \eta) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} I(\bar{y} + \varepsilon \eta) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$





é uma condição necessária para que \bar{y} seja mínimo local de I em Y_{ad} . Uma vez que L é, em particular, continuamente diferenciável, temos (veja Exemplo 123)

$$(7.9) \quad \delta I(\bar{y}; \eta) = \int_a^b [L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))\eta(t) + L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))\eta'(t)] dt.$$

Note que a função

$$\lambda : [a, b] \ni t \mapsto L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \in \mathbb{R}$$

é continuamente diferenciável em $[a, b]$, devido às hipóteses feitas sobre L e \bar{y} . Como η satisfaz as condições de contorno $\eta(a) = \eta(b) = 0$, obtemos integrando (7.9) por partes

$$(7.10) \quad \delta I(\bar{y}; \eta) = \int_a^b \left[L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) - \frac{d}{dt} \lambda(t) \right] \eta(t) dt.$$

Note que (7.10) é válida para todo $\eta \in C_0^1[a, b]$. Logo, segue do lema de du Bois–Reymond (Lema 129) que

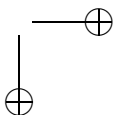
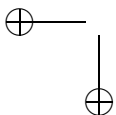
$$(7.11) \quad L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) - \frac{d}{dt} L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

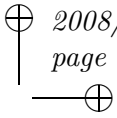
Em (7.11) podemos reconhecer a equação de Euler–Lagrange obtida na Secção 7.1 (veja equação (7.6)). Esta equação diferencial de segunda ordem nos fornece uma condição necessária para determinação de mínimos locais de um funcional. Como foi visto no Teorema 127, esta condição é também suficiente para otimalidade, caso o funcional I seja convexo. Podemos resumir a discussão acima no seguinte teorema:

Teorema 131. *Seja $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes continuamente diferenciável e $\bar{y} \in C^2[a, b]$ um mínimo local fraco do problema (7.2). Então, \bar{y} é solução do problema de valor de contorno*

$$(7.12) \quad \begin{cases} L_y(t, y, y') - \frac{d}{dt} L_{y'}(t, y, y') = 0, & t \in (a, b) \\ y(a) = y_a, & y(b) = y_b. \end{cases}$$

Demonstração: Veja desenvolvimento acima. ■





Observação 132 (problemas com fronteira livre). Análogos ao problema (7.2) são os problemas em que apenas uma condição de contorno é imposta, por exemplo a condição $y(b) = y_b$. Construindo a família de funções admissíveis

$$y(\cdot; \varepsilon) := \bar{y}(\cdot) + \varepsilon\eta(\cdot), \quad \eta \in C^1[a, b], \quad \eta(b) = 0,$$

obtemos através de um desenvolvimento análogo ao anterior, a condição necessária

$$(7.13) \quad \begin{aligned} 0 = \delta I(\bar{y}; \eta) &= L_{y'}(a, \bar{y}(a), \bar{y}'(a))\eta(a) \\ &- \int_a^b \left[L_y(t, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{dt} L_{y'}(t, \bar{y}, \bar{y}') \right] \eta(t) dt, \end{aligned}$$

para todo $\eta \in C^1[a, b]$ com $\eta(b) = 0$. Note que (7.13) vale em particular para $\eta \in C_0^1[a, b]$, de onde segue (novamente argumentando com o Lema 129) a equação de Euler–Lagrange. Tomando agora em (7.13) $\eta \in C^1[a, b]$ com $\eta(b) = 0$ e $\eta(a) \neq 0$, obtemos a condição extra

$$(7.14) \quad L_{y'}(a, \bar{y}(a), \bar{y}'(a)) = 0.$$

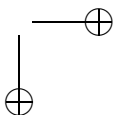
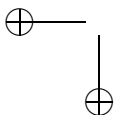
Sendo assim, para problemas com com fronteira livre, obtemos, além da equação de Euler–Lagrange, uma condição de contorno para \bar{y} no extremo do intervalo $[a, b]$, onde o problema não exige nenhuma restrição. Tal condição surge *naturalmente* da formulação variacional do problema de otimização, sendo por isso denominada *condição de contorno natural*. Resumindo, para que \bar{y} seja solução do problema

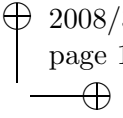
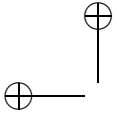
$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in \{y \in C^1[a, b] \mid y(b) = y_b\} \end{cases}$$

é necessário que \bar{y} seja solução do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} L_y(t, y, y') - \frac{d}{dt} L_{y'}(t, y, y') = 0 \\ y(b) = y_b, \quad L_{y'}(a, y(a), y'(a)) = 0. \end{cases}$$

Note que, como ocorre no Teorema 131, obtemos uma condição necessária expressa na forma (implícita) de uma equação diferencial de segunda ordem (equação de Euler–Lagrange) com duas condições de contorno. \square





As hipóteses $\bar{y} \in C^2[a, b]$ e $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ são demasiado restritivas e devem ser enfraquecidas. Esta consideração nos leva a analisar uma aplicação do lema de du Bois–Reymond diferente da utilizada na obtenção da equação (7.10) (veja exercício 7.3).

Teorema 133. *Seja $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e $\bar{y} \in C^1[a, b]$ um mínimo local fraco para o problema (7.2). Então, a aplicação*

$$[a, b] \ni t \longmapsto L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \in \mathbb{R}$$

é continuamente diferenciável e \bar{y} é solução do problema de valor de contorno (7.12) no Teorema 131.

Demonstração: Repetindo a argumentação feita na demonstração do Teorema 131, obtemos para $\eta \in C_0^1[a, b]$

$$(7.15) \quad \int_b^a [L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \eta(t) + L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \eta'(t)] dt = 0.$$

Integrando por partes e observando que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, segue que

$$\int_a^b \left[- \int_a^t L_y(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s)) ds + L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \right] \eta'(t) dt = 0.$$

O Lema 128 implica na existência de uma constante c que satisfaz

$$(7.16) \quad - \int_a^t L_y(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s)) ds + L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) = c, \quad t \in [a, b].$$

Como a aplicação

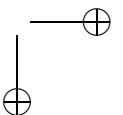
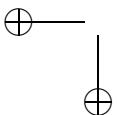
$$[a, b] \ni t \longmapsto - \int_a^t L_y(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s)) ds \in \mathbb{R}$$

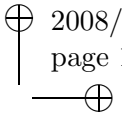
é continuamente diferenciável, segue de (7.16) que a aplicação

$$[a, b] \ni t \longmapsto L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \in \mathbb{R}$$

também é continuamente diferenciável (apesar de exigirmos apenas $\bar{y} \in C^1[a, b]$). Podemos então derivar em relação a t a expressão (7.16), obtendo assim a equação de Euler–Lagrange.³ ■

³Não é possível deduzir a equação de Euler–Lagrange integrando (7.15) por partes, como na demonstração do Teorema 131, pois para diferenciar a aplicação $t \mapsto L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))$ é preciso usar a regra de cadeia e a função \bar{y} , envolvida na composição, não é suficientemente regular. Entretanto, é possível provar a diferenciabilidade de \bar{y}' em todo $t_0 \in [a, b]$ com $L_{y'y'}(t_0, \bar{y}(t_0), \bar{y}'(t_0)) \neq 0$, caso L seja uma função C^3 .





As considerações feitas na Observação 132 sobre as condições de contorno naturais continuam válidas no caso $L \in C^1$, $\bar{y} \in C^1$, como o leitor pode facilmente verificar.

Definição 134. As soluções da equação diferencial de Euler–Lagrange (sem condição de contorno) são denominadas *funções estacionárias* ou *extremais*, independente do fato de serem ou não soluções do problema variacional. \square

Observação 135. Suponha que L é uma aplicação continuamente diferenciável e que $y \in Y_{ad}$ é uma função estacionária. Integrando a equação de Euler–Lagrange, obtemos

$$(7.17) \quad L_{y'}(t, y, y') = \int_a^t L_y(s, y(s), y'(s)) ds + const.$$

Fazendo a hipótese extra $y \in C^2[a, b]$, segue da equação de Euler–Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(t, y, y') &= L_t(t, y, y') + L_y(t, y, y')y' + L_{y'}(t, y, y')y'' \\ &= L_t(t, y, y') + \frac{d}{dt}[L_y(t, y, y')y'], \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$L_t(t, y, y') = \frac{d}{dt}[L(t, y, y') - y'L_y(t, y, y')].$$

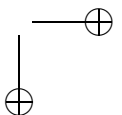
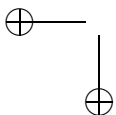
Integrando esta expressão, obtemos a equação

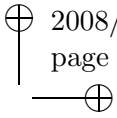
$$(7.18) \quad L(t, y, y') - y'L_y(t, y, y') = \int_a^t L_t(s, y(s), y'(s)) ds + const.$$

que é conhecida como *primeira integral* da equação de Euler–Lagrange. Note a semelhança com a equação (7.17) e também o fato da exigência $\bar{y} \in C^2[a, b]$ não aparecer explicitamente na equação.

A equação (7.18) pode ainda ser deduzida no caso geral em que o extremal y é uma função apenas $C^1[a, b]$. Uma demonstração simples, porém trabalhosa, pode ser encontrada em [Tr, Capítulo 6]. Essa demonstração é levada a cabo acoplando-se a abordagem variacional com mudanças de coordenadas convenientes.

No caso autônomo, i.e., quando a função $L = L(y, y')$ não depende explicitamente de t , é possível obter a equação (7.18) para extremais





$y \in C^1[a, b]$ de uma forma simples. De fato, da equação de Euler–Lagrange segue que

$$\begin{aligned} 0 &= y' \left[L_y(y, y') - \frac{d}{dt} L_{y'}(y, y') \right] \\ &= L_t(y, y') + y' L_y(y, y') \pm y'' L_{y'}(y, y') - y' \frac{d}{dt} L_{y'}(y, y') \\ &= \frac{d}{dt} L(y, y') - \frac{d}{dt} [y' L_{y'}(y, y')]. \end{aligned}$$

Integrando esta última expressão, obtemos a equação (7.18) para o caso autônomo

$$L(y, y') - y' L_{y'}(y, y') = \text{const.}$$

□

Os três exemplos a seguir ilustram como a equação de Euler–Lagrange é utilizada para determinar a solução de alguns problemas clássicos do cálculo variacional. São esses: determinação de geodésicas no plano; determinação de geodésicas na esfera; a Braquistócrona (ver Secção 1.2.7).

Exemplo 136. Analisamos o problema de encontrar, dados dois pontos (t_0, y_0) e (t_1, y_1) no plano, a curva de menor comprimento que os une. Representamos as curvas admissíveis com parametrizações do tipo

$$y : [t_0, t_1] \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}; \quad y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1.$$

Supondo as curvas admissíveis continuamente diferenciáveis, obtemos o seu comprimento pela expressão

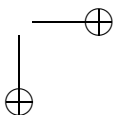
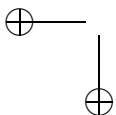
$$J(y) := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(t)} dt.$$

Podemos então resumir o problema como:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(y) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in \{C^1[t_0, t_1] \mid y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1\} \end{cases}$$

onde $L(t, y, y') = (1 + (y')^2)^{1/2}$. Da equação de Euler–Lagrange obtemos

$$0 = L_y - \frac{d}{dt} L_{y'} = 0 - \frac{d}{dt} \left[\frac{y'}{(1 + (y')^2)^{1/2}} \right].$$



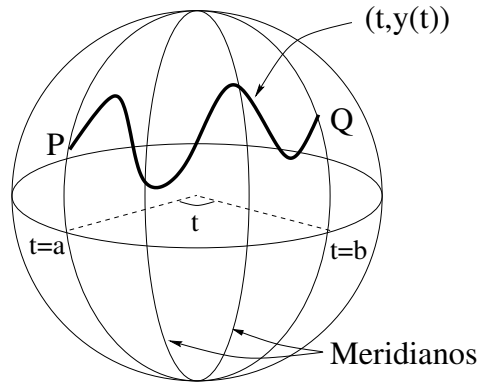
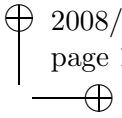


Figura 7.1: Curva admissível unindo os pontos P e Q .

Logo,

$$\frac{y'}{(1 + (y')^2)^{1/2}} = \text{const.},$$

o que implica em y' constante, ou em y ser linear. □

Exemplo 137. Consideramos agora o problema de, fixados dois pontos P e Q na superfície da esfera de raio r , encontrar a curva de menor comprimento que os une. Estando a esfera centrada na origem, parametrizamo-a localmente pelas coordenadas:

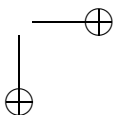
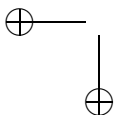
$$r(\cos t \cos y, \sin t \cos y, \sin y) \quad \text{com} \quad t \in (0, 2\pi), \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

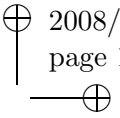
São consideradas apenas curvas que cortem cada meridiano em apenas um ponto. Tais curvas podem ser parametrizadas usando a *latitude* t como parâmetro. A *longitude* y de um ponto da curva é dada por uma função $y(t)$ da variável independente t (veja Figura 7.1). Uma curva é então representada por

$$[a, b] \ni t \longmapsto r(\cos t \cos y(t), \sin t \cos y(t), \sin y(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

Suponha que os pontos a serem unidos sejam parametrizados por: $(a, y_a), (b, y_b)$. Quando y é continuamente diferenciável, o comprimento da curva correspondente é dado por

$$I(y) = \int_a^b r \sqrt{\cos^2 y(t) + y'(t)^2} dt.$$





Logo, $L(t, y, y') = r(\cos^2 y(t) + y'(t)^2)^{1/2}$ e da primeira integral da equação de Euler (7.18) obtemos a identidade

$$-\cos^2 y = A\sqrt{\cos^2 y + (y')^2},$$

onde A é constante. Obviamente $A \in (-1, 0)$ e ainda

$$A^2(y')^2 = \cos^4 y - A^2 \cos^2 y.$$

Usando separação de variáveis, temos

$$\frac{A dy}{(\cos^4 y - A^2 \cos^2 y)^{1/2}} = dt.$$

Logo,

$$\int \frac{A dy}{\cos y(\cos^2 y - A^2)^{1/2}} = \pm(t - a) + B,$$

onde B é constante. Fazendo a mudança de variáveis $u = \tan y$, obtemos finalmente

$$y(t) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - A^2}}{A} \sin(\pm(t - a) + B)\right),$$

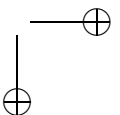
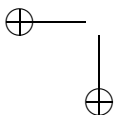
sendo as constantes A e B determinadas a partir dos dados a, b, y_a, y_b .

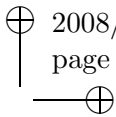
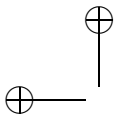
Note que o equador $\bar{y} = 0$ ($A = -1$) é um extremal. Contudo, se $b - a > \pi$, uma das partes do equador não é o caminho mais curto. Tal fato nos leva a concluir que *pequenas* partes desta curva determinam o caminho mais curto, enquanto que *longas* partes não o fazem.⁴ \square

Exemplo 138 (Braquistócrona). Voltamos agora a tratar do problema apresentado na Secção 1.2.7. Como já foi visto, o problema de encontrar a curva de tempo mínimo se deixa formular como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(y) := \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1 + (y')^2}{2gy + c} \right)^{1/2} dx \\ \text{sujeito a} \\ y \in \{C^1[x_0, x_1] \mid y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\} \end{array} \right.$$

⁴O tratamento de problemas como o surgido neste exemplo foi motivo de investigação por Carl Jacobi, que através da teoria de campos de extremais conseguiu esclarecer quando uma função estacionária deixa de ser solução do problema variacional. Maiores detalhes podem ser encontrados em [Tr, Capítulo 9].





onde g é a constante gravitacional e $c = c_{g,v_0,y_0}$ é a energia total do corpo (cinética + potencial) no instante inicial. Note que o integrando é autônomo, i.e. $L = L(y, y')$. Logo, segue da primeira integral da equação de Euler (7.18) que

$$const. = L(y, y') - y' L_{y'}(y, y') = \frac{(1 + (y')^2)^{1/2}}{(2gy + c)^{1/2}} - y' \frac{(1 + (y')^2)^{-1/2}}{(2gy + c)^{1/2}} y'.$$

Após alguma manipulação algébrica, obtemos a equação diferencial

$$(7.19) \quad (2gy + c)(1 + (y')^2) = const.$$

Fazendo a hipótese simplificadora $c = 0$ (que corresponde ao caso particular $v_0 = y_0 = 0$), obtemos no lugar de (7.19) a equação diferencial

$$(7.20) \quad y(1 + (y')^2) = A.$$

(Compare com a equação (1.41), obtida na Secção 1.2.7 a partir do princípio de refração de Fermat.) Para resolver esta equação diferencial supomos o extremal y da forma

$$y(x) = A \sin^2(\frac{1}{2}\theta(x)).$$

Substituindo em (7.20), obtemos $y' = \sqrt{(A - y)/y}$. De onde segue

$$A \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

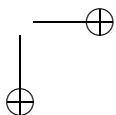
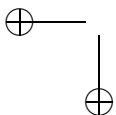
Portanto, $dx = A \sin^2(\frac{\theta}{2}) d\theta$, ou ainda

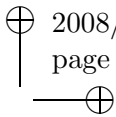
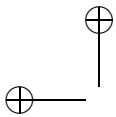
$$x = B + \frac{1}{2}A(\theta - \sin \theta).$$

Sendo assim, obtemos para o extremal y a seguinte parametrização:

$$\gamma : [\theta_0, \theta_1] \ni \theta \longmapsto (b + a(\theta + \sin \theta), a(1 + \cos \theta)) \in \mathbb{R}^2,$$

onde os parâmetros a, b são determinados pelas condições de contorno $\gamma(\theta_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma(\theta_1) = (x_1, y_1)$. A curva descrita pela parametrização acima é conhecida por *ciclóide* (veja Figura 1.4). \square





7.4 Extremais Diferenciáveis por Partes

Na Secção 7.3 consideramos como admissíveis apenas as funções continuamente diferenciáveis. Essa hipótese é bastante restritiva e faz com que determinados problemas variacionais não possuam solução (veja Exemplo 139). Nesta secção exigimos menos regularidade dos candidatos à solução do problema variacional e obtemos novamente um conjunto de condições necessárias para otimalidade.

Exemplo 139. Considere o problema variacional com integrando

$$L(t, y(t), y'(t)) := (1 - (y')^2)^2.$$

Obviamente temos $L(t, y, y') = 0$ quando $|y'| = 1$ e $L(t, y, y') > 0$, caso contrário. Portanto, as funções com derivada igual a ± 1 por partes, são as candidatas naturais à solução do problema variacional

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_a^b (1 - [y'(t)]^2)^2 dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in Y_{ad} := \{y \in C^1[0, 1] \mid y(0) = y_0, y(1) = y_1\}. \end{cases}$$

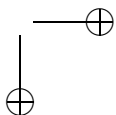
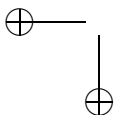
Entretanto, apenas para poucos pares de condições de contorno $\{y_0, y_1\}$ existe uma solução $C^1[0, 1]$ para o problema variacional. Em muito maior número são as condições iniciais para as quais o problema variacional admite soluções apenas contínuas, do tipo zig-zag. \square

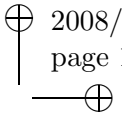
O Exemplo 139 ilustra a necessidade de definirmos classes de funções, que são contínuas a menos de um número finito de pontos.

Definição 140. Uma função $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada *contínua por partes*, nota-se $y \in \hat{C}[a, b]$, quando existe uma partição $a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b$ tal que, para todo $i = 0, \dots, n$, a restrição $y|_{(t_i, t_{i+1})}$ possui uma extensão contínua ao intervalo $[a, b]$.

Uma função contínua $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada *continuamente diferenciável por partes*, nota-se $y \in \hat{C}^1[a, b]$, quando existe uma partição $a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b$ tal que, para todo $i = 0, \dots, n$, a restrição $y|_{(t_i, t_{i+1})}$ possui uma extensão continuamente diferenciável ao intervalo $[a, b]$. \square

Observação 141. Os conjuntos $\hat{C}[a, b]$ e $\hat{C}^1[a, b]$ são espaços vetoriais (normalisáveis) sobre \mathbb{R} . Como $\hat{C}^1[a, b] \subset C[a, b]$, então $\|\cdot\|_\infty$ define uma





norma em $\hat{C}^1[a, b]$. Entretanto, de especial interesse para este espaço é a norma definida por

$$\|f\|_{1,\infty} := \max_{t \in [a,b]} |f(t)| + \max_{t \in [a,b]} |f'(t)|.$$

É importante ressaltar que o espaço vetorial normado assim obtido não é completo (Banach) com a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_{1,\infty}$. (O número de pontos de descontinuidade em uma sequência de funções pode se tornar ilimitado.) \square

No lema a seguir é apresentada uma versão do teorema fundamental do cálculo, que é utilizada no decorrer da secção.

Lema 142. *Seja $y \in \hat{C}^1[a, b]$. Então vale a identidade*

$$y(t) = y(a) + \int_a^t y'(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Demonstração: Note que y' é contínua a menos de um número finito de pontos, portanto existe a integral (de Riemann)

$$\int_a^t y'(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

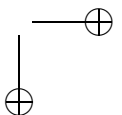
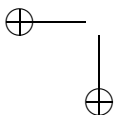
Sejam t_1, \dots, t_n os pontos de descontinuidade de y' . Para $t \in [t_k, t_{k+1}]$, temos

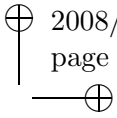
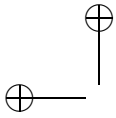
$$\begin{aligned} y(t) - y(a) &= y(t) - y(t_k) + \sum_{l=0}^{k-1} [y(t_{l+1}) - y(t_l)] \\ &= \int_{t_k}^t y'(s) ds + \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} y'(s) ds = \int_a^t y'(s) ds. \end{aligned}$$

■

Corolário 143. *Seja $y \in \hat{C}^1[a, b]$. São verdadeiras as afirmações:*

- a) *Se $\int_a^b y'(s)^2 ds = 0$, então $y' \equiv 0$;*
- b) *Se $y'(t) = 0$ em todos os pontos t onde y é diferenciável, então y é constante.*





Demonstração: Sejam t_1, \dots, t_n os pontos de descontinuidade de y' , $t_0 = a$ e $t_{n+1} = b$. Da identidade

$$0 = \int_a^b y'(s)^2 ds = \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(s)^2 ds,$$

temos que

$$y'|_{[t_k, t_{k+1}]} = 0, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Provando assim o item a). O item b) segue imediatamente do Lema 142. ■

O lema a seguir discute um modo de encontrar uma aproximação suave para uma função diferenciável por partes, i.e., aproximar uma função apenas \hat{C}^1 por outra C^1 . É importante observar que, no processo descrito, a derivada da aproximação é mantida limitada pela derivada da função original.

Lema 144. *Seja $\hat{y} \in \hat{C}^1[a, b]$ e t_1, \dots, t_n os pontos de descontinuidade de \hat{y}' . Então, é possível encontrar constantes $A \in \mathbb{R}$ e $\delta_0 > 0$ tais que, para todo $\delta \in (0, \delta_0)$, existe $y \in C^1[a, b]$ satisfazendo*

- a) $y|_R = \hat{y}$, onde $R = [a, b] \setminus \bigcup_{l=0}^n [t_l - \delta, t_l + \delta]$;
- b) $\max_{t \in [a, b]} |y'(t)| \leq 4 \max_{t \in [a, b]} |\hat{y}'(t)|$;
- c) $\max_{t \in [a, b]} |y(t) - \hat{y}(t)| \leq A\delta$.

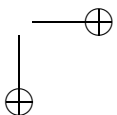
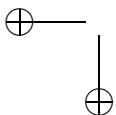
Demonstração: Basta provar o resultado para partições com apenas um ponto \hat{t} . Escolha $\delta_0 > 0$ tal que $[\hat{t} - \delta_0, \hat{t} + \delta_0] \subset (a, b)$. Seja $\delta \in (0, \delta_0)$.

A idéia por trás da suavização consiste em substituir a derivada \hat{y}' por uma poligonal contínua em $[\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta]$ e não alterar \hat{y} fora deste intervalo. Dada uma constante $h \in \mathbb{R}$, defina a função

$$g(t) := \begin{cases} \hat{y}'(t) & , |t - \hat{t}| > \delta \\ -(t - \hat{t})\delta^{-1}\hat{y}'(\hat{t} - \delta) + (t - \hat{t} + \delta)\delta^{-1}h & , t \in [\hat{t} - \delta, \hat{t}] \\ -(t - \hat{t} - \delta)\delta^{-1}h + (t - \hat{t})\delta^{-1}\hat{y}'(\hat{t} + \delta) & , t \in [\hat{t}, \hat{t} + \delta] \end{cases}$$

A partir daí, defina a função $y \in C^1[a, b]$

$$y(t) := \hat{y}(a) + \int_a^t g(s) ds, \quad t \in [a, b].$$



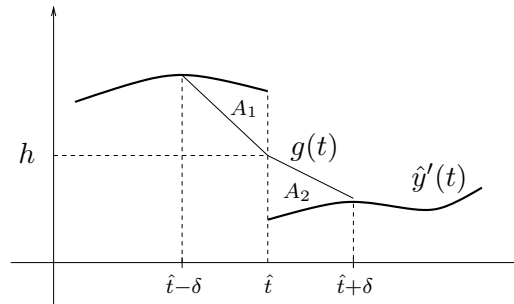
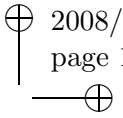


Figura 7.2: Construção da função g no Teorema 144

Escolhemos agora h , de modo que $y = \hat{y}$ em $[a, b] \setminus [\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta]$, satisfazendo assim *a*). Este é o caso quando a condição

$$\int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} g(s) ds = \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} \hat{y}'(s) ds =: A_\delta$$

é satisfeita. Na Figura 7.2, observamos que isto equivale a exigir que as áreas A_1 e A_2 sejam iguais. Note que $A_\delta = h\delta + \frac{\delta}{2}[\hat{y}'(\hat{t} - \delta) + \hat{y}'(\hat{t} + \delta)]$. Escolhemos portanto

$$h = \frac{A_\delta}{\delta} - \frac{1}{2}[\hat{y}'(\hat{t} - \delta) + \hat{y}'(\hat{t} + \delta)].$$

Definindo agora $M := \max_{t \in [a, b]} |\hat{y}'(t)|$, obtemos

$$|A_\delta| \leq 2\delta M \quad \text{e} \quad |h| \leq 3M.$$

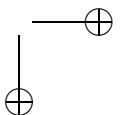
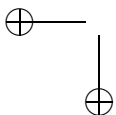
Da definição de g , segue agora para todo $t \in [a, b]$

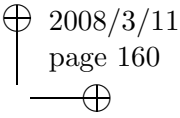
$$\begin{aligned} |y'(t)| &= |g(t)| \\ &\leq \max\{|\hat{y}'(t)|, |\hat{y}'(\hat{t} - \delta)| + |h|, |h| + |\hat{y}'(\hat{t} + \delta)|\} \\ &\leq M + |h| \leq 4M, \end{aligned}$$

provando assim *b*). Para determinar A em *c*), basta observar que

$$\begin{aligned} |y(t) - \hat{y}(t)| &\leq \int_{\hat{t}-\delta}^t |y'(s) - \hat{y}'(s)| ds \\ &\leq \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} (|y'(s)| + |\hat{y}'(s)|) ds \leq 10M\delta \end{aligned}$$

e a demonstração fica completa. ■





Estamos agora em condições de obter condições necessárias para soluções de classe \hat{C}^1 de um problema variacional. Antes porém, analisamos uma importante correspondência existente entre as soluções do problema (7.2) e do problema

$$(7.21) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in \hat{Y}_{ad} := \{y \in \hat{C}^1[a, b] \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}. \end{cases}$$

Para simplificar a notação, denominamos os problemas (7.2) e (7.21) por problemas (P) e (\hat{P}) respectivamente. A fim de analisar as soluções do problema (\hat{P}) , observe que o conceito de mínimo local fraco na Definição 120 é naturalmente estendido ao problema (\hat{P}) , bastando para isto substituir o espaço Y_{ad} por \hat{Y}_{ad} naquela definição.

Teorema 145. *Seja $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Se $\bar{y} \in Y_{ad}$ é um mínimo local fraco para o problema (P) , então \bar{y} também é mínimo local fraco para o problema (\hat{P}) .*

Demonstração: Se \bar{y} é mínimo local fraco de (P) , então existe $\varepsilon > 0$ tal que

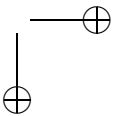
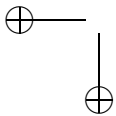
$$I(\bar{y}) \leq I(v), \quad \forall v \in S_\varepsilon := \{v \in Y_{ad} \mid \|v - \bar{y}\|_{1,\infty} < \varepsilon\}.$$

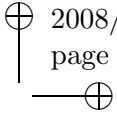
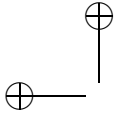
Tome $\hat{y} \in \hat{Y}_{ad}$ com $\|\hat{y} - \bar{y}\|_{1,\infty} < \varepsilon/5$. Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o Lema 144 garante a existência de $v_{\varepsilon,\delta} \in C^1[a, b]$ tal que

$$\|v_{\varepsilon,\delta} - v\|_\infty \leq A\delta \quad \text{e} \quad \|v'_{\varepsilon,\delta}\|_\infty \leq 4\|v'\|_\infty,$$

onde $v := \hat{y} - \bar{y} \in \hat{C}^1[a, b]$ e a constante A depende apenas de \hat{y} e \bar{y} . Definindo a função $y_\varepsilon := \bar{y} + v_{\varepsilon,\delta} \in Y_{ad}$, temos

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon - \bar{y}\|_{1,\infty} &= \|v_{\varepsilon,\delta}\|_{1,\infty} = \|v_{\varepsilon,\delta}\|_\infty + \|v'_{\varepsilon,\delta}\|_\infty \\ &\leq \|v_{\varepsilon,\delta} - v\|_\infty + \|v\|_\infty + 4\|v'\|_\infty \\ &\leq A\delta + 4\|\hat{y} - \bar{y}\|_{1,\infty} \\ &\leq A\delta + \frac{4\varepsilon}{5}. \end{aligned}$$





Logo, $y_\varepsilon \in S_\varepsilon$ se escolhermos $\delta < \varepsilon/5A$. Temos então que

$$\begin{aligned} I(\hat{y}) &\geq I(y_\varepsilon) - |I(y_\varepsilon) - I(\hat{y})| \\ &\geq I(\bar{y}) - |I(\bar{y} + v_{\varepsilon,\delta}) - I(\bar{y} + v)| \\ &\geq I(\bar{y}) - \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} |L(t, \bar{y} + v_{\varepsilon,\delta}, (\bar{y} + v_{\varepsilon,\delta})') \\ &\quad - |L(t, \bar{y} + v, (\bar{y} + v)')| dt. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$, a integral do lado direito converge a zero e obtemos $I(\hat{y}) \geq I(\bar{y})$. ■

Resumindo, o Teorema 145 garante que toda solução C^1 é também uma solução \hat{C}^1 do problema variacional. Um resultado análogo para mínimos globais pode também ser formulado, assim como resultados relativos a problemas em que faltam condições de contorno (veja Observação 132).

A recíproca do Teorema 145 não é verdadeira, conforme ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 146. Considere a função $L(t, y, y') := y^2(1 - y')^2$ definida em $[a, b] = [-1, 1]$, e as condições de contorno $y_a = 0, y_b = 1$. Observe que a função

$$\bar{y}(t) := \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases}$$

é um mínimo global de I em \hat{Y}_{ad} , pois $I(\bar{y}) = 0$. Verificamos a seguir que não existe outro mínimo global. Suponha que $y \in \hat{Y}_{ad}$ é um outro mínimo. Como $y(1) = 1$, o escalar α definido por

$$\alpha := \inf\{\beta \in [-1, 1] \mid y(t) > 0, \beta < t \leq 1\}$$

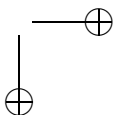
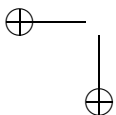
necessariamente satisfaz $\alpha \in [-1, 1]$. Da identidade $I(y) = I(\bar{y}) = 0$, obtemos $y'(t) = 1$, para $t \in (\alpha, 1]$, i.e.

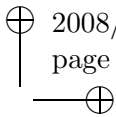
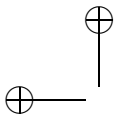
$$y(t) = t, \quad t \in [\alpha, 1].$$

Como y é contínua, segue da definição de α que $\alpha = 0$. Logo,

$$y(t) = t, \quad t \in [0, 1].$$

Note agora que $y(-1) = y(0) = 0$. Note ainda que, para todo $t \in (-1, 0)$ com $y(t) \neq 0$, temos necessariamente $y'(t) = 1$. Podemos então concluir que $y(t) = 0, t \in [-1, 0]$. Sendo assim, o problema variacional não possui solução em Y_{ad} e a única solução em \hat{Y}_{ad} é a função \bar{y} . □





O próximo teorema fornece as desejadas condições necessárias para otimalidade do problema variacional (\tilde{P}).

Teorema 147. *Seja $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e $\hat{y} \in \hat{Y}_{ad}$ um mínimo local fraco para o problema (\tilde{P}). Então, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$(7.22) \quad L_{y'}(t, \hat{y}(t), \hat{y}'(t)) = \int_a^t L_y(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s)) ds + c, \quad t \in [a, b]$$

e ainda

$$(7.23) \quad L_{y'}(t, \hat{y}(t-), \hat{y}'(t-)) = L_{y'}(t, \hat{y}(t+), \hat{y}'(t+)), \quad t \in (a, b).$$

Demonstração: Dado $\varepsilon_0 > 0$, escolha $\eta \in \hat{C}^1[a, b]$ com $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Como \hat{y} é mínimo local, temos $\delta I(\hat{y}; \eta) = 0$. Da hipótese de diferenciabilidade de L , segue que $0 = \delta I(\hat{y}; \eta) = \frac{d}{d\varepsilon} I(\hat{y} + \varepsilon \eta)|_{\varepsilon=0}$, i.e.

$$\int_a^b [L_y(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s)) \eta(s) + L_{y'}(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s)) \eta'(s)] ds = 0.$$

Integrando por partes, obtemos

$$(7.24) \quad \int_a^b \left[- \int_a^s L_y(r, \hat{y}(r), \hat{y}'(r)) dr + L_{y'}(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s)) \right] \eta'(s) ds = 0.$$

Escolhemos agora a constante c (usando o teorema do valor médio) de forma que a função $v \in \hat{C}^1[a, b]$ definida por

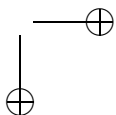
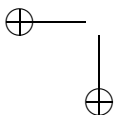
$$v(t) := \int_a^t \left[- \int_a^s L_y(r, \hat{y}(r), \hat{y}'(r)) dr + L_{y'}(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s)) - c \right] ds$$

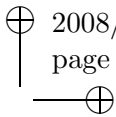
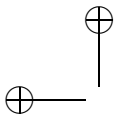
satisfaça a condição

$$v(a) = v(b) = 0.$$

Tomando agora $f(s) := - \int_a^s L_y(r, \hat{y}(r), \hat{y}'(r)) dr + L_{y'}(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s))$, $s \in [a, b]$, segue da equação (7.24)

$$\begin{aligned} \int_a^b v'(s)^2 ds &= \int_a^b [f(s) - c]^2 ds \\ &= \int_a^b f(s) [f(s) - c] ds - c \int_a^b [f(s) - c] ds \\ &= 0 - c \int_a^b f(s) ds + c^2(b - a) = 0. \end{aligned}$$





O Corolário 143 nos permite concluir que $v' \equiv 0$ em $[a, b]$, ou seja

$$(7.25) \quad L_{y'}(t, \hat{y}(t), \hat{y}'(t)) = \int_a^t L_y(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s)) ds + c, \quad t \in [a, b].$$

Para provar a segunda parte do teorema, basta observar que (7.25) implica na continuidade da aplicação $t \mapsto L_{y'}(t, \hat{y}(t), \hat{y}'(t))$ em $[a, b]$. ■

Corolário 148. *Seja $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e $\hat{y} \in \hat{Y}_{ad}$ um mínimo local fraco para o problema (\hat{P}) . Então, \hat{y} satisfaz a equação de Euler–Lagrange nos pontos $t \in (a, b)$ de continuidade de \hat{y}' .*

Demonstração: De fato, se \hat{y}' é contínua no ponto $t \in (a, b)$, segue de (7.22) que a aplicação

$$s \mapsto L_{y'}(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s))$$

é continuamente diferenciável em uma vizinhança de t . A Equação de Euler–Lagrange segue agora derivando-se (7.22), como na demonstração do Teorema 133. ■

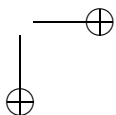
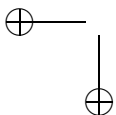
Resumindo, o Teorema 147 garante que um mínimo local fraco do problema (\hat{P}) satisfaz a equação de Euler–Lagrange nos pontos de continuidade de sua derivada. Além disso, as únicas descontinuidades admissíveis em um mínimo local fraco são aquelas que preservam a continuidade da aplicação

$$t \mapsto L_{y'}(t, \hat{y}(t), \hat{y}'(t)).$$

A condição formulada em (7.23) é denominada *condição de Weierstraß–Erdmann*. É possível ainda provar que um mínimo local fraco do problema (\hat{P}) satisfaz a primeira integral de equação de Euler–Lagrange e que a aplicação

$$t \mapsto L(t, \hat{y}(t), \hat{y}'(t)) - \hat{y}'(t) L_{y'}(t, \hat{y}(t), \hat{y}'(t))$$

é contínua. Esta última condição é denominada *segunda condição de Weierstraß–Erdmann*.



7.5 Problemas Vetoriais

Generalizamos nesta secção para problemas variacionais vetoriais os resultados obtidos até agora ao longo do capítulo. Considere o problema

$$(7.26) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in \hat{Y}_{ad} := \{y \in \hat{C}^1([a, b]; \mathbb{R}^n) \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}, \end{cases}$$

onde $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ e $y_a, y_b \in \mathbb{R}^n$ são dados. Os problemas vetoriais se caracterizam pelo fato dos candidados serem funções vetoriais $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, com $y_j \in \hat{C}^1[a, b]$.

O teorema a seguir generaliza para o problema (7.26) as condições necessárias obtidas para o problema variacional escalar (7.21).

Teorema 149. *Seja $L : [a, b] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e $\hat{y} \in \hat{Y}_{ad}$ um mínimo local fraco para o problema (7.26). Então, \hat{y} satisfaz a equação vetorial de Euler–Lagrange*

$$\frac{d}{dt} L_{y'}(t, \hat{y}, \hat{y}') = L_y(t, \hat{y}, \hat{y}')$$

nos pontos $t \in [a, b]$ de continuidade de \hat{y}' . Também é satisfeita a primeira integral da equação de Euler

$$\begin{aligned} L(t, \hat{y}, \hat{y}') - \langle \hat{y}'(t), L_{y'}(t, \hat{y}, \hat{y}') \rangle \\ = \int_a^t L_t(s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s)) ds + \text{const.}, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

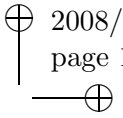
(Note que esta equação é escalar, enquanto a equação de Euler–Lagrange é vetorial.) Nos pontos $t \in [a, b]$ de descontinuidade de \hat{y}' são satisfeitas as condições de Weierstraß–Erdmann

$$L_{y'}(t-, \hat{y}(t-), \hat{y}'(t-)) = L_{y'}(t+, \hat{y}(t+), \hat{y}'(t+)),$$

$$[L - \langle \hat{y}', L_{y'} \rangle](t-) = [L - \langle \hat{y}', L_{y'} \rangle](t+).$$

(Note que a primeira condição é vetorial e a segunda é escalar.)

Demonstração: É totalmente análoga às demonstrações anteriores, bastando deduzir as equações vetoriais componente a componente. ■



Nos problemas vetoriais considerados nesta secção a função objetivo é escalar. Em muitos problemas de controle ótimo (e em seus correspondentes variacionais) é conveniente considerar funções objetivo vetoriais, i.e. $I : \hat{Y}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Neste caso, utiliza-se o conceito de *Pareto otimalidade* para eleger uma estratégia ótima. Para maiores detalhes consulte [Lei].

Exercícios

7.1. Calcule a primeira integral da Equação de Euler–Lagrange quando $L = L(t)$. Mostre que as funções lineares são estacionárias.

7.2. Calcule a primeira integral da Equação de Euler–Lagrange quando $L = L(t, y)$.

7.3. Prove que $\|\cdot\|_{1,\infty}$ define uma norma em $\hat{C}^1[a, b]$. Mostre que o espaço vetorial normado assim obtido não é completo.

7.4. Prove que, se $g, h \in C[a, b]$ são tais que

$$\int_a^b [g(t)v(t) + h(t)v'(t)] dt = 0,$$

para todo $v \in C_0^1[a, b]$, então $h \in C^1[a, b]$ e $h' = g$.
(Sugestão: Veja demonstração do Teorema 133.)

7.5. Demonstre o lema de du Bois–Reymond (Lema 129) utilizando o Exercício 7.4.

7.6. Se $L = L(y, y')$ é uma aplicação C^1 , mostre que toda função estacionária $\hat{y} \in \hat{Y}_{ad}$ satisfaz a primeira integral da Equação de Euler–Lagrange

$$L(\hat{y}, \hat{y}') - \hat{y}' L_{y'}(\hat{y}, \hat{y}') = \text{const.}$$

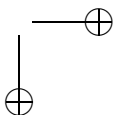
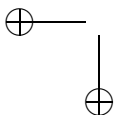
nos pontos $t \in (a, b)$ de continuidade de \hat{y}' .

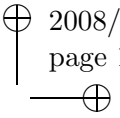
7.7. Seja L uma aplicação C^1 e $\hat{y} \in \hat{Y}_{ad}$ uma função estacionária. Mostre que a segunda condição de Weierstrass–Erdmann

$$(L - \hat{y}' L_{y'})(t^-) = (L - \hat{y}' L_{y'})(t^+), \quad t \in [a, b]$$

é satisfeita.

(Sugestão: Utilize o fato do extremal \hat{y} satisfazer a primeira integral da Equação de Euler–Lagrange: $L(t, \hat{y}, \hat{y}') - \hat{y}' L_{y'}(t, \hat{y}, \hat{y}') = \int_a^t L_t(s, \hat{y}, \hat{y}') ds + \text{const.}$)





7.8. Dada $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, calcule a variação de Gâteaux da aplicação $I : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t), y''(t)) dt.$$

a) Dada $y \in Y_{ad} := \{C^2[a, b] \mid y(a) = y_a; y(b) = y_b; y'(a) = y'_a\}$, defina

$$g(t) := \int_a^t L_y(s, y, y', y'') ds \quad e \quad h(t) := \int_t^b [L_{y'}(s, y, y', y'') - g(y)] ds.$$

Mostre que, para todo $v \in Y_0 := \{C^2[a, b] \mid v(a) = v(b) = v'(a) = 0\}$, temos

$$\delta I(y, v) = \int_a^b [h(t) + L_{y''}(t, y, y', y'')] v''(t) dt - [h(t)v'(t)]_a^b.$$

b) Conclua que uma condição necessária para que \bar{y} seja mínimo local de I em Y_{ad} é

$$\delta I(\bar{y}, v) = \int_a^b [h(t) - L_{y''}(t, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')] v''(t) dt = 0, \quad \forall v \in Y_0.$$

c) Use o Exercício 7.9 para garantir que a aplicação $t \mapsto L_{y''}(t, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')$ é diferenciável e obtenha a equação de Euler–Lagrange para problemas de segunda ordem

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} L_{y''} - L_{y'} \right] = -L_y, \quad t \in (a, b).$$

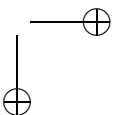
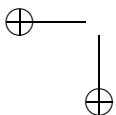
7.9. Seja $k > 0$ fixo. Mostre que, se $h \in C[a, b]$ é tal que

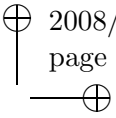
$$\int_a^b h(t) v^{(k)}(t) dt = 0, \quad \forall v \in C_0^{k-1}[a, b],$$

então h é um polinômio de grau $< k$.

7.10. Seja $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. Mostre que se $y \in C^3[a, b]$ é solução da equação de Euler–Lagrange do Exercício 7.8, então y é solução da primeira integral da Equação de Euler–Lagrange (para problemas de segunda ordem)

$$L - y' \left[L_{y'} - \frac{d}{dt} L_{y''} \right] - y'' L_{y''} = \int_a^b L_t(s, y, y', y'') ds + const.$$





EXERCÍCIOS

7.11. Seja $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R})$. Mostre que um mínimo local de

$$I(y) := \int_a^b L(t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) dt$$

em $Y_{ad} := \{y \in C^k[a, b] \mid y(a) = a_1, y(b) = b_1, \dots, y^{(k-1)}(a) = a_{k-1}, y^{(k-1)}(b) = b_{k-1}\}$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange de k -ésima ordem

$$L_y - \frac{d}{dt}L_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}L_{y''} - \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}L_{y^{(k)}} = 0.$$

7.12. Considere o problema variacional

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a } y \in \{y \in C^1[a, b] \mid y(b) = y_b, y(a) \geq y_a\}. \end{cases}$$

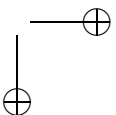
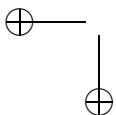
a) Mostre que para \bar{y} ser solução deste problema variacional é necessário que satisfaça

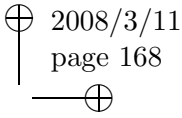
$$\begin{cases} L_y(t, y, y') - \frac{d}{dt}L_{y'}(t, y, y') = 0 \\ y(b) = y_b, L_{y'}(a, y(a), y'(a)) \leq 0. \end{cases}$$

b) Prove que a igualdade na condição de contorno natural $L_{y'}(a, y(a), y'(a)) \leq 0$ ocorre exatamente quando $y(a) = y_a$.

7.13. Complete os detalhes da demonstração do Teorema 149.

7.14. Prove a identidade nas equações (7.3) e (7.4) do texto.





Capítulo 8

Princípios Variacionais na Mecânica

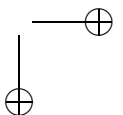
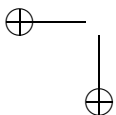
Neste capítulo investigamos formulações variacionais para problemas de mecânica (cinemática). O objetivo é apresentar diferentes abordagens para problemas relacionados à mecânica (devidas a Newton, Lagrange e Hamilton) e deduzir a equação de Hamilton–Jacobi como condição necessária para otimalidade de um problema de minimização.

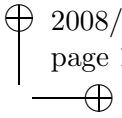
Na Secção 8.1 são estudados, sob a ótica da mecânica Newtoniana, alguns problemas da cinemática, de onde deduzimos as leis de Newton e Kepler. Na Secção 8.3 é apresentado o formalismo introduzido por Lagrange, que é exemplificado para o problema dos N -corpos. Na Secção 8.4 analisamos a mecânica Lagrangeana sob a ótica de Hamilton, que toma como ponto de partida a equação diferencial de Euler.

8.1 Mecânica Newtoniana

O que hoje é denominado *mecânica clássica* foi fundado no século XVII por Newton e em primeira mão delineado por Huygens, Leibniz e Bernoulli (Johann). A contribuição de Newton foi ter colocado na forma de uma equação de movimento as grandezas força e aceleração. Formulamos a seguir as *Leis de Newton* em sua forma original:

- I) Todo corpo conserva o seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme, quando não for obrigado, por uma força externa, a alterar o seu movimento.





- II) A alteração no movimento é proporcional à força externa e ocorre na direção da linha reta na qual esta força atua.
- III) A toda ação corresponde uma reação proporcional e em sentido contrário a primeira.

No texto acima, corpo tem o significado de massa pontual, i.e. partículas pontuais de massa que não se deformam. Na Lei I), o termo movimento corresponde à curva $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ descrita pelo ponto de massa no espaço; $\mathbf{r}(t)$ descreve a posição do ponto de massa no instante de tempo t , que funciona como parâmetro da curva.

As experiências práticas motivaram que o espaço na mecânica clássica fosse considerado *homogêneo* (i.e. todos os pontos do espaço desfrutam das mesmas propriedades) e *isotrópico* (i.e. o espaço não possui direções privilegiadas). Desta forma, o espaço onde se passa o movimento é um espaço afim: A especificação da posição $\mathbf{r}(t)$ não é importante, mas sim a especificação de $\mathbf{r}(t)$ relativa à posição de um observador no mesmo instante de tempo. Escolhendo uma origem para o espaço afim, obtemos a partir daí o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e podemos, com o auxílio da representação vetorial dos pontos deste, considerar $\mathbf{r}(t)$ como vetor posição do ponto de massa.

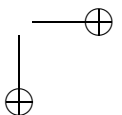
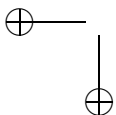
O tempo representa na física não relativista uma função especial. Considerando-se que o ponto de massa possua seu próprio sistema de contagem de tempo (e.g., caso ele possua um relógio de pulso), o observador mede em seu relógio

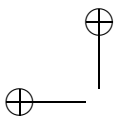
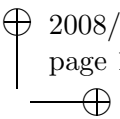
$$(8.1) \quad t_B = \alpha_B \tau + \beta_B,$$

onde α_B é uma constante positiva, que representa a proporcionalidade entre as unidades de tempo do observador e do ponto de massa; e β_B representa a relação entre os tempos iniciais do observador e do ponto de massa. A equação (8.1) pode ser escrita na forma da equação diferencial:

$$(8.2) \quad \frac{d^2 t_B}{d\tau^2} = 0.$$

Daí podemos concluir que o tempo é descrito por um espaço unidimensional afim e a partir da escolha de um tempo zero, podemos discernir entre os conceitos de antes e depois. A ocorrência de um movimento, descrito por uma *trajetória* $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, corresponde a um ponto





$(t, \mathbf{r}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. A trajetória \mathbf{r} é geralmente representada, em relação a um sistema especial de coordenadas, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \quad (\text{coordenadas cartesianas}) \\ \mathbf{r}(t) &= (r(t), \varphi(t), \theta(t)) \quad (\text{coordenadas polares}). \end{aligned}$$

A partir do conhecimento da trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, derivamos o conceito de *velocidade*¹

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

e o conceito de *aceleração*

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t).$$

O estado de repouso é descrito por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ para todos os tempos t , enquanto que o movimento retilíneo uniforme (velocidade constante) é descrito por

$$(8.3) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^0 + \mathbf{v}^0 t.$$

A Lei *I*) diz que (8.3) representa o movimento de um corpo, sobre o qual não é exercida nenhuma força externa. Se um corpo é lançado da posição P para a posição Q , sem interferência de forças externas, seu movimento descreve o caminho mais curto unindo os pontos P e Q (desde que, é claro, o sistema referencial – o observador – não esteja sujeito a acelerações).

Definição 150. Um sistema referencial, para o qual a Lei *I*) vigore na forma $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ para todos os tempos t é denominado *sistema referencial inercial*. \square

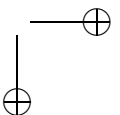
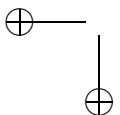
Para um sistema referencial inercial, as leis *I*) e *II*) assumem a forma:

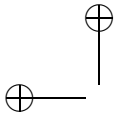
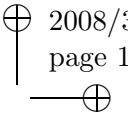
$$m \ddot{\mathbf{r}} = F,$$

ou mais detalhadamente

$$(8.4) \quad m \ddot{\mathbf{r}}(t) = F(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)), \quad \text{para todo } t,$$

¹Utilizamos a notação física para derivadas: \dot{y}, \ddot{y} , originalmente introduzidas por Newton.





onde F é a resultante de todas as forças agindo sobre o corpo de massa m . O movimento é obtido, integrando-se a equação diferencial (8.4). Para tanto, são necessárias as condições iniciais $\mathbf{r}(0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(0)$.

No caso de utilizarmos um sistema referencial sujeito a acelerações, a equação (8.4) assume uma forma mais complexa. É fácil ver que qualquer sistema que se movimenta uniformemente em relação a um sistema inercial é, ele próprio, um sistema referencial inercial.

O conceito de movimento na Lei II) pode ser identificado com o *impulso* (também denominado quantidade de movimento)

$$\mathbf{p}(t) := m\dot{\mathbf{r}}(t).$$

Sendo assim, a equação (8.4) toma a forma

$$(8.5) \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = F(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \text{ para todo } t.$$

Observação 151. A hipótese de que a massa m do corpo independe do movimento ocorre em muitos casos. Entretanto, se quisermos ser mais precisos, a massa de um corpo é função de sua massa quando em repouso m_0 e da velocidade com a qual o corpo se move, na forma

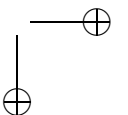
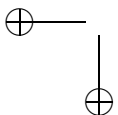
$$(8.6) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{|v(t)|^2}{c^2}}},$$

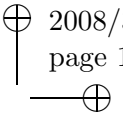
onde a constante c representa a velocidade da luz (veja Secção 8.2). Para todas as velocidades, pequenas em relação à velocidade da luz, $|v|c^{-1}$ é muito menor que 1 e podemos considerar a massa constante ao longo do movimento (note que discutimos aqui sobre pontos de massa e não sobre aviões ou foguetes, que *perdem* massa ao longo do movimento). □

As mais importantes das forças fundamentais da natureza são a *força gravitacional* e a *força de Coulomb*. Influências fortes e fracas de partículas elementares não desempenham papel importante na mecânica. A força gravitacional

$$(8.7) \quad F_{AB} = -Gm_A m_B \frac{r_A - r_B}{|r_A - r_B|^3}$$

atua constantemente sobre a linha reta unindo os pontos de massa A e B . Aqui G é a constante de atração gravitacional de Newton e m_a, m_b





representam as massas dos respectivos corpos. Segundo a lei de Coulomb temos

$$(8.8) \quad F_{AB} = \kappa e_A e_B \frac{r_A - r_B}{|r_A - r_B|^3}.$$

Aqui a situação é outra: A intensidade e a direção de atuação da força depende das cargas e_A , e_B das partículas A , B . A constante κ depende da escolha da escala para unidade de massa.

A Lei III) se torna importante, quando fontes de força interagem mutuamente entre si. Este é o caso, por exemplo, quando consideramos dois corpos de massas parecidas. Entretanto, se a relação entre as massas for muito desigual, podemos desprezar a reação do corpo mais leve. Esta é geralmente a situação, quando consideramos o movimento dos planetas em torno do sol.

Seja F um *campo conservativo*, i.e. um campo de forças cuja influência sobre um corpo nele incluído, depende somente da posição que o corpo ocupa. Logo $F = F(\mathbf{r})$. A fim de que um corpo percorra um caminho γ unindo os pontos P , Q dentro deste campo, é necessário que seja efetuado um certo *trabalho*. Este trabalho é a soma infinitesimal do produto da força pelo deslocamento. Portanto, se $P = \mathbf{r}^0$ e $Q = \mathbf{r}^1$, o trabalho é descrito pela integral ao longo do caminho

$$(8.9) \quad A_{PQ} = \int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{r} \rangle.$$

Consideramos o trabalho como uma grandeza, que pode ser inserida em um corpo e nele permaneça armazenada, ou que possa ser retirada do corpo. Tal grandeza é denominada *energia*.

Para a abordagem feita nesta secção utilizamos o sistema de medidas M-K-S. Se identificamos massa com peso, encontramos para a constante gravitacional de Newton o valor (experimental)

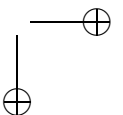
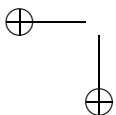
$$G \sim 6.67510^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

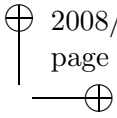
enquanto que para a velocidade da luz obtemos

$$c \sim 10^8 \text{ m s}^{-2}.$$

Consideremos agora movimentos em campos de forças. Suponha que dispomos de um *campo central*, i.e. que possua a representação

$$(8.10) \quad F(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$





onde f é uma função escalar. Tal campo é na verdade um *campo gradiente*, pois satisfaz

$$(8.11) \quad F(\mathbf{r}) = -U'(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \text{com } U(r) := \int_{r_0}^r f(r') dr',$$

onde r_0 é uma constante *a priori* escolhida. A função U é denominada *potencial do campo*². É imediato observar que podemos obter outro potencial simplesmente adicionando a U uma constante.

Exemplo 152. Considere dois pontos de massa, com massas respectivamente m_1 e m_2 , sujeitos à ação gravitacional. Temos

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = F_{12}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = F_{21} = -F_{12}, \quad \text{onde } F_{ij} = -Gm_1 m_2 \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|^3}.$$

Definindo a coordenada do *centro de massa*

$$\mathbf{r}_S := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

temos $\ddot{\mathbf{r}}_S = 0$, i.e. o centro de massa se encontra em movimento retilíneo uniforme. A dinâmica real se encontra no movimento relativo dos pontos de massa. Seja $\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Temos então

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

e ainda

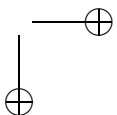
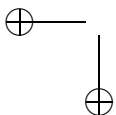
$$(8.12) \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \text{com } \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

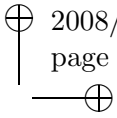
onde μ é denominada *massa reduzida*. Desta forma, o sistema de dois corpos se reduz ao movimento de uma partícula de massa μ em relação à coordenada do centro de massa. A massa reduzida está submetida à ação do campo de força. Seu potencial é

$$(8.13) \quad U(r) := -\frac{u}{r}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

onde $u := Gm_1 m_2$. □

²O sinal negativo a frente do potencial representa uma notação física.





Consideremos agora o caso geral de uma partícula de massa m sujeita a um campo central. A *energia total*

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + U(|\mathbf{r}|)$$

é composta da *energia cinética* $E_{kin} := \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2$ e da *energia potencial* $E_{pot} := U(|\mathbf{r}|)$. É válido o seguinte teorema de conservação de energia:

$$(8.14) \quad E(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = E_0 := E(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0)), \quad t \in \mathbb{R},$$

uma vez que

$$\frac{dE}{dt}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = m\langle \mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{v}}(t) \rangle + \langle -F(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{v}}(t) \rangle = 0.$$

O *momento angular* J no sistema é definido por

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{v}) := m \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

É válido o seguinte teorema de conservação do momento angular:

$$(8.15) \quad J(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = J_0 := J(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0)), \quad t \in \mathbb{R},$$

uma vez que

$$\frac{dJ}{dt}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = m \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{r}(t) \times f(|\mathbf{r}(t)|) \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} = 0.$$

Desta forma, o movimento transcorre em um plano perpendicular a $J_0 = m \mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)$. Isto sugere a utilização de coordenadas polares neste plano (denominado $x - y$):

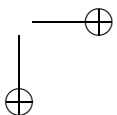
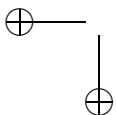
$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t), \quad y(t) = r(t) \sin \varphi(t),$$

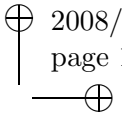
de forma que o momento angular possua somente uma componente na coordenada z :

$$(8.16) \quad J_z = mr^2 \dot{\varphi}, \quad \text{i.e.} \quad \dot{\varphi} = \frac{J_z}{mr^2}.$$

A conservação de energia, nessas coordenadas, significa que

$$(8.17) \quad \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0.$$





Explicitando agora \dot{r} em (8.16) e (8.17), temos

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2(E_0 - U(r))}{m} - \frac{J_z^2}{m^2 r^2}}.$$

Ou ainda, escrevendo na forma $\frac{dr}{d\varphi}$, que

$$(8.18) \quad \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2m(E_0 - U(r))}{J_z^2} - \frac{1}{r^2}}.$$

Levando agora em consideração a forma especial do potencial $U(r) := -\frac{u}{r}$ e introduzindo a função $\sigma(\varphi) := \frac{1}{r(\varphi)}$, obtemos a equação diferencial:

$$(8.19) \quad -\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2m(E_0 + u\sigma)}{J_z^2} - \sigma^2}.$$

Definindo agora as constantes

$$p := \frac{J_z^2}{um}, \quad \varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2E_0 J_z^2}{mu^2}},$$

temos que

$$(8.20) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2}.$$

Note que esta equação é resolvida por

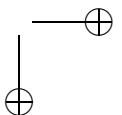
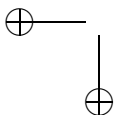
$$\sigma(\varphi) := \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0).$$

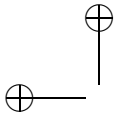
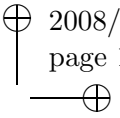
Portanto,

$$(8.21) \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

É sabido que (8.21) é a representação do corte de um cone em coordenadas polares:

$\varepsilon > 1$: **Hipérbole** $\varepsilon = 1$: **Parábola** $\varepsilon < 1$: **Elipse**.





Consideremos agora o problema do movimento planetário em nosso sistema solar. O campo de forças é o campo gravitacional gerado pelo sol (de massa M). Um planeta de massa m está sujeito à força gravitacional:

$$(8.22) \quad F(\mathbf{r}) := -GmM \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

que é um campo central (o sol no centro). Da dedução acima, obtemos a primeira lei de Kepler, pois, devido às nossas observações, $E_0 < 0$.

1ª Lei de Kepler: Os planetas se movem em órbitas elípticas em torno do sol, que se encontra no foco das respectivas trajetórias.

A taxa de variação da área \dot{A} no plano da órbita é obtida, a partir do raio da órbita (sol–planeta), da relação:

$$A(t + \Delta t) - A(t) = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t) \sim \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) \Delta t.$$

Temos assim

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)| = \frac{J_z}{2m};$$

isto é, \dot{A} é constante. Obtemos daí a segunda lei de Kepler:

2ª Lei de Kepler: O vetor do raio da órbita do sol ao planeta percorre, em intervalos de tempo iguais, áreas iguais.

A área A de uma elipse é dada por πab , onde a, b são os semi-eixos. Na notação acima, obtemos para a órbita elíptica dos planetas:

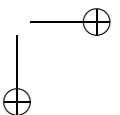
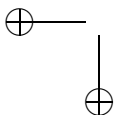
$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon}, \quad b = \sqrt{pa}.$$

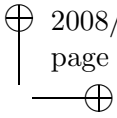
Denominando por T o período de uma órbita completa de um planeta, temos que $A = \frac{T J_z}{2m}$. A partir daí obtemos (utilizando as constantes p, J_z, u) que

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{J_z^2}{4\pi^2 m^2 p} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

Este é o conteúdo da terceira lei de Kepler:

3ª Lei de Kepler: A razão entre o cubo do semi-eixo maior e o quadrado do período da órbita é constante.





8.2 Teoremas Conservativos em Sistemas Fechados

Considere um sistema constituído de N pontos de massa P_1, \dots, P_N , com respectivas massas m_1, \dots, m_N , submetido às forças internas F_{ik} (atuando entre P_i e P_k) e às forças externas K_i . As forças internas são forças centrais com potenciais U_{ik} . A equação de movimento é

$$(8.23) \quad m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k \neq i} F_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) + K_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

onde $\mathbf{r}_{ik} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$. Em notação simplificada, temos:

$$\begin{aligned} \text{Impulso } \mathcal{P}: \quad & \mathcal{P} := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i; \\ \text{Centro de massa } \mathcal{S}: \quad & \mathbf{r}_S := \frac{m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{M}, \\ & \text{onde } m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad M := \sum_{i=1}^N m_i; \\ \text{Energia } \mathcal{E}: \quad & \mathcal{E} := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=i+1}^N U_{il}(|\mathbf{r}_{il}|); \\ \text{Momento angular } \mathcal{J}: \quad & \mathcal{J} := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i. \end{aligned}$$

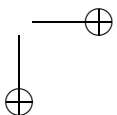
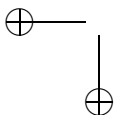
De um algebrismo elementar, obtemos

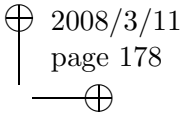
$$(8.24) \quad M \ddot{\mathbf{r}}_S = \sum_{i=1}^N K_i, \quad \frac{d\mathcal{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N K_i, \quad \frac{d\mathcal{J}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times K_i, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^N \langle \dot{\mathbf{r}}_i, K_i \rangle.$$

Em um *sistema fechado*, i.e. um sistema em que não atuam forças externas ($K_1 = \dots = K_N = 0$), temos os seguintes teoremas de conservação:

$$\begin{aligned} \text{Conservação de Impulso :} \quad & \frac{d\mathcal{P}}{dt} = 0 \\ \text{Conservação de Energia :} \quad & \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \\ \text{Conservação do Centro de massa :} \quad & \frac{d\mathbf{r}_S}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{M} \\ \text{Conservação do Momento angular :} \quad & \frac{d\mathcal{J}}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Se torna importante a seguinte pergunta: Quais mudanças de coordenadas levam sistemas referenciais inerciais em outros sistemas referen-





ciais inerciais? São as denominadas *Transformações de Galilei*:

$$\mathcal{G} : (t, \mathbf{r}) \mapsto (\alpha t + \beta, Q\mathbf{r} + \mathbf{w}t + \mathbf{a}),$$

onde Q é uma matriz ortogonal, $\alpha = -1$ e $\det(Q) = 1$.³ Uma segunda classe de transformações de Galilei é definida quando tomamos $\alpha = -1$ e $\det(Q) = -1$. O importante é verificar que as transformações de Galilei formam um grupo, o denominado *grupo ortócrono*. Cada uma dessas transformações possui, no caso $N = 1$, dez parâmetros livres:

- Q depende de 3 parâmetros (ângulos);
- \mathbf{w} depende de 3 parâmetros;
- \mathbf{a} depende de 3 parâmetros;
- β depende de 1 parâmetro.

Não é por acaso que existem dez quantidades escalares nas grandezas conservadas: Impulso, Energia, Centro de massa, Momento angular. A invariância da lei de Newton:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

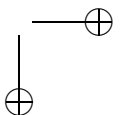
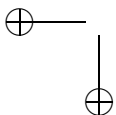
tem, em relação às transformações de Galilei, conseqüências que já foram mencionadas. Uma translação no tempo: $t \mapsto t + \beta$ age de forma que F não dependa explicitamente do tempo. Uma translação espacial: $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{w}t + \mathbf{q}$ age de forma que F dependa somente das coordenadas $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j$. Uma invariância em relação à rotação: $\mathbf{r} \mapsto Q\mathbf{r}$ significa que $F(Q\mathbf{r}, Q\dot{\mathbf{r}}) = QF(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

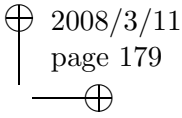
8.3 Mecânica Lagrangeana

O fato desta teoria ser denominada mecânica Lagrangeana é devido aos matemáticos (físicos) do século XVIII: d'Alembert, Euler, Legendre, Maupertuis e Lagrange.

Na determinação das posições no sistema de N corpos, precisamos obter N vetores de posição, i.e. $3N$ coordenadas escalares. Em geral, denomina-se por *grau de liberdade* o número de variáveis (escalares) a serem determinadas dentro de um sistema. As variáveis do sistema não precisam necessariamente tratarem-se de coordenadas cartesianas.

³Não apresentamos o desenvolvimento aqui. Para detalhes veja [Sc].





Quando um conjunto qualquer q_1, \dots, q_d de coordenadas determina totalmente o estado de um sistema (nesse caso com d graus de liberdade), denominamo-as por *coordenadas generalizadas* e as derivadas correspondentes por *velocidades generalizadas*.⁴ O espaço $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ é denominado espaço de fase.

A especificação das coordenadas generalizadas juntamente com as velocidades generalizadas em um tempo qualquer possibilita o conhecimento completo do sistema e permite, a princípio, que possamos descobrir a trajetória no futuro. Daí concluímos que, conhecidas todas as coordenadas q_i e velocidades \dot{q}_i em um tempo qualquer, também a aceleração \ddot{q}_i neste instante de tempo está unicamente determinada. A equação que relaciona a aceleração com a coordenada e a velocidade é denominada *dinâmica* do sistema.

Newton deriva as equações de movimento das por ele denominadas leis de movimento. Uma formulação generalizada dessas leis de movimento é descrita pelo denominado *princípio da ação mínima*. Maupertuis⁵ procurou, da mesma forma que Fermat, por tal princípio geral que abrangesse todas as leis da mecânica. A sua idéia foi formular este princípio a partir do impulso mvs ($m =$ massa, $v =$ velocidade, $s =$ distância), porém seu formalismo é impreciso. Euler buscou uma fórmula que possuísse como ponto central a integral de ação. Tal princípio foi finalmente denominado *princípio Hamiltoniano*. Por este princípio, todo sistema mecânico com d graus de liberdade é caracterizado por uma função: a *função Lagrangeana* \mathcal{L} , da forma

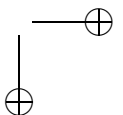
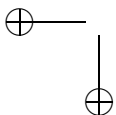
$$(8.25) \quad (t, q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) \mapsto \mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) =: \mathcal{L}(t, q, \dot{q}).$$

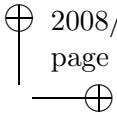
Nas aplicações que vamos aqui analisar, a hipótese de \mathcal{L} ser uma função duas vezes continuamente diferenciável é razoável.

De onde surgem entretanto as equações de movimento? De forma indireta. As equações de movimento surgem como aplicação do princípio da ação mínima à função lagrangeana \mathcal{L} . Um movimento $[a, b] \ni t \mapsto$

⁴Por exemplo, no problema do pêndulo simples (com suporte fixo) temos um único grau de liberdade, a saber: o ângulo.

⁵Maupertuis é também conhecido como *grand aplatisseur* pois tomou, na disputa entre as escolas Cartesiana e Newtoniana, partido pela última, afirmando que a Terra era achatada nos pólos e não no equador. Sua conclusão se baseou em medições realizadas durante uma expedição científica realizada em 1736, que objetivou determinar o comprimento de um grau ao longo de um meridiano.





$q(t) \in \mathbb{R}^d$ ocorre quando a integral $\int_a^b \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$, sujeita a restrição $q_a := q(a)$, $q_b := q(b)$, é minimizada.

A integral $\int_a^b \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$ é denominada *integral de ação*, pois L pode ser interpretado como energia e o produto de energia por tempo é denominado *ação*.

Fica assim claro qual é a forma da equação de movimento: É a equação diferencial de Euler para o seguinte problema variacional:

$$P_{\mathcal{L}}(a, b; q_a, q_b) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } J(a, b; q_a, q_b) := \int_a^b \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt \\ \text{sujeito às restrições } q(a) = q_a, q(b) = q_b. \end{cases}$$

Para o problema dos N corpos de massas m_1, \dots, m_N , descrito na Secção 8.2, temos $d := 3N$ graus de liberdade e as coordenadas generalizadas são as coordenadas do deslocamento dos corpos. Definimos a função Lagrangeana

$$(8.26) \quad \mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^N \sum_{l=i+1}^N U_{il}(|\mathbf{r}_{il}|).$$

Utilizando a notação

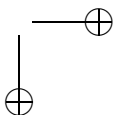
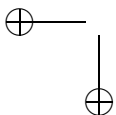
$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) := \sum_{i=1}^N \sum_{l=i+1}^N U_{il}(|\mathbf{r}_{il}|)$$

para o potencial, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = m_{\tilde{k}} \ddot{q}_k,$$

onde $m_{\tilde{k}}$ é uma notação simplificada (não enumerada) para as coordenadas. Da equação diferencial de Euler para o problema correspondente $P_{\mathcal{L}}(a, b; q_a, q_b)$, deduzimos as leis de movimento Newtonianas. O princípio da ação mínima nos leva, portanto, de volta aos fundamentos da mecânica clássica. (Note que o princípio da ação máxima, ou princípio de Fermat, nos leva a mesma conclusão.)

Observação 153. Uma vez escolhido para um determinado sistema a função lagrangeana, é possível deduzir as equações de movimento. Tais equações de movimento permanecem inalteradas, caso seja inserido na equação Lagrangeana o diferencial de uma função suave $(t, q) \mapsto M(t, q)$.



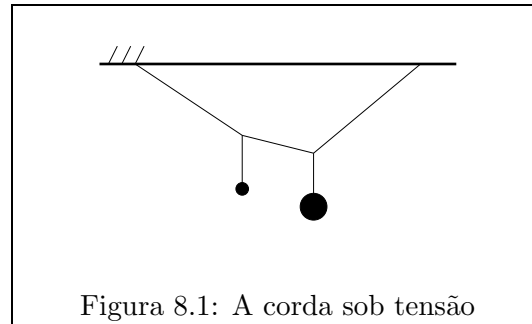
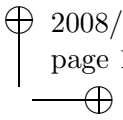
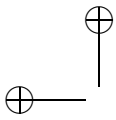


Figura 8.1: A corda sob tensão

A integral de ação, neste caso, fica alterada apenas por uma constante. □

O princípio Hamiltoniano de ação mínima é válido não somente para o movimento de uma partícula, mas para problemas mais complicados, conforme ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 154. Considere que em uma corda de comprimento $4l$ estão pendurados dois pontos de massa, conforme a Figura 8.1. São considerados somente deslocamentos verticais e, além disso, são considerados apenas pequenos deslocamentos (para deslocamentos grandes, as considerações feitas aqui não se aplicam). Sejam $y_1(t), y_2(t)$ os deslocamentos no tempo t das massas $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ respectivamente. A energia cinética do sistema (oscilando) é dada por

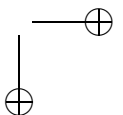
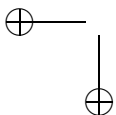
$$\frac{m}{2} \dot{y}_1(t)^2 + m \dot{y}_2(t)^2.$$

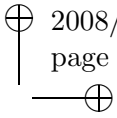
É uma hipótese fisicamente importante considerar a energia potencial proporcional à distensão da corda. Obtemos assim, para a parte que corresponde à distensão do lado esquerdo do fio (a esquerda de m_1), a expressão

$$\sqrt{(2l)^2 + y_1(t)^2} - 2l = 2l \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y_1(t)}{2l}\right)^2} - 1 \right).$$

Como estamos considerando apenas pequenas distensões da corda, a expressão correspondente à raiz pode ser aproximada por

$$1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_1(t)}{2l}\right)^2.$$





Obtemos assim para a energia potencial correspondente a expressão

$$\frac{y_1(t)^2}{4l}.$$

Considerações análogas nos permitem obter para os dois outros segmentos do fio (no centro e à direita de m_2) as seguintes expressões para a energia potencial:

$$\frac{|y_2(t) - y_1(t)|^2}{2l}, \quad \frac{y_2(t)^2}{2l}.$$

Temos assim a energia potencial total do sistema dada por

$$V(y_1, y_2) = \tau \left(\frac{y_1(t)^2}{4} + \frac{|y_2(t) - y_1(t)|^2}{2} + \frac{y_2(t)^2}{2} \right),$$

onde τ é uma constante de proporcionalidade entre a elasticidade do fio e o seu comprimento. A função Lagrangeana correspondente é

$$\mathcal{L}(t, y, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{y}_1^2 + 2\dot{y}_2^2) - \frac{\tau}{4}(y_1^2 + 2(y_2 - y_1)^2 + 2y_2^2).$$

A equação diferencial de Euler para o problema variacional resultante nos fornece o seguinte sistema

$$\ddot{y}_1 = \frac{\tau}{2m}(-3y_1 + 2y_2), \quad \ddot{y}_2 = \frac{\tau}{2m}(y_1 - 2y_2).$$

Temos assim

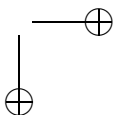
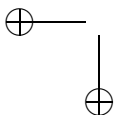
$$\frac{d^2}{dt^2}(y_1 + \alpha y_2) = \frac{\tau(\alpha - 3)}{2m} \left(y_1 + \frac{2 - 2\alpha}{\alpha - 3} y_2 \right).$$

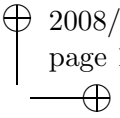
Se escolhermos α de forma que $\alpha = (2 - 2\alpha) \cdot (\alpha - 3)^{-1}$, i.e. $\alpha = 2$ ou $\alpha = -1$, obtemos para $u := y_1 + \alpha y_2$, $\alpha = 2$ ou $\alpha = -1$, a seguinte equação diferencial

$$\ddot{u} = -\omega^2 u \quad \text{bzw.} \quad \ddot{u} = -4\omega^2 u,$$

com $\omega := \frac{\tau}{2m}$. Resolvendo-a, obtemos as soluções linearmente independentes

$$u_1(t) = a_1 \cos \omega(t - \varphi_1), \quad u_2(t) = a_2 \cos 2\omega(t - \varphi_2),$$





com constantes de integração $a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2$. A partir daí, obtemos a solução geral para o movimento, como combinação linear da forma

$$y_1 := \frac{1}{3}(u_1 + 2u_2), \quad y_2 := \frac{1}{3}(u_1 - u_2).$$

Por exemplo, para a condição inicial

$$y_1(0) = b, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = b, \quad \dot{y}_2(0) = 0,$$

obtemos a solução

$$y_1(t) = b \cos \omega t, \quad y_2(t) = b \cos \omega t$$

correspondente. □

8.4 Mecânica Hamiltoniana

A mecânica Lagrangeana foi investigada por Hamilton no século XVIII em um novo contexto. Partimos da função Lagrangeana $\mathcal{L} : [a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e da respectiva equação diferencial de Euler

$$(8.27) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Esta equação gera um sistema com d equações diferenciais de segunda ordem, que em geral é não linear. Portanto, não simples de ser integrado. Tentamos a seguir uma técnica que facilita esta tarefa. Definimos o *momento conjugado*

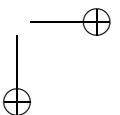
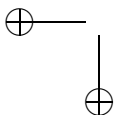
$$p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q})$$

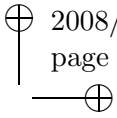
e obtemos de (8.27)

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q}), \quad \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(t, q, \dot{q}).$$

Este é agora um sistema de equações de primeira ordem, implícito em relação a \dot{q} . Tornamos a seguir essa dependência explícita. Resolvendo o momento conjugado em \dot{q} , através da hipótese

$$\dot{q} = G(t, q, p),$$





obtemos o seguinte sistema explícito

$$\dot{q} = G(t, q, p), \quad \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(t, q, G(t, q, p)).$$

Note que o teorema de funções implícitas (veja [Wa1]) nos fornece as condições suficientes para a solubilidade local:

$$(8.28) \quad \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0.$$

A solubilidade global ao longo de um extremal requer considerações mais detalhadas.

Definimos agora

$$\mathcal{H}(t, q, p) := \langle p, G(t, q, p) \rangle - \mathcal{L}(t, q, G(t, q, p))$$

e denominamos \mathcal{H} a correspondente *função de Hamilton*. Da regra da cadeia, obtemos (utilizamos a seguir notação simplificada)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} &= G_i + \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial p_i} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial G}{\partial p_i} \right\rangle = G_i + \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial p_i} \right\rangle - \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial p_i} \right\rangle = G_i, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} &= \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\rangle = \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\rangle = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial t} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial G}{\partial t} \right\rangle = \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial t} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial t} \right\rangle = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Essas equações nos levam ao sistema

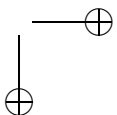
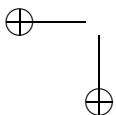
$$(8.29) \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(t, q, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(t, q, p), \quad \dot{\mathcal{H}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(t, q, p),$$

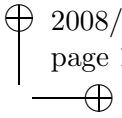
pois

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}}, \dot{p} \right\rangle.$$

Em (8.29) temos um sistema com $2d+1$ equações diferenciais de primeira ordem. Essas equações são denominadas *equações canônicas de movimento*. Elas são completadas por condições de contorno para q e uma condição inicial para \mathcal{H} .

Quando obtemos a aplicação G através do teorema de funções implícitas, G é $m-1$ vezes continuamente diferenciável sempre que a função Lagrangeana é m vezes continuamente diferenciável (verifique!). Das





equações do sistema (8.29), obtemos então que a função de Hamilton é também m vezes continuamente diferenciável. Logo, não há perda de regularidade quando introduzimos o momento conjugado.

Observação 155. O sistema de equações canônicas desfruta de uma propriedade interessante. Se uma figura $A_0 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ é transformada pelo sistema de equações canônicas na figura $A(t)$ no tempo t , então temos $\text{Volume}(A_0) = \text{Volume}(A(t))$ (até mesmo a orientação é conservada). Isto é consequência da fórmula de evolução de volume em uma equação diferencial ordinária. Para a equação $y' = f(y)$, esta fórmula nos diz que

$$v(t) = v(0) + \int_{A_0} \text{div}(f)(x) dx + O(t^2),$$

onde $v(t) := \text{Volume}(A(t))$ e $\text{div}(f)$ é o divergente do campo vetorial f . Como em um campo vetorial canônico

$$f := \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right),$$

quando este é continuamente diferenciável, o divergente

$$\text{div}\left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}$$

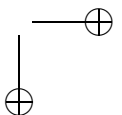
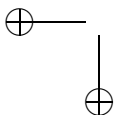
é identicamente nulo e a função volume v é constante. Este resultado é conhecido como teorema de Liouville (veja [Wa2]). \square

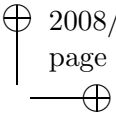
Caso \mathcal{H} não dependa explicitamente do tempo, a equação diferencial para \mathcal{H} é trivial. O sistema restante pode ser escrito na forma compacta

$$z' = J \nabla \mathcal{H}(z), \quad J := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad z := (q, p).$$

Definição 156. Uma função $M : [a, b] \times \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada uma *(primeira) integral*, quando para toda solução (q, p) das equações canônicas (8.29), existir uma constante k com $M(t, q(t), p(t)) = k$, para todo t . \square

A denominação *integral* vem do fato que, eventualmente, integrando as equações canônicas e utilizando uma fórmula do tipo $M(t, q, p) = k$ é possível obter o movimento. Note que a primeira integral não é suficiente





para este objetivo ($q(t) \in \mathbb{R}^d$). Entretanto, no caso autônomo, se dispomos de d integrais, podemos tentar obter completamente o movimento a partir das fórmulas:

$$M_1(q, p) = k_1, \dots, M_d(q, p) = k_d.$$

No problema do movimento planetário obtivemos, após a redução do problema a um plano, duas integrais (energia e momento angular) e o movimento pode ser calculado. Uma interpretação geométrica da integral é que o movimento ocorre sobre a superfície de nível $M(q, p) = k$.

Primeiras integrais são obtidas da seguinte forma: Se \mathcal{H} independe de alguma variável q_i ou p_i , então a projeção sobre esta variável é uma primeira integral. Em particular a função de Hamilton é uma primeira integral, caso ela não dependa explicitamente do tempo.

Seja $M : [a, b] \times \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação continuamente diferenciável. Seja ainda (q, p) uma solução conhecida de (8.29) em $[a, b]$. Ao longo desta solução, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} - \frac{\partial M}{\partial t} &= \left\langle \frac{\partial M}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial M}{\partial p}, \dot{p} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial M}{\partial q}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial M}{\partial p}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right\rangle =: [\mathcal{H}, M], \end{aligned}$$

onde $[\mathcal{H}, M]$ é denominado *colchete de Poisson*. Portanto, para que M seja uma primeira integral é necessário e suficiente que

$$(8.30) \quad \frac{\partial M}{\partial t}(t, q, p) + [\mathcal{H}, M](t, q, p) = 0, \quad (t, q, p) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{2d}.$$

É de simples verificação o fato de o colchete de Poisson de duas integrais gerar uma outra integral (possivelmente trivial).

Exemplo 157. Seja a função Lagrangeana

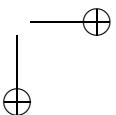
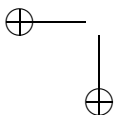
$$\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) := \sqrt{(t^2 + q^2)(1 + \dot{q}^2)}.$$

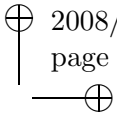
A resolução da equação

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q})$$

em relação a \dot{q} nos fornece a relação

$$\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}}.$$





Obtemos assim a função de Hamilton

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, y, p) &= \frac{p^2}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}} - \sqrt{t^2 + q^2} \sqrt{1 + \frac{p}{(t^2 + q^2 - p^2)}} \\ &= -\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}. \end{aligned}$$

As equações canônicas são

$$\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}}, \quad \dot{p} = \frac{q}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}}.$$

Obviamente, temos que

$$M(q, p) := p^2 - q^2$$

define uma primeira integral. □

Ainda uma observação sobre técnicas de transformação. Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente convexa, da qual desejamos descobrir o ponto de mínimo. Suponha ainda que f' define um difeomorfismo, i.e. $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e $f''(\xi) > 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Defina

$$f^*(p) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{\xi p - f(\xi)\}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

O supremo é atingido em um ponto ξ com $f'(\xi) = p$. A transformação $p \mapsto \xi$ é denominada *transformação de Legendre* e f^* é a *transformada de Legendre* de f . Note que f^* é novamente convexa. Por construção, temos que $(f^*)^* = f$ e

$$(8.31) \quad f(\xi) + f^*(p) \geq p\xi, \quad \forall p, \xi \in \mathbb{R}.$$

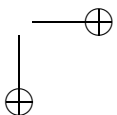
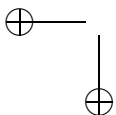
Note ainda que a seguinte equivalência é válida:

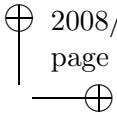
$$(8.32) \quad f(\xi) + f^*(p) = p\xi \iff f'(\xi) = p.$$

Fazendo uma comparação com a definição anterior da função de Hamilton, observamos que $\mathcal{H}(t, y, p)$ pode ser escrita como

$$\mathcal{H}(t, q, p) = \mathcal{L}(t, q, \cdot)^*(p).$$

Este é o ponto de partida para uma formulação geral do princípio Hamiltoniano. A teoria necessária para análise de transformações de Lagrange genéricas é a análise convexa.





Exemplo 158. Suponha

$$f(\xi) := \frac{1}{\alpha} |\xi|^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 1.$$

Logo, $f'(\xi) = \xi^{\alpha-1}$ e obtemos daí que

$$f^*(p) = \frac{1}{\beta} |p|^\beta, \quad p \in \mathbb{R},$$

onde $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Observe a conexão entre f e f^* na dualidade dos espaços l_α, l_β e $L_\alpha(X), L_\beta(X)$ ($X \subset \mathbb{R}^d$). \square

Exemplo 159. Considere novamente o movimento de uma partícula de massa m em um campo central. Supomos que o movimento ocorre no plano (plano $(x - y)$) e usamos a representação por coordenadas polares

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t), \quad y(t) = r(t) \sin \varphi(t).$$

Uma função Lagrangeana é

$$\mathcal{L}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) := \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Neste caso, temos $q_1 = r, q_2 = \varphi, p_1 = m\dot{r} =: p_r, p_2 = mr^2\dot{\varphi} =: p_\varphi$. A função de Hamilton é

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r),$$

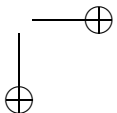
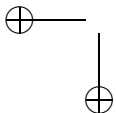
de onde obtemos as equações canônicas

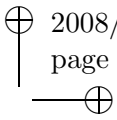
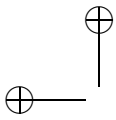
$$(8.33) \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - U'(r), \quad \dot{p}_\varphi = 0.$$

Podemos novamente detectar quais grandezas são conservadas neste problema. \square

Observação 160. Transformações no espaço $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ geram transformações nas equações Hamiltonianas. Tais transformações se tornam interessantes quando preservam estruturas especiais (*simpléticas*) nas equações canônicas. Tal análise nos conduz ao grupo $\mathcal{S}_{2d}(\mathbb{R})$ das *matrizes simpléticas*. São matrizes M tais que

$$M^T J M = J,$$





isto é matrizes ortogonais com relação à estrutura simplética. Em outras palavras, a forma bilinear em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ definida por $(x, y) \mapsto [x, y] := \langle x, Jy \rangle$ é invariante a mudanças de coordenada geradas por uma matriz simplética, i.e. $[x, y] = [Mx, My]$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$. O contexto abstrato para análise geométrica da mecânica Lagrangeana/Hamiltoniana é o das variedades simpléticas. Aqui, a função Lagrangeana é considerada como uma função definida no espaço tangente ao espaço de coordenadas. \square

Observação 161. Quando consideramos o problema $P_{\mathcal{L}}(a, b; q_a, q_b)$, tomamos fixos b, q_b e consideramos a família de problemas $P_{\mathcal{L}}(\cdot, b; \cdot, q_b)$. Daí obtemos uma *função de ação*

$$(8.34) \quad \mathcal{S}(t, q) := - \inf P_{\mathcal{L}}(t, b; q, q_b), \quad (t, q) \in [a, b] \times \mathbb{R}^d.$$

Calculando formalmente, obtemos

$$(8.35) \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}(t, q) = p, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, q) = -\mathcal{H}(t, q, p).$$

Portanto, a função de ação é solução da equação parcial

$$(8.36) \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \mathcal{H}(t, q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}) = 0, \quad (t, q) \in [a, b] \times \mathbb{R}^d,$$

e satisfaz as condições de contorno

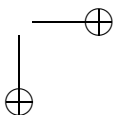
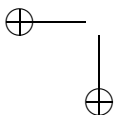
$$(8.37) \quad \mathcal{S}(b, q) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{R}^d.$$

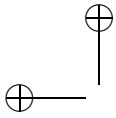
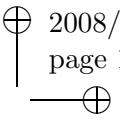
A equação (8.36) é denominada *equação de Hamilton–Jacobi*.

Uma série de questões surge do desenvolvimento acima, como por exemplo: diferenciabilidade de \mathcal{S} ; validade das equações em (8.35), (8.36); solubilidade do problema de valor inicial (8.36), (8.37). Uma análise destas questões no contexto da teoria de controle ótimo é apresentada nos Capítulos 11 e 12, quando estudamos a função valor ótimo. \square

Exercícios

8.1. Considere a função Lagrangeana $\mathcal{L}(t, q, p) := p^2$ in $[a, b]$. Obtenha a função Hamiltoniana \mathcal{H} e a equação de Hamilton–Jakobi.





8.2. Considere a função Lagrangeana $\mathcal{L}(t, q, p) := f(q)\sqrt{1+p^2}$ em $[a, b]$. Obtenha a função Hamiltoniana \mathcal{H} e a equação de Hamilton–Jakobi.

8.3. Considere a função Lagrangeana $\mathcal{L}(t, q, p) := \sqrt{t^2 + q^2}\sqrt{1+p^2}$ em $[a, b]$. Obtenha a função Hamiltoniana e os extremais.

8.4. Considere a integral de ação

$$\frac{1}{2} \int_a^b (m\dot{q}(t)^2 - cq(t))dt.$$

- a) Obtenha a equação diferencial de Euler;
- b) Formule as equações canônicas (coordenadas p, q) e obtenha a função de Hamilton;
- c) Calcule os colchetes de Poisson $[q, p]$, $[q, \mathcal{H}]$ e $[p, \mathcal{H}]$. O que podemos concluir da primeira integral?

8.5. Seja $f(x) := e^{|x|} - |x| - 1, x \in \mathbb{R}$. Calcule a transformada de Legendre f^* ($f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}}(xy - f(x)), y \in \mathbb{R}$).

8.6. A função de Hamilton para o movimento de um ponto de massa em um campo de forças com potencial U é dada por

$$\mathcal{H}(q, p) := \frac{1}{2m}|p|^2 + U(q), \quad q, p \in \mathbb{R}^3.$$

Calcule a função de Hamilton em coordenadas cilíndricas e esféricas.

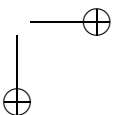
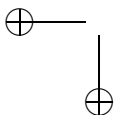
8.7. Considere a função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(t, x, \dot{x}) := \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{|x + \sigma|} - \frac{\beta}{|x - \sigma|}.$$

(Campo de Coulomb com dois centros fixos.) Obtenha a a função de Hamilton e as equações canônicas.

8.8. Considere o sistema escalar $\ddot{x} = -U'(x)$, com $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes continuamente diferenciável. Suponha que U seja qualitativamente da forma apresentada na Figura 8.2.

- a) O que representam os extremos locais de U para o movimento? Como se distinguem os máximos dos mínimos locais de U em relação ao



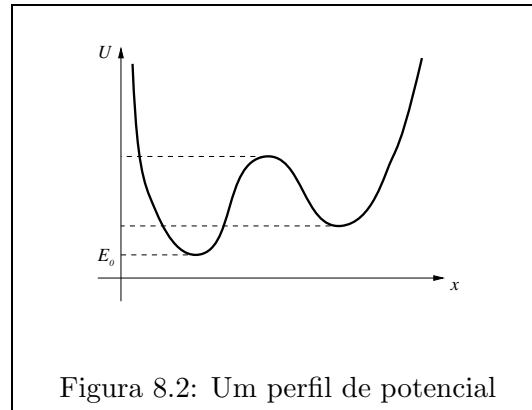
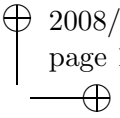
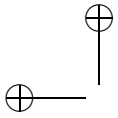


Figura 8.2: Um perfil de potencial

movimento?

b) Faça um esboço da curva correspondente ao movimento no plano de fase $x - \dot{x}$;

c) Calcule $\lim_{E \rightarrow E_0} T(E)$, onde $T(E)$ é o período de tempo do movimento para E próximo a E_0 .

8.9. Faça um esboço do potencial unidimensional

$$U(r) := -5re^{-r} + r^{-4} + \frac{2}{r}$$

e da curva correspondente ao movimento no plano de fase $x - \dot{x}$, para uma partícula de massa unitária, como função da energia e da posição inicial.

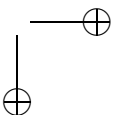
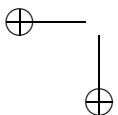
8.10. Considere dois pêndulos idênticos de comprimento l e massa m , acoplados por um fio ideal. O fio está estendido quando ambos os pêndulos estão em repouso. Para pequenas perturbações, a energia total é dada por

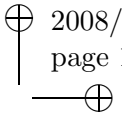
$$E = \frac{1}{2m}(q_2^2 + q_4^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(q_1^2 + q_3^2) + \frac{1}{2}m\omega_1^2(q_1 - q_3)^2.$$

a) Identifique os termos na equação acima;

b) Obtenha as equações de movimento;

c) Encontre uma mudança de variáveis que desacople as equações de movimento e resolva as novas equações encontradas.





Capítulo 9

Cálculo Variacional e Controle Ótimo

Analizamos neste capítulo a conexão existente entre problemas do cálculo variacional e problemas de controle ótimo. Na Secção 9.1 é feita uma breve apresentação dos problemas de controle ótimo. Na Secção 9.2 são estudados problemas variacionais sujeitos às restrições transversais, isoperimétricas e lagrangeanas, descritas na Secção 7.1. Os resultados obtidos são estendidos aos problemas de controle ótimo correspondentes. Na Secção 9.3 analisamos uma família de restrições muito utilizada em aplicações, que está associada a um tipo de solução semelhante às soluções bang–bang (veja Secção 3.7).

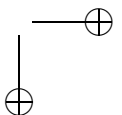
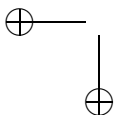
Nas duas últimas Secções, 9.4 e 9.5, estudamos, sob hipóteses adicionais de convexidade, a suficiência e necessidade para otimalidade de um conjunto particular de condições. Damos assim o primeiro passo na direção de um dos principais resultados na teoria de controle ótimo, a saber: o princípio do máximo de Pontryagin.

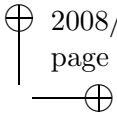
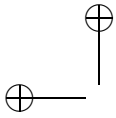
9.1 O que é Controle Ótimo

Em um problema de controle, uma *variável de estado* $z = z(t) \in \mathbb{R}^n$ dependente do tempo evolui de acordo com uma dada dinâmica

$$(9.1) \quad z'(t) = f(t, z(t), u(t)), \quad t > t_0,$$

a partir de um estado inicial $z(t_0) = z_0$. Aqui $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ corresponde ao modelo estudado, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ é o estado inicial do sistema





e $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um parâmetro livre influenciando a dinâmica, denominado *controle* do sistema. Em muitos problemas é também fornecida uma condição de contorno final $z(t_1) = z_1$, ou ainda uma condição de contorno transversal. A equação (9.1) é denominada *equação de estado*.

Nos problemas de controle ótimo considerados neste capítulo, a tarefa que se impõe é a de minimizar funcionais do tipo

$$J(u, z) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, z(t), u(t)) dt,$$

com $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, onde z e u estão relacionados pela dinâmica $z' = f(t, z, u)$, $t \in (t_0, t_1)$ e ainda $z(0) = z_0$, $z(t_1) = z_1$, $u \in \mathcal{U}_{ad}$.

O conjunto \mathcal{U}_{ad} é denominado *conjunto de controles admissíveis* e usualmente é escolhido como subconjunto de $C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$, $\hat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ ou $L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$. Note que diferentes escolhas de \mathcal{U}_{ad} implicam em diferentes graus de regularidade de z e também determinam o conceito que deve ser utilizado para definir a solução do problema de valor inicial em (9.1).

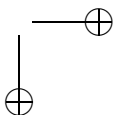
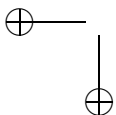
Podemos formular o problema de controle ótimo descrito acima do seguinte modo

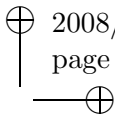
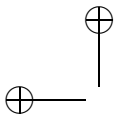
$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(u, z) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a } u \in \mathcal{U}_{ad}, \\ z' = f(t, z, u), t \in (t_0, t_1), z(0) = z_0, z(t_1) = z_1. \end{cases}$$

A analogia entre os problemas de controle ótimo e os problema do cálculo de variações se torna evidente quando observamos que, no caso particular $f(t, z, u) = u$, o problema acima toma a forma do problema variacional (7.2). É exatamente esta semelhança que nos permite comparar as condições de otimalidade para ambas as classes de problemas.

Assim como os problemas variacionais, os problemas de controle ótimo podem ser formulados com condições de contorno transversais, restrições lagrangeanas ou restrições isoperimétricas. Nas próximas duas secções tratamos problemas variacionais restritos, assim como problemas de controle que são de certa forma análogos a estes problemas variacionais.

No problema acima, os instantes de tempo inicial e final são dados (problemas de tempo fixo). Porém, o instante de tempo final pode ser





uma das incógnitas no problema de controle ótimo (problemas de tempo livre). De interesse são ainda os problemas formulados no intervalo $[t_0, \infty)$ (problemas com horizonte infinito), assim como problemas em que são admitidas descontinuidades na variável de estado z (problemas impulsivos). Com exceção dos problemas impulsivos, os demais problemas de controle são abordados no Capítulo 10, juntamente com uma formulação bastante geral do problema acima.

9.2 Problemas Variacionais com Restrição

Com a intenção de contruir uma ponte, que permita estender aos problemas de controle ótimo os resultados conhecidos da teoria do cálculo variacional, analisamos nesta seção famílias específicas de problemas, a saber: aqueles em que são impostas restrições extras às trajetórias admissíveis.

Começamos por estudar os problemas variacionais com condições de contorno transversais. Considere o problema

$$(9.2) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(y, T) := \int_a^T L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ T > a; \sigma(T, y(T)) = 0; y \in \{y \in C^1[a, T] \mid y(a) = y_a\}; \end{cases}$$

onde $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $y_a \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, com $\nabla\sigma \neq 0$.¹ Note que nem o tempo final nem a condição de contorno final são especificados. A condição final para as funções admissíveis é fornecida pela curva de nível zero da função σ (veja Figura 9.1).

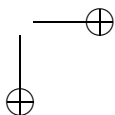
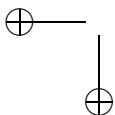
Suponha que (\bar{y}, \bar{T}) com $\bar{y} \in C^1[a, \bar{T}]$ é um mínimo local fraco para o problema (9.2). Logo, para funções teste $\eta \in C_0^1[a, \bar{T}]$, temos

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} I(\bar{y} + \varepsilon\eta, \bar{T}) \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

de onde concluímos, argumentando como na Seção 7.3, que \bar{y} satisfaz a equação de Euler–Lagrange em (a, \bar{T}) . Temos assim as condições necessárias

$$y(a) = y_a, \quad \frac{d}{dt} L_{y'}(t, \bar{y}, \bar{y}') = L_y(t, \bar{y}, \bar{y}'), \quad t \in (a, \bar{T}).$$

¹A constante $b \in \mathbb{R}$ é tomada grande o bastante, de forma a não interferir na formulação do problema.



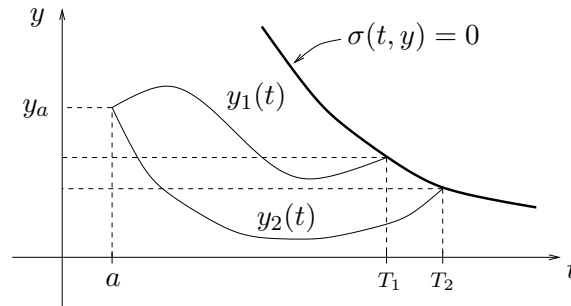


Figura 9.1: Condição de transversalidade e funções admissíveis

Falta ainda obter, como na Observação 132, uma condição de contorno natural que relacione o tempo final \bar{T} com a função σ , que descreve a condição final. Essa condição natural é obtida como consequência do teorema de multiplicadores de Lagrange.

Defina $Y_{ad} := \{y \in C^1[a, b] \mid y(a) = y_a\}$. Note que os candidatos à solução do problema variacional (9.2) são pares da forma $(y, T) \in Y_{ad} \times \mathbb{R} \subset C^1[a, b] \times \mathbb{R} =: Y$. Note ainda que Y é um espaço vetorial normado com a norma do produto cartesiano $\|(y, T)\| := \|y\|_{1, \infty} + |T|$. A função objetivo I está bem definida como uma aplicação de Y em \mathbb{R} e a variação de I em (\bar{y}, \bar{T}) na direção $(\eta, \gamma) \in Y$ é dada por²

$$\delta I(\bar{y}, \bar{T}; \eta, \gamma) = L(\bar{T}, \bar{y}, \bar{y}') \gamma + \int_a^{\bar{T}} [L_y(t, \bar{y}, \bar{y}') \eta(t) + L_{y'}(t, \bar{y}, \bar{y}') \eta'(t)] dt$$

e como \bar{y} é estacionária em (a, \bar{T}) , usamos a equação de Euler–Lagrange para reescrever o integrando da expressão acima, obtendo

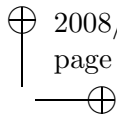
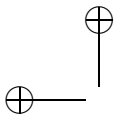
$$\begin{aligned} \delta I(\bar{y}, \bar{T}; \eta, \gamma) &= L(\bar{T}, \bar{y}, \bar{y}') \gamma + \int_a^{\bar{T}} \frac{d}{dt} [L_{y'}(t, \bar{y}, \bar{y}') \eta(t)] dt \\ &= L(\bar{T}, \bar{y}, \bar{y}') \gamma + [L_{y'}(t, \bar{y}, \bar{y}') \eta(t)]_a^{\bar{T}}. \end{aligned}$$

Observe que a condição final de transversalidade pode ser reescrita como $G(y, T) = 0$, onde $G : Y \ni (y, T) \mapsto \sigma(T, y(T)) \in \mathbb{R}$. Calculando a variação de Gâteaux de G em (\bar{y}, \bar{T}) na direção $(\eta, \gamma) \in Y$, obtemos³

$$\delta G(\bar{y}, \bar{T}; \eta, \gamma) = \sigma_t(\bar{T}, \bar{y}) \gamma + \sigma_y(\bar{T}, \bar{y}) [\bar{y}'(\bar{T}) \gamma + \eta(\bar{T})].$$

²Lembre que $\delta I(\bar{y}, \bar{T}; \eta, \gamma) = (d/d\varepsilon) I(\bar{y} + \varepsilon \eta, \bar{T} + \varepsilon \gamma)|_{\varepsilon=0}$.

³Note que $\delta G(\bar{y}, \bar{T}; \eta, \gamma) = (d/d\varepsilon) \sigma(\bar{T} + \varepsilon \gamma, (\bar{y} + \varepsilon \eta)(\bar{T} + \varepsilon \gamma))|_{\varepsilon=0}$. Para simplificar a notação escrevemos $\sigma(\bar{T}, \bar{y})$ ao invés de $\sigma(\bar{T}, \bar{y}(\bar{T}))$.



O teorema de multiplicadores de Lagrange nos garante agora que se (\bar{y}, \bar{T}) é um mínimo local de I sujeito à restrição $G(y, T) = 0$, então ou $\delta G(\bar{y}, \bar{T}; \cdot, \cdot) \equiv 0$, ou existe um multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\delta(I + \lambda G)(\bar{y}, \bar{T}; \cdot, \cdot) \equiv 0$. Como o primeiro caso implica em $\nabla \sigma(\bar{T}, \bar{y}(\bar{T})) = 0$, podemos descartá-lo devido às hipóteses do problema (9.2).

Tomando funções teste $\eta \in C_0^1[a, \bar{T}]$ e $\gamma \neq 0$, temos

$$(9.3) \quad 0 = \delta(I + \lambda G)(\bar{y}, \bar{T}; \eta, \gamma) = L(\bar{T}, \bar{y}, \bar{y}') \gamma + \lambda [\sigma_t(\bar{T}, \bar{y}) + \sigma_y(\bar{T}, \bar{y}) \bar{y}'(\bar{T})] \gamma.$$

Enquanto que escolhendo (η, γ) com $\gamma = \eta(a) = 0$ e $\eta(\bar{T}) \neq 0$, obtemos

$$L_{y'}(\bar{T}, \bar{y}, \bar{y}') \eta(\bar{T}) + \lambda \sigma_y(\bar{T}, \bar{y}) \eta(\bar{T}) = 0,$$

i.e., $\lambda = -L_{y'}(\bar{T}, \bar{y}, \bar{y}') / \sigma_y(\bar{T}, \bar{y})$. Substituindo em (9.3), temos

$$(9.4) \quad L(\bar{T}, \bar{y}, \bar{y}') \sigma_y(\bar{T}, \bar{y}) = L_{y'}(\bar{T}, \bar{y}, \bar{y}') [\sigma_t(\bar{T}, \bar{y}) + \sigma_y(\bar{T}, \bar{y}) \bar{y}'(\bar{T})],$$

que é a condição natural que buscávamos. A condição (9.4) é denominada *condição de transversalidade*. Podemos resumir a discussão acima na forma do seguinte teorema:

Teorema 162. *Seja $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $\sigma \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ com $\nabla \sigma \neq 0$. Se (\bar{y}, \bar{T}) é um mínimo local fraco de I em $Y_{ad} \times \mathbb{R}$ restrito a $\sigma(T, y(T)) = 0$, então (\bar{y}, \bar{T}) é solução do problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} L_y(t, y, y') - \frac{d}{dt} L_{y'}(t, y, y') = 0, & t \in (a, T) \\ y(a) = y_a, & L(T, y, y') \sigma_y(T, y) \\ & = L_{y'}(T, y, y') [\sigma_t(T, y) + \sigma_y(T, y) y'(T)]. \end{cases}$$

■

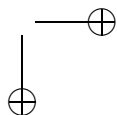
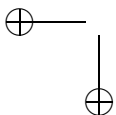
Observação 163. Tomando $\sigma(T, y) = t - b$ no Teorema 162, fixamos o tempo final $T = b$ e deixamos livre a condição de contorno final. Neste caso, a condição de transversalidade se escreve como

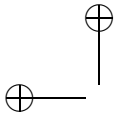
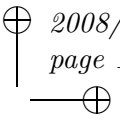
$$L_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0,$$

que é exatamente a condição natural para os problemas com fronteira livre, obtida na Observação 132.

Tomando $\sigma(T, y) = y - y_b$ no Teorema 162, deixamos o tempo final livre e fixamos a condição de contorno final $y(T) = y_b$. Neste caso a condição de transversalidade se escreve como

$$L(T, y(T), y'(T)) = y'(T) L_{y'}(T, y(T), y'(T)).$$





Tais problemas são denominados na literatura por *problemas de horizonte livre*. \square

Antes de prosseguirmos com a análise de problemas sujeitos a restrições isoperimétricas e lagrangeanas, apresentamos uma versão do teorema de multiplicadores de Lagrange em espaços vetoriais genéricos. Para tanto, consideramos que a função objetivo e a restrição são descritas por aplicações Gâteaux diferenciáveis.

Teorema 164 (Lagrange). *Seja Y um espaço vetorial normado e I, G aplicações de Y em \mathbb{R} . Suponha que as variações de Gâteaux $\delta I(y, v), \delta G(y, v)$ estão bem definidas para $y, v \in Y$ e ainda que, para cada $y, v \in Y$ tenhamos $\delta I(y_n, v) \rightarrow \delta I(y, v), \delta G(y_n, v) \rightarrow \delta G(y, v)$ sempre que $y_n \rightarrow y$ em Y .⁴ Se \bar{y} é um mínimo local de I sujeito à restrição $G(y) = 0$, então ou $\delta G(\bar{y}, \cdot) \equiv 0$, em Y ou existe um multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\delta I(\bar{y}, v) = \lambda \delta G(\bar{y}, v), \forall v \in Y.$$

Demonstração: Veja [Tr, Capítulo 5]. \blacksquare

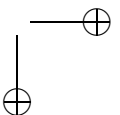
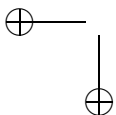
Na realidade, o teorema acima continua válido se exigimos continuidade fraca de δI e δG apenas em \bar{y} . Uma consequência imediata do teorema de Lagrange é que os conjuntos de nível $\{y \in Y; I(y) = I(\bar{y})\}$ e $\{y \in Y; G(y) = 0\}$ possuem o mesmo hiperplano tangente em \bar{y} .

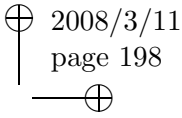
Tratamos a seguir dos problemas variacionais com restrições isoperimétricas (ou integrais). Considere o problema

$$(9.5) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in Y_{ad} := \{y \in C^1[a, b] \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}; \\ F(y) := \int_a^b G(t, y(t), y'(t)) dt = c; \end{cases}$$

onde $L, G \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ e $y_a, y_b, c \in \mathbb{R}$ são dados. Como consequência imediata do teorema de Lagrange, obtemos o seguinte resultado:

⁴Tal propriedade é denominada *continuidade fraca* da variação de Gâteaux.





Teorema 165. *Sejam $L, G \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$, tais que $\delta F(y; \cdot) \neq 0$ no conjunto de nível c do funcional F , definido por*

$$F_c := \{y \in C^1[a, b] \mid F(y) = c\}.$$

Se \bar{y} é um mínimo local fraco do problema (9.5), então existe um multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que \bar{y} é solução do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} (L + \lambda G)_y(t, y, y') - \frac{d}{dt}(L + \lambda G)_{y'}(t, y, y') = 0, & t \in (a, b) \\ y(a) = y_a, & y(b) = y_b. \end{cases}$$

Demonstração: É deixada como exercício para o leitor. ■

A seguir obtemos condições necessárias para problemas variacionais com restrições lagrangeanas. Considere o problema

$$(9.6) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in Y_{ad} := \{y \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n) \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}; \\ G(t, y(t)) = 0, \quad t \in [a, b]; \end{cases}$$

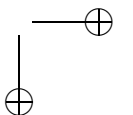
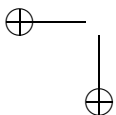
onde $L : [a, b] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $G : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $y_a, y_b \in \mathbb{R}^n$ são dados. Note que no caso particular $n = 1$, o problema de minimização perde o sentido, pois a restrição $G(t, y(t)) = 0$ na maioria dos casos determina y completamente.

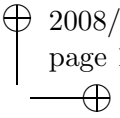
Teorema 166. *Sejam $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$, $G \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ com $G_y(t, y) \neq 0$. Se $\bar{y} \in Y_{ad}$ é um mínimo local fraco de I em Y_{ad} sujeito à restrição lagrangeana $G(t, y(t)) = 0$, $t \in [a, b]$, então existe uma função (multiplicador) $\lambda \in C[a, b]$, tal que*

$$\frac{d}{dt}[L + \lambda G]_{y'} = [L + \lambda G]_y, \quad t \in (a, b).$$

Demonstração: Seja $\tau \in (a, b)$. Como $G_y(\tau, \bar{y}(\tau)) \neq 0$, então para pelo menos um índice $1 \leq j \leq n$, temos $G_{y_j}(\tau, \bar{y}(\tau)) \neq 0$. Por conveniência representamos $y \in \mathbb{R}^n$ por (y_j, Y) , onde y_j é a j -ésima componente de y e $Y \in \mathbb{R}^{n-1}$ é o vetor contendo as demais componentes.⁵ O teorema

⁵Em particular temos $\bar{y}(t) = (\bar{y}_j(t), \bar{Y}(t))$.





da função implícita (ver [Ru2] ou [Wa1]) garante a existência de uma função $g \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ definida em uma vizinhança de $(\tau, \bar{Y}(\tau))$, tal que $G(t, y) = 0$ se e somente se $y_j = g(t, Y)$. Sendo assim, podemos reescrever (localmente) a restrição do problema (9.6) como: $\exists [c, d] \subset (a, b)$ com $\tau \in (c, d)$ e $y_j(t) = g(t, Y(t))$, $t \in [c, d]$.

Definindo o conjunto $V := \{Y \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^{n-1}) \mid Y(t) = \bar{Y}(t), t \notin (c, d)\}$, podemos construir para cada $Y \in V$ a função

$$y_j(t) := \begin{cases} g(t, Y(t)), & t \in (c, d) \\ \bar{y}_j(t), & t \notin (c, d) \end{cases}$$

obtendo assim $y(t) := (y_j(t), Y(t)) \in Y_{ad}$ que obviamente satisfaz $G(t, y(t)) = 0$, $t \in [a, b]$. Definimos agora o funcional

$$\begin{aligned} \tilde{I} : C^1([a, b]; \mathbb{R}^{n-1}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Y(t) &\longmapsto I(g(\cdot, Y), Y) \end{aligned}$$

Por construção, temos

$$\tilde{I}(Y) = \int_a^b L(t, y_j, Y, y'_j, Y') dt,$$

onde

$$y_j(t) = g(t, Y(t)) \text{ e } y'_j(t) = (d/dt) g(t, Y(t)) = g_t(t, Y) + g_Y(t, Y)Y'.$$

Definindo $\tilde{L}(t, Y, Y') := L(t, y_j, Y, y'_j, Y')$, podemos escrever

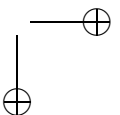
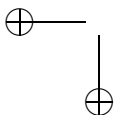
$$\tilde{I}(Y) = \int_a^b \tilde{L}(t, Y, Y') dt = \int_c^d \tilde{L}(t, Y, Y') dt + const.,$$

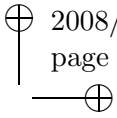
para todo $Y \in V$. Como \bar{y} é mínimo local do problema (9.6), então \bar{Y} é mínimo local de \tilde{I} em V (por que?). Portanto, \bar{Y} satisfaz

$$(9.7) \quad \frac{d}{dt} \tilde{L}_{Y'} = \tilde{L}_Y, \quad t \in (c, d).$$

Por construção, temos $\tilde{L}_{Y'} = L_{y'_j} g_Y + L_{Y'}$ e $\tilde{L}_Y = L_{y_j} g_Y + L_Y + L_{y'_j} [g_t + g_Y Y']_Y$. Substituindo em (9.7), temos

$$(9.8) \quad \frac{d}{dt} [L_{y'_j} g_Y + L_{Y'}] = L_{y_j} g_Y + L_Y + L_{y'_j} [g_t + g_Y Y']_Y, \quad t \in (c, d).$$





Usando agora a identidade $[g_t + g_Y Y']_Y = (d/dt) g_Y$, obtemos de (9.8)

$$\frac{d}{dt} L_{Y'} - L_Y = \left[-\frac{d}{dt} L_{y'_j} + L_{y_j} \right] g_Y, \quad t \in (c, d).$$

Como $G(t, g(t, Y), Y) \equiv 0$ em uma vizinhança de $(\tau, \bar{Y}(\tau))$, temos que

$$G_{y_j}(t, g(t, Y), Y) g_Y + G_Y(t, g(t, Y), Y) = 0.$$

Logo, para qualquer função $\lambda \in C[c, d]$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [L + \lambda G]_{Y'} - [L + \lambda G]'_Y &= \frac{d}{dt} L_{Y'} - L_Y - \lambda G_Y \\ &= \frac{d}{dt} L_{Y'} - L_Y + \lambda G_{y_j} g_Y \\ &= \left[-\frac{d}{dt} L_{y'_j} + L_{y_j} + \lambda G_{y_j} \right] g_Y. \end{aligned}$$

A escolha $\lambda(t) = [(d/dt) L_{y'_j} - L_{y_j}] / G_{y_j} \in C[c, d]$ (lembre que $G_{y_j} \neq 0$ em $[c, d]$) nos fornece a equação

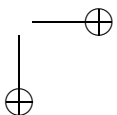
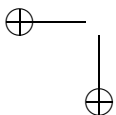
$$(9.9) \quad \frac{d}{dt} [L + \lambda G]_{Y'} - [L + \lambda G]'_Y = 0, \quad t \in (c, d).$$

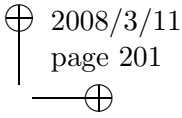
Provamos assim que para essa escolha de multiplicador, a equação de Euler–Lagrange é satisfeita em uma vizinhança de $t = \tau$. Como $\tau \in (a, b)$ é arbitrário, concluímos que o teorema é válido localmente no intervalo (a, b) .

Note que é possível ‘cobrir’ o intervalo compacto $[a, b]$ com uma família finita de sub-intervalos, tais que em cada um deles, $G_{y_j} \neq 0$ para algum j . A escolha do multiplicador λ em cada sub-intervalo depende apenas deste fato, o que justifica a conclusão de que é possível escolher $\lambda \in C[a, b]$, de modo que (9.9) seja satisfeita em todo intervalo (a, b) . ■

Observação 167. É possível formular o problema (9.6) com $G = G(t, y, y')$ e, ainda assim, obter um resultado análogo ao apresentado no Teorema 166. A verificação deste resultado mais geral pode ser encontrada, e.g., em [Tr, Capítulo 11]. □

O interesse no estudo dos problemas (9.2), (9.5) e (9.6) para a teoria de controle ótimo, deve-se ao fato de diversas famílias de problemas





possuírem equação de dinâmica da forma: $z'(t) = u(t)$; ou ainda $z'(t) = f_1(t, z) + f_2(t, z)u(t)$, com $f_2(t, z) \neq 0$. Neste caso, é possível reescrever os problemas de controle ótimo como problemas variacionais e assim utilizar as condições necessárias apresentadas nesta secção.

Nos exemplos a seguir, apresentamos alguns problemas variacionais e de controle ótimo sujeitos a restrições como aquelas discutidas acima. A análise dos problemas é conduzida nos exercícios ao final do capítulo.

Exemplo 168. Considere o problema variacional da Braquistócrona

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_0^T \sqrt{1 + y'(t)^2} / \sqrt{y} dt \\ \text{sujeito a } y \in Y_{ad} := \{y \in C^1[0, T] \mid y(0) = 0\}, \\ T > 0, \sigma(T, y(T)) = 0, \end{cases}$$

onde a condição de contorno final é descrita pela curva de nível zero da função continuamente diferenciável $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, y) \mapsto \sigma(t, y) \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 169. Considere o problema de controle

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z, u) := \int_0^1 u(t)^{4/3} dt \\ \text{sujeito a } z' = u, t \in (0, 1); \\ z(0) = -5/4, z(1) = 5; \int_0^1 tz'(t)dt = 5. \end{cases}$$

O problema variacional correspondente é

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_0^1 y'(t)^{4/3} dt \\ \text{sujeito a } y \in Y_{ad} := \{y \in C^1[0, 1] \mid y(0) = -5/4, y(1) = 5\}, \\ \int_0^1 G(t, y, y')dt = 5, \end{cases}$$

onde o integrando da restrição isoperimétrica é dado pela função $G(t, y, y') = ty'$.

□

Exemplo 170. Considere os problemas variacionais

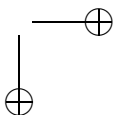
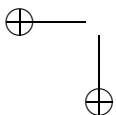
$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_0^1 [y'(t)^2 + y(t)y'(t)^4]dt \\ \text{sujeito a } y \in Y_{ad} := \{y \in C^1[0, 1] \mid y(0) = 1, y(1) = 0, y(t) \geq 0\}; \\ F(y) := \int_0^1 ty'(t)^4 dt = 1/2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(y) := \int_0^1 [y'(t)^2 + y(t)y'(t)^4]dt \\ \text{sujeito a } y \in Y_{ad} := \{y \in C^1[0, 1] \mid y(0) = 1, y(1) = 0, y(t) \geq 0\}; \\ G(t, y, y') := (y')^4 - 1 \equiv 0. \end{cases}$$

Note que o primeiro problema é formulado com uma restrição isoperimétrica, enquanto que o segundo com uma restrição lagrangeana.

□



9.3 Extremais Singulares e Trajetórias Ótimas

Nesta secção utilizamos o formalismo do cálculo variacional para obter, através da análise de condições necessárias, a solução para uma importante família de problemas de controle ótimo, a saber: problemas em que as variáveis de controle são limitadas por funções que dependem do tempo e da variável de estado.

Sob hipóteses adequadas é possível encontrar uma relação entre as soluções da equação de Euler–Lagrange (extremais) e as trajetórias ótimas do problema de controle correspondente. Começamos por analisar o seguinte problema variacional

$$(9.10) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(z) := \int_{t_0}^{t_1} [G(t, z(t)) + H(t, z(t))z'(t)] dt \\ \text{sujeito a} \\ A(t, z(t)) \leq z'(t) \leq B(t, z(t)), \quad t \in [t_0, t_1]; \\ z(t_0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1. \end{cases}$$

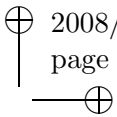
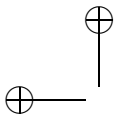
Note que no problema (9.10) são feitas restrições sobre a derivada das funções admissíveis. Importante na análise a seguir é o fato de $L(t, z, z')$ ser uma função afim na variável z' . Observe ainda que o problema (9.10) pode ser interpretado como decorrente do seguinte problema de controle ótimo

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z) := \int_{t_0}^{t_1} [L_1(t, z(t)) + L_2(t, z(t))u(t)] dt \\ \text{sujeito a} \\ z' = g(t, z) + f(t, z)u(t), \quad t \in [t_0, t_1]; \\ z(t_0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1, \quad u(t) \in \Omega := [u_m, u_M]. \end{cases}$$

De fato, explicitando u em função de z e z' na equação diferencial (supondo $f(t, z) \neq 0$) e substituindo no funcional I , obtemos um problema como (9.10), onde

$$G(t, z) = L_1(t, z) - L_2(t, z) \frac{g(t, z)}{f(t, z)}; \quad H(t, z) = L_2(t, z) \frac{1}{f(t, z)};$$

$$A(t, z) = \min_{u(t) \in \Omega} \{g(t, z) + f(t, z)u\}; \quad B(t, z) = \max_{u(t) \in \Omega} \{g(t, z) + f(t, z)u\}.$$



Suponha agora as aplicações $G, H, A, B : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis e defina o conjunto das trajetórias admissíveis

$$Z_{ad} := \{z \in \hat{C}^1[t_0, t_1] \mid A(t, z(t)) \leq z'(t) \leq B(t, z(t)), \\ t \in [t_0, t_1]; z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1\}.$$

Esquecendo por um momento as restrições sobre a derivada das funções admissíveis, o problema (9.10) pode ser escrito como um problema usual do cálculo das variações:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z) := \int_{t_0}^{t_1} [G(t, z(t)) + H(t, z(t))z'(t)] dt \\ \text{sujeito a } z \in \hat{C}^1[t_0, t_1], z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1. \end{cases}$$

A equação de Euler–Lagrange associada a esse problema é

$$(9.11) \quad \frac{\partial G}{\partial z}(t, z(t)) - \frac{\partial H}{\partial t}(t, z(t)) = 0, t \in (t_0, t_1).$$

Fazemos agora as seguintes hipóteses:

h1) Existe um *extremal singular* z_s para o problema variacional, i.e. uma função $z_s \in \hat{C}^1[t_0, t_1]$ que é solução da equação diferencial (9.11) e satisfaz simultaneamente a restrição $A(t, z_s(t)) \leq z_s'(t) \leq B(t, z_s(t))$, $t \in (t_0, t_1)$.⁶

h2) O extremal singular z_s divide a faixa $S := [t_0, t_1] \times \mathbb{R}$ em duas semi-faixas:

$$E_+ := \{(t, z) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \mid z > z_s(t)\},$$

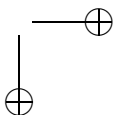
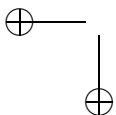
$$E_- := \{(t, z) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \mid z < z_s(t)\},$$

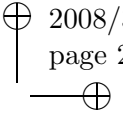
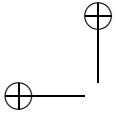
nas quais se verifica:

$$\frac{\partial G}{\partial z}(t, z) - \frac{\partial H}{\partial t}(t, z) > 0, (t, z) \in E_+,$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(t, z) - \frac{\partial H}{\partial t}(t, z) < 0, (t, z) \in E_-.$$

⁶Note que z_s não pertence necessariamente a Z_{ad} .





Como o funcional I é linear no argumento z' , é de se esperar que, nos pontos em que uma solução não coincide com o extremal singular, ela está na fronteira da admissibilidade, i.e. $z'(t) = A(t, z(t))$ ou $z'(t) = B(t, z(t))$. A fim de formular mais precisamente esta idéia definimos a *função de identificação* $\Sigma : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$(9.12) \quad \Sigma(t, z) := \begin{cases} A(t, z), & (t, z) \in E_+ \\ z_s(t), & z = z_s(t) \\ B(t, z), & (t, z) \in E_- \end{cases}$$

Estamos agora em condições de formular um resultado que nos permite identificar as soluções do problema variacional (9.10) e do problema de controle ótimo correspondente.

Teorema 171. *Suponha que G, H, A e B são funções continuamente diferenciáveis e que as condições (h1) e (h2) são satisfeitas. Seja Σ a função de identificação definida em (9.12). Se existir uma trajetória admissível $z \in Z_{ad}$ que intercepta o extremal singular z_s em um ponto de (t_0, t_1) , então a função \bar{z} definida por*

$$\begin{cases} \bar{z}' = \Sigma(t, \bar{z}(t)), & t \in [t_0, t_1] \\ \bar{z}(t_0) = z_0, \bar{z}(t_1) = z_1 \end{cases}$$

é uma trajetória ótima de (9.10).

Demonstração: Suponha $z_s(0) < z_0$ (o caso $z_0 < z_s(0)$ é análogo). Seja z uma trajetória admissível qualquer que intercepta z_s no ponto $\tau \in (t_0, t_1)$. Considere agora o problema de valor inicial

$$z' = A(t, z(t)), \quad z(t_0) = z_0.$$

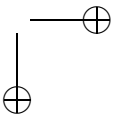
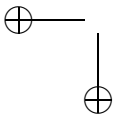
Tal problema possui uma solução local, que denominamos \tilde{z} . Como

$$z'(t_0) \geq A(t_0, z(t_0)) = \tilde{z}'(t_0),$$

então $z(t) \geq \tilde{z}(t)$, para $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$. Por hipótese $z(\tau) = z_s(\tau)$, então existe $\tau_1 \in (t_0, \tau]$, tal que $\tilde{z}(\tau_1) = z_s(\tau_1)$ (veja Figura 9.2). Note ainda que, da desigualdade $z_s(t_0) < z_0 = \tilde{z}(t_0)$ temos

$$\tilde{z}(t) > z_s(t), \quad t \in (t_0, \tau_1).$$

Defina agora a função \hat{z} por



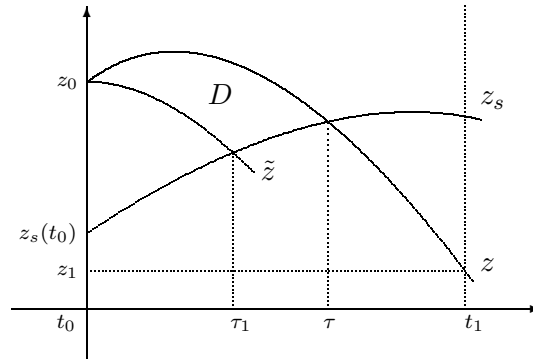
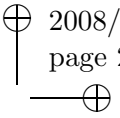


Figura 9.2: Trajetória admissível que intercepta o extremal singular

$$\hat{z}(t) := \begin{cases} \tilde{z}(t) & , t \in [t_0, \tau_1) \\ z_s(t) & , t \in [\tau_1, \tau] \\ z(t) & , t \in (\tau, t_1] \end{cases}$$

que é admissível por construção. Seja $D \subset E_+$ a região cuja fronteira ∂D é a curva de Jordan formada pelos segmentos

$$(t, \tilde{z}(t)), t \in [t_0, \tau_1]; \quad (t, z_s(t)), t \in [\tau_1, \tau]; \quad (t, z(t)), t \in [t_0, \tau_1];$$

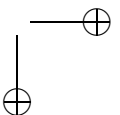
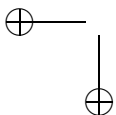
orientada no sentido anti-horário. Como $\hat{z}(t) = z(t), t \geq \tau$, temos

$$\begin{aligned} I(z) - I(\hat{z}) &= \int_{t_0}^{\tau} [G(t, z(t)) + H(t, z(t))z'(t)] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{\tau} [G(t, \hat{z}(t)) + H(t, \hat{z}(t))\hat{z}'(t)] dt \\ &= \oint_{\partial D} [G(t, z) dt + H(t, z) dz] \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t} \right] (t, z) dz dt \end{aligned}$$

(para obter a última igualdade utilizamos a fórmula de Green). Como a hipótese (h2) implica que $[\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t}](t, z) > 0$, para $(t, z) \in E_+$, temos então

$$I(z) - I(\hat{z}) > 0,$$

quando $\tau_1 < \tau$. (Caso contrário obtemos apenas $I(z) - I(\hat{z}) \geq 0$.) Repetindo a argumentação na extremidade t_1 do intervalo, obtemos $I(z) \geq I(\bar{z})$.



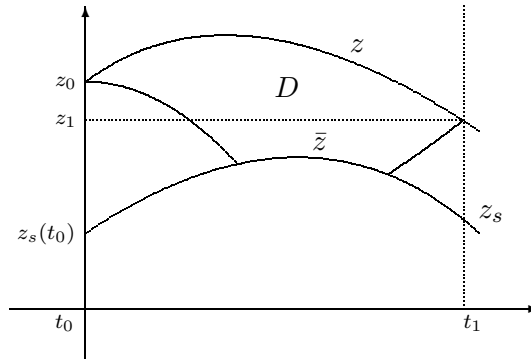


Figura 9.3: Trajetória admissível que não intercepta o extremal singular

Para completar a demonstração basta provar que para toda trajetória admissível z que não intercepta z_s , temos $I(z) \geq I(\hat{z})$. Como supomos $z_s(0) < z_0$, uma condição necessária para que exista uma trajetória admissível nessas condições é $z_s(t_1) < z_1$. Temos então

$$\begin{aligned} I(z) - I(\hat{z}) &= \int_{t_0}^{t_1} [G(t, z) + H(t, z)z'] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} [G(t, z_s) + H(t, z_s)(z_s)'] dt \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t} \right] (t, z) dz dt > 0, \end{aligned}$$

onde D é a região situada entre as curvas z e \hat{z} , conforme a Figura 9.3

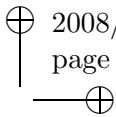
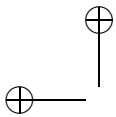
■

Observação 172. Caso uma das condições de contorno não seja fornecida, por exemplo $z(t_1) = z_1$, obtemos em seu lugar a condição de contorno natural (veja Observação 132)

$$L_{y'}(t_1, z(t_1), z'(t_1)) = H(t_1, z(t_1)) = 0.$$

Neste caso, mesmo que a condição $H(t_1, z(t_1)) = 0$ defina $z(t_1)$ de forma única, é ainda possível aplicar o Teorema 171. □

Observação 173. O Teorema 171 garante que a trajetória ótima para o problema é da forma *bang-singular-bang*.



No caso particular em que o extremal satisfaça $z_s(t_0) = z_0$ ou $z_s(t_1) = z_1$, as trajetórias ótimas são do tipo *singular–bang* e *bang–singular*, respectivamente. □

9.4 Controle Ótimo e Convexidade: condições suficientes

Continuamos nesta secção a analogia iniciada na Secção 9.3 entre os problemas de cálculo variacional e os problemas de controle ótimo. Nosso objetivo é mostrar que, sob certas hipóteses de convexidade, a equação de Euler–Lagrange fornece condições suficientes para determinar a estratégia ótima de problemas de controle, que não possuem restrição nas variáveis de controle.

É importante notar semelhança entre o resultado principal desta secção, apresentado no Teorema 174, e o Teorema de condições suficientes 127. Começamos por considerar o problema de controle ótimo

$$(9.13) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(z, u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a } z \in \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n); u \in \hat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m); \\ z'(t) = f(t, z, u), t \in (t_0, t_1); \\ z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1; \end{cases}$$

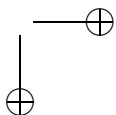
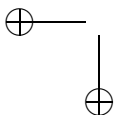
onde os tempos inicial e final t_0, t_1 são fixos, $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$ são dados. O conjunto das trajetórias admissíveis é dado por

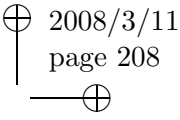
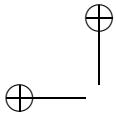
$$Z_{ad} := \{z \in \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \mid z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1\}.$$

Como não são feitas restrições às variáveis de controle em (9.13), o conjunto dos controles admissíveis é simplesmente $U_{ad} := \hat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$.

Os candidatos à solução do problema de otimização restrita (9.13) são os processos admissíveis $(z, u) \in Z_{ad} \times U_{ad}$. Podemos então considerar o problema (9.13) como um problema do cálculo variacional com restrições lagrangeanas

$$(9.14) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } I(z, u) \\ \text{sujeito a } (z, u) \in Z_{ad} \times U_{ad} \\ G(t, z, u) = f(t, z, u) - z' = 0, t \in (t_0, t_1); \end{cases}$$





Nossa experiência com problemas do cálculo variacional sujeitos a restrições lagrangeanas (veja Secção 9.2) sugere que a solução de (9.14) está relacionada com a minimização do funcional estendido

$$\tilde{I}(z, u, \lambda) := \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, z(t), u(t)) dt,$$

onde $\tilde{L}(t, z, u) = L(t, z, u) + \lambda(t)G(t, z, u)$ e $\lambda \in \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ é um multiplicador. Definimos agora a função auxiliar

$$H : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, z, u, \lambda) \longmapsto \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + L(t, z, u),$$

denominada *função de Hamilton*. Por construção, temos $\tilde{L}(t, z, u) = H(t, z, u, \lambda) - \lambda(t)z'$. A equação de Euler–Lagrange para o problema variacional irrestrito em \tilde{I} possui uma componente relativa a z e outra a u .⁷ Temos assim,

$$\frac{d}{dt}[L + \lambda G]_{z'} = [L + \lambda G]_z \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}[L + \lambda G]_{u'} = [L + \lambda G]_u.$$

Utilizando a definição de H , podemos reescrever as equações acima na forma

$$\lambda'(t) = -H_z(t, z, u, \lambda) \quad \text{e} \quad 0 = H_u(t, z, u, \lambda).$$

Note ainda que a equação de evolução do problema (9.13) $z' = f(t, z, u)$ (que é a restrição lagrangeana do problema (9.14)) pode ser reescrita como $z' = H_\lambda(t, z, u, \lambda)$.

Observe que as condições de Weierstraß–Erdmann, que dizem respeito a continuidade das aplicações

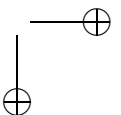
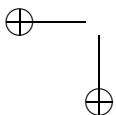
$$\tilde{L}_{z'}(t, z, u) = -\lambda(t) \quad \text{e} \quad \tilde{L}_{u'}(t, z, u) = 0,$$

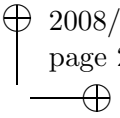
são trivialmente satisfeitas devido às hipóteses de regularidade do multiplicador λ .

A pergunta que investigamos nesta secção é a seguinte: As condições

$$z'(t) = H_\lambda(t, z, u, \lambda), \quad \lambda'(t) = -H_z(t, z, u, \lambda) \quad \text{e} \quad H_u(t, z, u, \lambda) = 0$$

⁷A componente da equação de Euler–Lagrange relativa ao multiplicador λ é simplesmente a restrição $G(t, z, u) \equiv 0$ do problema (9.14), como o leitor pode facilmente verificar.





são suficientes para caracterizar um mínimo local (ou global) do problema (9.13)? A resposta é sim, desde que façamos hipóteses adequadas sobre a convexidade da função de Hamilton. Na Seção 9.5 investigamos a suficiência destas mesmas condições.

A análise conduzida neste capítulo utiliza argumentos elementares, devido ao fato de supormos convexidade parcial da função de Hamilton, em relação as variáveis z e u . No capítulo seguinte analisamos o papel das condições acima em relação à otimalidade da solução de um problema de controle genérico.

Teorema 174. *Seja $L \in C^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$, $f \in C^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Suponha que a função de Hamilton H satisfaz*

$$(9.15) \quad \begin{aligned} H(t, z+v, u+w, \lambda) - H(t, z, u, \lambda) &\geq H_z(t, z, u, \lambda) v + H_u(t, z, u, \lambda) w, \\ v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

em $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. São verdadeiras as afirmações:

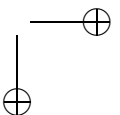
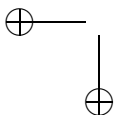
- a) Se $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \in \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \times \hat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) \times \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ é solução de

$$(9.16) \quad \begin{cases} z'(t) = H_\lambda(t, z, u, \lambda), & \lambda'(t) = -H_z(t, z, u, \lambda), \\ H_u(t, z, u, \lambda) = 0, & t \in (t_0, t_1), \\ z(t_0) = z_0, & z(t_1) = z_1, \end{cases}$$

então (\bar{z}, \bar{u}) é mínimo global de I em $Z_{ad} \times U_{ad}$ sujeito à restrição lagrangeana $G(t, z, u) = f(t, z, u) - z' = 0, t \in [t_0, t_1]$.

- b) Caso a igualdade em (9.15) ocorra se e somente se $|v||w| = 0$, então o processo (\bar{z}, \bar{u}) no item a) é o único mínimo global de I em $Z_{ad} \times U_{ad}$.

Demonstração: Da hipótese (9.16) segue imediatamente que $(\bar{z}, \bar{u}) \in Z_{ad} \times U_{ad}$ e ainda que $G(t, \bar{z}, \bar{u}) \equiv 0$ em $[t_0, t_1]$. Seja $(z, u) \in Z_{ad} \times U_{ad}$ um processo admissível satisfazendo a restrição $G(t, z, u) \equiv 0$. Temos



então

$$\begin{aligned}
 (9.17) \quad & I(z, u) - I(\bar{z}, \bar{u}) \\
 &= \tilde{I}(z, u, \bar{\lambda}) - \tilde{I}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, z, u, \bar{\lambda}) - H(t, \bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda}) - \bar{\lambda}(t)(z'(t) - \bar{z}'(t))] dt \\
 &\geq \int_{t_0}^{t_1} [H_z(t, \bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda})(z - \bar{z}) + H_u(t, \bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda})(u - \bar{u}) - \bar{\lambda}(z - \bar{z})'] dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} [-\bar{\lambda}'(z - \bar{z})' - \bar{\lambda}(z - \bar{z})'] dt \\
 &= [-\bar{\lambda}(z - \bar{z})]_{t_0}^{t_1} = 0,
 \end{aligned}$$

provando o item *a*). Quanto ao item *b*), basta observar que, se $(z, u) \neq (\bar{z}, \bar{u})$ é outro processo admissível satisfazendo a restrição $G(t, z, u) \equiv 0$, então (9.17) é obtida com desigualdade estrita, provando assim que $I(z, u) - I(\bar{z}, \bar{u}) > 0$. ■

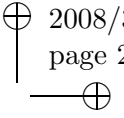
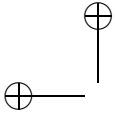
Observação 175. Caso a condição de contorno $z(t_1) = z_1$ não seja fornecida, o conjunto das trajetórias admissíveis correspondente é $Z_{ad} := \{z \in \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \mid z(t_0) = z_0\}$ e o Teorema 174 continua válido se substituímos a condição de contorno $z(t_1) = z_1$ em (9.16) pela condição ‘natural’ $\lambda(t_1) = 0$.

Analogamente, se a condição de contorno final para o problema (9.13) for da forma $\sigma(z(t_1)) = 0$, onde a aplicação $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ satisfaz $\nabla \sigma \neq 0$, o conjunto das trajetórias admissíveis correspondente é $Z_{ad} := \{z \in \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \mid z(t_0) = z_0, \sigma(z(t_1)) = 0\}$.

Neste caso, o Teorema 174 continua válido se substituímos a condição $z(t_1) = z_1$ em (9.16) pela condição ‘natural’ de transversalidade $\lambda(t_1) = \Lambda \sigma_z(z(t_1))$ para $\Lambda \in \mathbb{R}^p$ e pela exigência que $\Lambda \sigma(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função convexa. De fato, Se $(z, u) \in Z_{ad} \times U_{ad}$ satisfaz $G(t, z, u) \equiv 0$, definimos $\tilde{I}(z, u, \lambda, \Lambda) := \tilde{I}(z, u, \lambda) + \Lambda \sigma(z(t_1))$ e obtemos

$$\begin{aligned}
 I(z, u) - I(\bar{z}, \bar{u}) &= \tilde{I}(z, u, \bar{\lambda}, \Lambda) - \tilde{I}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \Lambda) \\
 &\geq [-\bar{\lambda}(z - \bar{z})]_{t_0}^{t_1} + \Lambda \sigma(z(t_1)) - \Lambda \sigma(\bar{z}(t_1)) \\
 &\geq [-\bar{\lambda}(z - \bar{z})]_{t_0}^{t_1} + \Lambda \sigma_z(\bar{z}(t_1)) [z(t_1) - \bar{z}(t_1)] \\
 &= [-\bar{\lambda}(t_1) + \Lambda \sigma_z(\bar{z}(t_1))] [z(t_1) - \bar{z}(t_1)] = 0.
 \end{aligned}$$

Para obter a última das desigualdade acima usamos a convexidade de



$\Lambda\sigma(z)$. Note que $\Lambda \in \mathbb{R}^p$ é o multiplicador associado com a restrição $\sigma(z(t_1)) = 0$. \square

Das hipóteses do Teorema 174 concluímos que, fixados os valores de t, z, λ , a função $H(t, z, \cdot, \lambda) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, no sentido da Definição 125. De fato, tomando $v = 0$ em (9.15), temos

$$H(t, z, u + w, \lambda) - H(t, z, u, \lambda) \geq H_u(t, z, u, \lambda) w, \quad u, w \in \mathbb{R}^m.$$

Logo, uma conseqüência da condição $H_u(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t)) = 0, t \in (t_0, t_1)$ em (9.16) é que $\bar{u}(t)$ é um mínimo local de $H(t, \bar{z}(t), \cdot, \bar{\lambda}(t))$, para cada $t \in (t_0, t_1)$, fato que pode ser escrito na forma

$$(9.18) \quad H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t)) = \min_{u \in \mathbb{R}^m} \{H(t, \bar{z}(t), u, \bar{\lambda}(t))\}, \quad t \in (t_0, t_1).$$

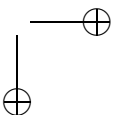
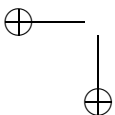
A condição expressa em (9.18), que é conseqüência do ‘pacote’ de condições suficientes (9.16), é extremamente importante na teoria de controle ótimo. Na Secção 9.5, ainda utilizando a hipótese de convexidade parcial da função de Hamilton, provamos que esta condição é também necessária para otimalidade de soluções do Problema 9.13. A verificação da necessidade dessa condição é, no caso geral, tecnicamente mais complicada e é discutida no Capítulo 10.

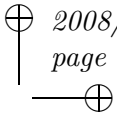
A condição (9.18) é denominada *condição de máximo* (ou condição de otimalidade), apesar de ser aqui apresentada na forma de mínimo. Isto, entretanto, deve-se tão somente à natureza do problema de controle ótimo a ser estudado, cujo objetivo pode ser tanto maximizar quanto minimizar o funcional I . A primeira apresentação formal deste resultado foi feita em [PBG].

9.5 Controle Ótimo e Convexidade: condições necessárias

Verificamos nesta secção que as condições propostas em (9.16) e em especial a condição de máximo (9.18) são, sob hipóteses adequadas, necessárias para otimalidade de soluções do problema de controle ótimo (9.13). Assim como nos problemas variacionais restritos, as condições necessárias são obtidas utilizando um teorema de multiplicadores.

Suponha que, fixados $(t, z, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, a aplicação $H(t, z, \cdot, \lambda) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa (utilizamos a notação da Secção 9.4). Seja $(\bar{z}, \bar{u}) \in$





$Y_{ad} \times U_{ad}$ um processo ótimo para o problema (9.13). O teorema de multiplicadores de Lagrange garante a existência de $\bar{\lambda} \in \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, tal que $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ é mínimo local do funcional \tilde{I} .

Dada uma tripla qualquer de funções teste $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \hat{C}_0^1 \times \hat{C}_0 \times \hat{C}_0^1$, sabemos que a variação

$$\begin{aligned} \delta I(\bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda}; \eta_1, \eta_2, \eta_3) &= \int_{t_0}^{t_1} [\eta_1(L_z + \bar{\lambda}f_z) - \eta_1' \bar{\lambda} + \eta_2(L_u + \bar{\lambda}f_u) + \eta_3(f - \bar{z}')] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\eta_1(L_z + \bar{\lambda}f_z + \bar{\lambda}') + \eta_2(L_u + \bar{\lambda}f_u) + \eta_3(f - \bar{z}')] dt \end{aligned}$$

sempre se anula. Sendo assim, escolhendo $\eta_1 = \eta_2 \equiv 0$ e $\eta_3 \in \hat{C}_0^1[t_0, t_1]$ qualquer, obtemos a equação de estado

$$\bar{z}'(t) = f(t, \bar{z}, \bar{u}), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Tomando $\eta_1 \in \hat{C}_0[t_0, t_1]$ qualquer e $\eta_2 \equiv 0$, obtemos a equação adjunta

$$\bar{\lambda}' = -L_z(t, \bar{z}, \bar{u}) - \bar{\lambda}f_z(t, \bar{z}, \bar{u}), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Tomando agora $\eta_2 \in \hat{C}_0[t_0, t_1]$ qualquer, obtemos a equação de otimalidade

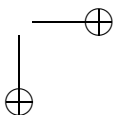
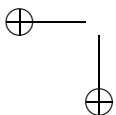
$$0 = L_u(t, \bar{z}, \bar{u}) + \bar{\lambda}f_u(t, \bar{z}, \bar{u}) = H_u(t, \bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda}), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Como \bar{z} satisfaz por construção as condições de contorno do problema (9.13), concluímos que $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ satisfazem (9.16). A condição de máximo (9.18) é portanto satisfeita para o controle ótimo \bar{u} .

O teorema a seguir é consequência direta da argumentação acima. Trata-se de uma variante do princípio do máximo, para o caso em que a hamiltoniana é convexa.

Teorema 176 (Princípio do Máximo). *Sejam L e f aplicações continuamente diferenciáveis, $t_0 < t_1$ fixos, $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$ dados. Suponha ainda que a função de Hamilton H é convexa na variável u . Se (\bar{z}, \bar{u}) é um mínimo local fraco de I em $Y_{ad} \times U_{ad}$, sujeito a restrição $G(t, z, u) := f(t, z, u) - \bar{z}' \equiv 0$, então existe um multiplicador $\bar{\lambda} \in \hat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, tal que*

$$\begin{cases} z'(t) = H_\lambda(t, z, u, \lambda), & \lambda'(t) = -H_z(t, z, u, \lambda), \quad t \in (t_0, t_1), \\ z(t_0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1, \end{cases}$$



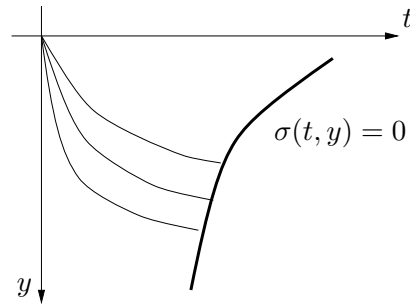
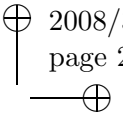


Figura 9.4: Condição de transversalidade para a Braquistócrona

e ainda, o controle ótimo \bar{u} satisfaz a condição de máximo

$$H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t)) = \min_{u \in \mathbb{R}^m} \{H(t, \bar{z}(t), u, \bar{\lambda}(t))\}, \quad t \in (t_0, t_1).$$

■

Exercícios

9.1. Considere o problema do Exemplo 168 (veja Figura 9.4).

a) Verifique que a solução do problema necessariamente satisfaz a condição transversal

$$L\sigma_y = L_{y'}[\sigma_t + \sigma_y y'],$$

onde $L(t, y, y') := \sqrt{1 + (y')^2} / \sqrt{y}$.

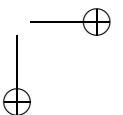
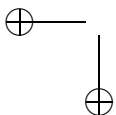
b) Conclua do item a) que a cicloide, unindo a origem à curva de nível, satisfaz $\sigma_y = \sigma_t y'$, i.e. a cicloide intercepta *ortogonalmente* a curva de nível.

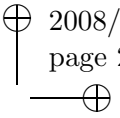
c) Formule o problema de controle correspondente.

9.2. Considere o problema do Exemplo 169.

a) Calcule o multiplicador de Lagrange (escalar) correspondente e encontre a solução do problema variacional.

b) Encontre a trajetória ótima para o problema de controle e o controle ótimo correspondente.





9.3. Considere os problemas do Exemplo 170.

a) Formule os problemas de controle correspondentes.

b) Verifique que cada um dos problemas variacionais possui como única solução $y(t) = 1 - t$ e que os respectivos multiplicadores de Lagrange são dados por $\lambda = 3/4$ e $\lambda(t) = 3/4t$.

9.4. Verifique os detalhes da demonstração do Teorema 165.

9.5. Encontre a solução do problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z, u) := \int_0^1 u^2(t) dt \\ \text{s.a. } z' = -2z + u, t \in (0, 1); \\ z(0) = 1, z(1) = 0. \end{cases}$$

A solução encontrada é única?

9.6. Encontre a solução do problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z, u) := \int_0^1 (2 - 5t)u(t) dt \\ \text{s.a. } z' = 2z + 5e^{2t}u, t \in (0, 1); \\ z(0) = 0, z(1) = e^2; |u(t)| \leq 1, t \in [0, 1]. \end{cases}$$

a) A solução encontrada é única?

b) Considere o problema anterior com a dinâmica $z' = 2z + 4e^{2t}u$. Encontre a solução.

(Sugestão: Utilize a função auxiliar $v(t) := e^{-2t}z(t)$.)

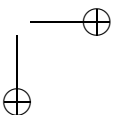
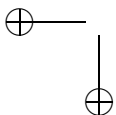
9.7. Considere o problema

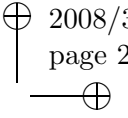
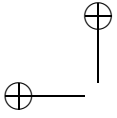
$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z, u) := \int_0^1 (u(t) + 1) dt \\ \text{s.a. } z' = -u, t \in (0, 1); \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases}$$

Mostre que cada controle $\hat{u} \in \hat{C}[0, 1]$, que satisfaz $\int_0^1 u(t) dt = 0$, é ótimo para o problema.

9.8. Encontre a solução do problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z, u) := \int_0^1 [u^2(t) - 2u(t)] dt \\ \text{s.a. } z' = t|u|, t \in (0, 1); \\ z(0) = 0; \int_0^1 z'(t) dt \leq \frac{1}{6}. \end{cases}$$





EXERCÍCIOS

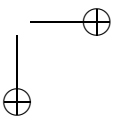
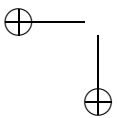
9.9. Encontre a solução do problema

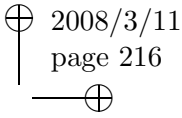
$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z, u) := \int_0^1 [z'(t) - 2t + 1]^2 dt \\ \text{s.a. } z' = u, t \in (0, 1); \\ z(0) = z(1) = 0; z(t) \geq 0. \end{cases}$$

9.10. Considere o problema escalar

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \int_0^1 [3z(t)^2 + u(t)^2] dt \\ \text{s.a. } z' = -z + u, t \in (0, 1), z(0) = 1. \end{cases}$$

- a) Obtenha o problema variacional correspondente.
- b) Encontre a equação de Euler–Lagrange e as condições de contorno correspondentes.
- c) Determine o controle ótimo.





Capítulo 10

Princípio do Máximo

Neste capítulo é analisado um conjunto de condições necessárias para otimalidade de soluções de problemas de controle ótimo. Tal resultado é conhecido na literatura como *princípio do máximo*¹ e muito se assemelha a um teorema de multiplicadores de Lagrange, formulado em espaços de dimensão infinita.

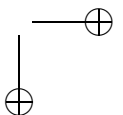
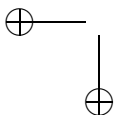
Como vimos na Secção 9.5, com hipóteses adicionais de convexidade, o princípio do máximo pode ser demonstrado utilizando-se argumentos elementares de análise. Em particular, a condição de máximo (9.18) é obtida a partir da equação de Euler–Lagrange. No caso geral (sem a hipótese de convexidade da Hamiltoniana), a demonstração da necessidade da condição de máximo é mais complicada e necessita de alguns resultados oriundos da teoria de otimização em espaços de dimensão infinita (veja Apêndice B).

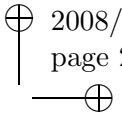
A autoria do princípio do máximo é controversa. A maioria dos autores credita a condição (9.18) ao grupo liderado pelo matemático russo L.S. Pontryagin (1956). Entretanto, tal condição pode ser encontrada em um texto anterior, porém pouco divulgado, de M.R. Hestenes (1950). Para maiores detalhes consulte [Hes], [PBG], assim como o artigo de Hestenes² em [BaNe].

O capítulo é organizado da seguinte forma: Na Secção 10.1 apresentamos o princípio do máximo para problemas de controle ótimo com horizonte finito. Algumas variantes do resultado, correspondentes a diferentes condições de contorno, são também analisadas nesta secção. Na

¹Também conhecido como princípio do mínimo, ou princípio de Pontryagin.

²HESTENES, M.R., *Variational theory and optimal control theory*, 1 – 22





Secção 10.2 consideramos o princípio do máximo para problemas com horizonte infinito. Na Secção 10.3 são discutidas diversas aplicações, nas quais o princípio do máximo é utilizado na identificação de processos ótimos.

10.1 Problemas com Horizonte Finito

Começamos por discutir uma formulação bastante geral para problemas de controle ótimo com horizonte finito. Considere o problema de controle

$$P(t_0, z_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(z, u) := L_1(t_1, z(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ t_1 \geq t_0; u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m), u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [t_0, t_1]; \\ z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s), u(s)) ds, t \in [t_0, t_1]; \psi(t_1, z(t_1)) = 0 \end{array} \right.$$

onde

$$\begin{aligned} L &: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_1 : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ f &: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. O tempo inicial t_0 e a condição inicial z_0 são fornecidos, enquanto que o tempo final t_1 e a condição final são, a princípio, desconhecidos.

Note que o fato da dinâmica do sistema ser descrita por uma equação integral ao invés de diferencial, permite-nos considerar trajetórias admissíveis menos regulares. O conjunto das estratégias de controle admissíveis é

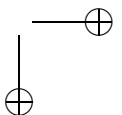
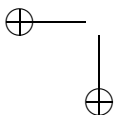
$$\mathcal{U}_{ad} := L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R}^m).$$

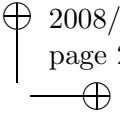
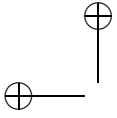
Desta forma, as trajetórias correspondentes são funções absolutamente contínuas em $[t_0, t_1]$.

Definição 177. Sejam f, L as funções definidas acima. A aplicação

$$\begin{aligned} H &: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, z, \lambda, u) &\mapsto \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + \eta L(t, z, u) \end{aligned}$$

é denominada *função de Hamilton* (note que a origem da constante η precisa ainda ser esclarecida). □





No teorema a seguir apresentamos o *princípio do máximo*. Por ser longa e técnica, a demonstração é apresentada no Apêndice B. A argumentação utilizada na demonstração segue a linha das notas de aula de M. Brokate (veja [Br]).

Como referências auxiliares o leitor pode consultar [PBG], [Hes], [Ber], [Know], [MaSt], [Za], entre outros. A obtenção do princípio do máximo para problemas com tempo final fixo ($t_1 = T$ conhecido) é mais simples, podendo ser encontrada em [FlRi, Capítulo 2], [Ho, Capítulo 9] ou [Tr, Teorema 11.8]. Uma demonstração alternativa baseada em argumentos de programação dinâmica é apresentada na Secção 13.4.

Teorema 178. *Suponha que L, f são aplicações C^2 e que L_1, ψ são C^1 . Se $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{t}_1)$ é uma solução do problema $P(t_0, z_0)$, tal que*

$$\psi_z(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)) \neq 0 \quad e \quad (L_1)_z(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)) \neq 0,$$

então existe uma função $\lambda : [t_0, \bar{t}_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e constantes $\eta \geq 0, \mu \in \mathbb{R}^p$ que satisfazem:

i) *Equação de estado*

$$\bar{z}(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds, \quad t \in [t_0, \bar{t}_1];$$

ii) *Equação adjunta*

$$\begin{cases} \lambda(t) = \lambda_1 + \int_t^{\bar{t}_1} \frac{\partial H}{\partial z}(s, \bar{z}(s), \lambda(s), \bar{u}(s)) ds, \quad t \in [t_0, \bar{t}_1], \\ \lambda_1 := \eta \frac{\partial L_1}{\partial z}(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1))^* \mu; \end{cases}$$

iii) *Equação de evolução da função de Hamilton*

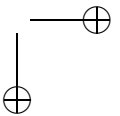
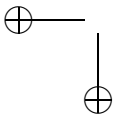
$$\begin{cases} H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), \bar{u}(t)) = H_1 \\ - \int_t^{\bar{t}_1} \frac{\partial H}{\partial t}(s, \bar{z}(s), \lambda(s), \bar{u}(s)) ds, \quad t \in [t_0, \bar{t}_1], \\ H_1 := -\eta \frac{\partial L_1}{\partial t}(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)) + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)), \mu \right\rangle; \end{cases}$$

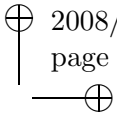
iv) *Condição de otimalidade*

$$H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), u), \quad q.s. \text{ em } [t_0, \bar{t}_1];$$

v) *Condição de não acoplamento $\eta + |\mu| \neq 0$.*

Demonstração: Veja Apêndice B. ■





A demonstração do Teorema 178 constitui-se na aplicação de um teorema de multiplicadores a um problema auxiliar, obtido de $P(t_0, z_0)$ por uma mudança de variáveis denominada transformação no tempo e cuja solubilidade está relacionada a de $P(t_0, z_0)$. As constantes η e μ surgem na demonstração como componentes de um vetor normal a um hiperplano, que separa conjuntos de nível associados à função objetivo J e à condição final $\psi(t, z(t)) = 0$.

Observação 179. A denominação *princípio do máximo* é motivada pelo item iv) do Teorema 178, que, entretanto, refere-se à determinação de um mínimo. Note, porém, que a elementar substituição de J por $-J$ permite-nos trocar o problema de minimização por um de maximização, alterando assim o min da condição iv) para max. Sem dúvida, as condições mais interessantes do Teorema 178 são

- $$\begin{cases} z' = H_\lambda(t, z, \lambda, u), & z(t_0) = z_0, \psi(t_1, z(t_1)) = 0, \\ \lambda' = -H_z(t, z, \lambda, u), & \lambda(t_1) = \eta \frac{\partial L_1}{\partial z}(t_1, z(t_1)) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(t_1, z(t_1))^* \mu; \end{cases}$$
- $$H(t, z, \lambda, u) = \min_{w \in \Omega} H(t, z(t), \lambda(t), w), \text{ q.s. em } [t_0, t_1].$$

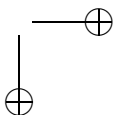
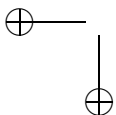
Note que o par (z, λ) é solução de um sistema hamiltoniano para a função H . □

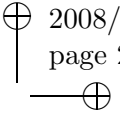
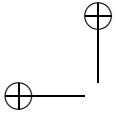
Observação 180. Analogamente aos problemas variacionais, os problemas de controle ótimo também podem ser formulados com diferentes tipos de condições de contorno. A cada um destes tipos corresponde uma variante do Teorema 178, que se diferencia deste apenas pelas condições de contorno da variável adjunta e da função de Hamilton. Enunciamos a seguir algumas variantes do problema $P(t_0, z_0)$ que surgem com maior frequência nas aplicações. Apresentamos também as condições necessárias correspondentes para cada problema.

Considere o problema $P(t_0, z_0)$ com t_1 fixo ($t_1 > t_0$) e $L_1 \equiv 0$.

- Se a condição final é fixada ($z(t_1) = z_1$), não há nenhuma condição para $\lambda(t_1)$ (corresponde à escolha $\psi(t, z) := (t - t_1, z - z_1) \in \mathbb{R}^2$).
- Se a condição final é livre ($z(t_1)$ qualquer), a variável adjunta satisfaz $\lambda(t_1) = 0$ (corresponde à escolha $\psi(t, z) := t - t_1 \in \mathbb{R}$).
- Se a condição final é da forma: $z(t_1) \geq z_1$ (no caso escalar), a variável adjunta satisfaz $\lambda(t_1) \geq 0$, ocorrendo a igualdade quando $z(t_1) > z_1$.

Considere o problema $P(t_0, z_0)$ com $L_1 \equiv 0$. Neste caso, as condições





para $\lambda(t_1)$ discutidas acima não se alteram e, além disso,

$$H(t_1, z(t_1), \lambda(t_1), u(t_1)) = 0.$$

Esta equação extra corresponde à variável adicional do problema, representada pelo tempo final desconhecido t_1 . \square

O princípio do máximo pode, em alguns casos, ser utilizado para efetivamente determinar uma solução do problema $P(t_0, z_0)$. Para tanto, aplica-se a seguinte estratégia: Inicialmente explicitamos o controle u em função das variáveis z e λ , obtendo assim

$$u(\cdot) = U_*(\cdot, z(\cdot), \lambda(\cdot)).$$

O próximo passo é substituir essa expressão no problema de valor de contorno da Observação 179 (eliminando a variável u):

$$(10.1) \quad z' = H_\lambda(t, z, \lambda, U_*), \quad z(t_0) = z_0, \quad \psi(t_1, z(t_1)) = 0;$$

$$(10.2) \quad \lambda' = -H_z(t, z, \lambda, U_*), \quad \lambda(t_1) = \eta \frac{\partial L_1}{\partial z}(t_1, z(t_1)) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(t_1, z(t_1))^* \mu;$$

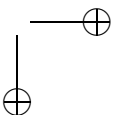
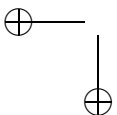
$$(10.3) \quad H' = \frac{\partial H}{\partial t}(t, z, \lambda, U_*),$$

$$H(t_1, z(t_1), \lambda(t_1), U_*(t_1)) = -\eta \frac{\partial L_1}{\partial t}(t_1, z(t_1)) + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_1, z(t_1)), \mu \right\rangle$$

Este sistema é então resolvido, com o intuito de obter um candidato à solução do problema de controle $P(t_0, z_0)$. Entretanto, nem sempre é possível obter a representação $U_*(\cdot, z, \lambda)$ – o extremal singular na Secção 9.3 é um exemplo – e nesses casos fala-se da existência de uma estratégia de *controle singular*.

O sistema resultante de (10.1), (10.2), (10.3) pela substituição $u(\cdot) = U_*(\cdot, z, \lambda)$ pode ser resolvido por um método do tipo *shooting* (veja Secção A.6), conforme mostra o esquema na Figura 10.1 (supomos $\eta = 1$ no Teorema 178).

Observação 181. O problema de valor de contorno (10.1), (10.2), (10.3) possui, tomando o controle u fixo, $2n + 1$ variáveis (z, λ, H) e $p + 1$ parâmetros (η, μ). Temos assim $2n + p + 2$ graus de liberdade, os quais estão sujeitos a $2n + p + 1$ equações. Aparentemente, temos um



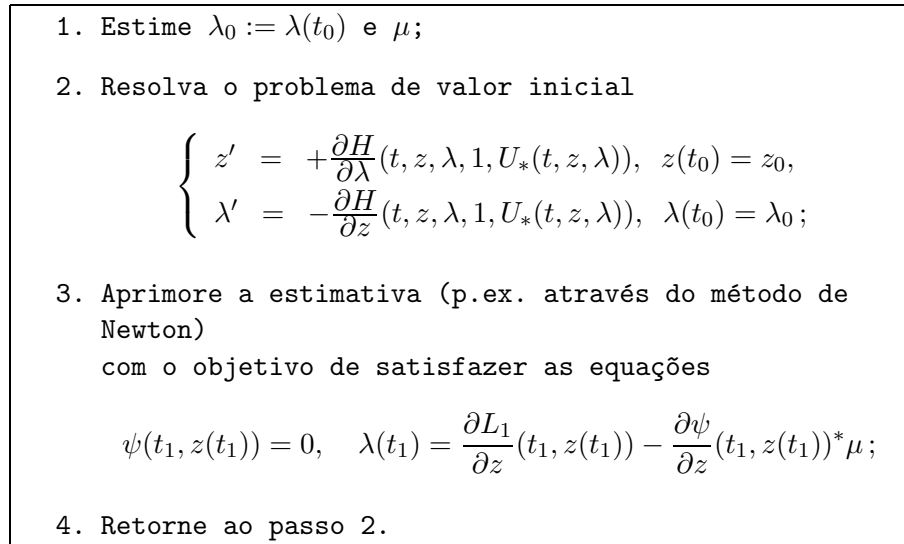
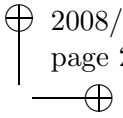


Figura 10.1: Algoritmo do método de *shooting* para sistema hamiltoniano

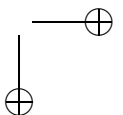
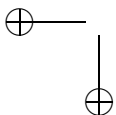
grau de liberdade a mais. Note, porém, que a condição de não acoplamento v) garante que η e μ não são ambos nulos, sendo portanto sempre possível simplificar o sistema (10.1), (10.2), (10.3) em relação a η ou a uma das componentes de μ . Sendo assim, o Teorema 178 pode ser formulado alternativamente como:

... existem $\lambda : [t_0, \bar{t}_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\eta = 0$ ou $\eta = 1$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ que satisfazem i), ..., v).

□

Observação 182. É simples verificar que a equação de Euler–Lagrange do cálculo variacional pode ser obtida do princípio do máximo. De fato, o problema de minimização (7.2) do cálculo variacional pode ser interpretado como

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_a^b L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a } z' = u(t). \end{cases}$$



Logo, a condição de máximo iv) do Teorema 178 implica em

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(t, \bar{z}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial u}[\langle \bar{\lambda}, \bar{u} \rangle + \eta L(t, \bar{z}, \bar{u})] = \bar{\lambda} + \eta \frac{\partial L}{\partial u}(t, \bar{z}, \bar{u})$$

e, portanto,

$$(10.4) \quad \bar{\lambda} = -\eta \frac{\partial L}{\partial u}(t, \bar{z}, \bar{u}).$$

O sistema hamiltoniano para as variáveis de estado e adjunta se escreve

$$(10.5) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{z}}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \bar{u} \\ \frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\eta \frac{\partial L}{\partial z}(t, \bar{z}, \bar{u}) \end{cases}$$

De (10.4) e (10.5), temos

$$-\eta \frac{\partial L}{\partial z}(t, \bar{z}, \bar{u}) = \frac{d}{dt} \left(-\eta \frac{\partial L}{\partial u}(t, \bar{z}, \bar{u}) \right)$$

ou

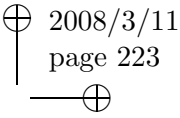
$$\frac{\partial L}{\partial z}(t, \bar{z}, (\bar{z})') - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial z'}(t, \bar{z}, (\bar{z})') \right) = 0.$$

□

10.2 Problemas com Horizonte Infinito

Analisamos nesta secção condições necessárias para problemas de controle ótimo com horizonte infinito. Os problemas de controle dessa natureza tem ganho importância nas últimas décadas devido aos modelos matemáticos oriundos das ciências econômicas e biológicas que os utilizam.

Os primeiros trabalhos a tratar de problemas de otimização com horizonte infinito são devidos aos economistas. Uma referência clássica é o artigo escrito em 1928 por F. Ramsey (veja [Ra]), que trata de problemas do tipo *consumo* \times *investimento* (veja Aplicação 190). A primeira extensão ao do princípio do máximo para problemas com horizonte infinito foi apresentada por H. Halkin em 1964 (veja [Ha]). Um apanhado do desenvolvimento da teoria pode ser encontrado em [CaHa]. Na abordagem aqui apresentada, seguimos os passos descritos em [Leit], que utiliza um conceito de otimalidade diferente dos encontrados em [Ha] e [CaHa].



Inúmeros modelos econômicos (de horizonte finito e infinito) são tratados, sob a ótica do controle ótimo e programação dinâmica, em [SeSy]. Nesta referência também são analisados problemas de exploração de recursos naturais. O leitor interessado em aplicações desta natureza deve consultar ainda [SeZh].

Aplicações a modelos biológicos podem ser encontradas em [Cl]. Um interessante problema relacionado à exploração ótima de recursos biorenováveis (pescaria ótima) é analisado em [CCM], e [BaLe].

A seguir analisamos um caso particular do problema abordado na Secção 10.1. Trata-se de problemas de controle ótimo com tempo final fixo. A abordagem nesta secção de tais problemas (de horizonte finito) é justificada pelo fato das condições necessárias para estes problemas serem utilizadas na demonstração do princípio do máximo para os problemas com horizonte infinito.

Suponha que no problema $P(t_0, z_0)$ o tempo final $t_1 = T$ e o estado final $z_1 = z_T$ são dados. Temos assim o seguinte problema de controle ótimo:

$$P_T(z_0) \begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_0^T L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t f(s, z(s), u(s)) ds, t \in [0, T], z(T) = z_T; \\ u \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^m), u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [0, T]; \end{cases}$$

Argumentando como na Observação 180, obtemos um conjunto de condições necessárias para otimalidade de uma solução do problema $P_T(z_0)$:

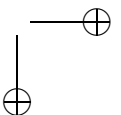
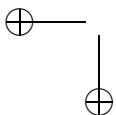
Corolário 183. *Suponha que L, f são aplicações C^2 . Se (\bar{z}, \bar{u}) é uma solução do problema $P_T(z_0)$, então existe uma função $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\eta = 1$ ou $\eta = 0$ que satisfazem*

i) *Sistema hamiltoniano*

$$\begin{cases} (\bar{z})'(t) = H_\lambda(t, \bar{z}, \lambda, \bar{u}), \text{ q.s. em } [0, T], \\ \lambda'(t) = H_z(t, \bar{z}, \lambda, \bar{u}), \text{ q.s. em } [0, T], \\ \bar{z}(t_0) = z_0, \bar{z}(T) = z_T; \end{cases}$$

ii) *Condição de otimalidade*

$$H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), u), \text{ q.s. em } [0, T];$$



iii) *Condição de não acoplamento* $\eta + \|\lambda\|_\infty \neq 0$.

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema 178 e da Observação 180. ■

Analisamos agora os problemas com horizonte infinito. Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$P_\infty(z_0) \begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_0^\infty e^{-\delta t} L(z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t f(z(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, \infty); \\ u \in L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [0, \infty); \end{cases}$$

onde as funções $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, o conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^m$ e a constante $\delta > 0$ são dados. Verificamos a seguir um resultado que fornece condições necessárias para otimalidade de uma solução de $P_\infty(z_0)$.

Teorema 184. *Suponha que L, f são aplicações C^2 . Se (\bar{z}, \bar{u}) é uma solução de $P_\infty(z_0)$, então existe uma aplicação $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e constantes $\eta = 0$ ou $\eta = 1$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem:*

i) *Equação de estado*

$$\bar{z}(t) = z_0 + \int_0^t f(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds, \quad t \in [0, \infty);$$

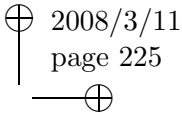
ii) *Equação adjunta*

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial z}(s, \bar{z}(s), \lambda(s), \bar{u}(s)) ds, \quad t \in [0, \infty);$$

iii) *Condição de otimalidade*

$$H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), u), \quad \text{q.s. em } [0, \infty).$$

Demonstração: Seja (\bar{z}, \bar{u}) um processo ótimo para $P_\infty(z_0)$. Dado $T > 0$, as funções $e^{-\delta t} L : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfazem as condições do Corolário 183. Logo, este corolário nos fornece condições necessárias para otimalidade de cada problema



$$P_{T_k}(z_0) \begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_0^{T_k} e^{-\delta t} L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t f(s, z(s), u(s)) ds, t \in [0, T_k], \\ z(T_k) = z_k := \bar{z}(T_k); \\ u \in L^1([0, T_k]; \mathbb{R}^m), u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [0, T_k]; \end{cases}$$

onde $T_k \rightarrow \infty$. Como consequência do princípio de otimalidade de Bellman, temos que $(\bar{z}, \bar{u})|_{[0, T_k]}$ é uma solução de $P_{T_k}(z_0)$. Juntando os fatos, podemos garantir a existência de $\eta_k \geq 0, \lambda_k : [0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que

- $\|\lambda_k\|_\infty + \eta_k > 0$;
- (\bar{z}, λ_k) é solução do sistema Hamiltoniano³

$$\begin{aligned} d\bar{z}(t) &= H_\lambda(t, \bar{z}(t), \lambda_k(t), \bar{u}(t)) dt, t \in [0, T_k] \\ d\lambda_k(t) &= -H_x(t, \bar{z}(t), \lambda_k(t), \bar{u}(t)) dt, t \in [0, T_k] \\ \bar{z}(0) &= z_0, \bar{z}(T_k) = z_k; \end{aligned}$$

- $H(t, \bar{z}(t), \lambda_k(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in \Omega} \{H(t, \bar{z}(t), \lambda_k(t), u)\}$, q.s. in $[0, T_k]$.

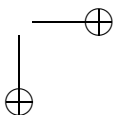
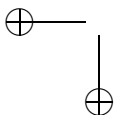
Considere agora a seqüência $\{\lambda_k(0), \eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Normalizando os multiplicadores de Lagrange, podemos supor que $|\lambda_k(0)| + \eta_k = 1, k \in \mathbb{N}$. Tomando subsequências (se necessário), podemos garantir a existência de $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \geq 0$ satisfazendo

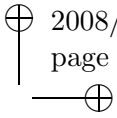
$$(10.6) \quad |\lambda_0| + \eta = 1, \lim_k \lambda_k(0) = \lambda_0, \lim_k \eta_k = \eta.$$

Seja agora $T > 0$ fixo. Logo $T_k > T$, para $k > k_0$ e como o sistema Hamiltoniano desfruta da propriedade de dependência contínua das condições iniciais, podemos garantir que existe $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que λ_k converge uniformemente para λ em $[0, T]$. Essa convergência implica nas desejadas condições de otimalidade para o problema $P_\infty(x_0)$, uma vez que $T > 0$ é arbitrário. ■

Observação 185. Duas diferenças básicas devem ser observadas na formulação do Teorema 184 em relação ao Teorema 178:

³Note que $H(t, z, \lambda_k, u) = \langle \lambda_k, F(t, z, u) \rangle + \eta_k L(t, z, u)$.





- Falta uma condição de contorno final para a variável adjunta λ (eventualmente uma condição de decaimento do tipo $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$);
- Falta a condição de não acoplamento (neste caso $\eta + |\lambda_0| \neq 0$). \square

Uma análise para problemas do tipo linear-quadrático com horizonte infinito é também possível via programação dinâmica (veja Capítulo 12). Através de um processo de limite, é possível obter a função valor resolvendo-se a equação algébrica de Riccati (veja [So, Capítulo 7]).

10.3 Aplicações do Princípio do Máximo

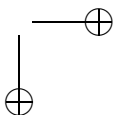
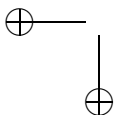
Nesta secção analisamos, à luz do princípio do máximo, alguns problemas de controle ótimo. Na Aplicação 186 é discutido formalmente o problema de tempo mínimo introduzido na Secção 1.2.3. A Aplicação 187 é uma extensão da primeira. Nela é analisada uma família maior de problemas, composta pelos denominados *problemas de tempo mínimo até a origem*.

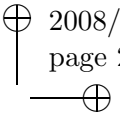
Na Aplicação 188 o princípio do máximo é utilizado para verificar que uma estratégia do tipo bang-bang é a única estratégia ótima existente para um problema de alunissagem. Na Aplicação 189 consideramos um problema com controle singular. Aqui, a solução é obtida pelo princípio do máximo, entretanto este problema pode também ser tratado seguindo a linha apresentada na Secção 9.3.

Na Aplicação 190 consideramos um modelo econômico clássico, que foi formulado por F. Ramsey em 1928 (veja [Ra]). Utilizando a equação de Euler–Lagrange, obtemos a política ótima para um problema de *consumo* \times *investimento* com horizonte infinito.

Em [BMS] podem ser encontradas diversas aplicações do princípio do máximo a problemas aeroespaciais, dentre as quais citamos: Desenho ótimo de uma missão a Netuno; Ascensão ótima de um veículo espacial hipersônico; Alcance máximo de vôo para uma asa delta atravessando uma térmica. Em [Ho] são discutidas (entre outras) as seguintes aplicações: Oscilador harmônico com custo de combustível; controle de epidemias; Pescaria ótima; Contração do ventrículo esquerdo do coração; Compra e venda de ações.

Aplicação 186 (Tempo mínimo I). Considere a tarefa de encontrar uma estratégia \bar{u} (aceleração e frenagem) que permita levar, no menor tempo possível, um carro que se encontra na origem e em repouso, até





uma parede distante de uma unidade. Ao chegar na parede o carro deve ter novamente velocidade nula.

Supondo que o carro de massa unitária e desprezando os atritos, temos o modelo:

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad t \in [0, \bar{t}],$$

onde $x(t)$ representa o deslocamento, $\dot{x}(t)$ a velocidade e $\ddot{x}(t)$ a aceleração do veículo no tempo t . As condições de contorno são:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= 0; \\ x(\bar{t}) &= 1, & \dot{x}(\bar{t}) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos então escrever o problema na forma $P(t_0, z_0)$ como

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \int_0^T 1 \, dt \\ \text{sujeito a} & \\ & z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad z(0) = 0; \\ & \psi(T, z(T)) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z(T) = 0 \end{cases}$$

onde $T \geq 0$, $u \in L^1[0, T]$ e $u(t) \in \Omega := [-1, 1]$ q.s. em $[0, T]$. Como o sistema é autônomo, a aplicação $U_* = U_*(z, \lambda)$ não depende explicitamente do tempo. Do princípio do máximo, obtemos as seguintes condições necessárias:

$$\begin{aligned} z' &= \begin{pmatrix} z_2 \\ u \end{pmatrix}, \quad z(0) = 0, \quad z(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda' &= - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda(T) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \\ H(t, z, \lambda, u) &= z_2 \lambda_1 + u \lambda_2 + \eta; \\ z_2 \lambda_1 + U_*(z, \lambda) \lambda_2 + \eta &= \min_{u \in [-1, 1]} \{z_2 \lambda_1 + u \lambda_2 + \eta\}, \quad \text{q.s. em } [0, T]; \\ \eta + |\mu_1| + |\mu_2| &\neq 0. \end{aligned}$$

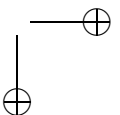
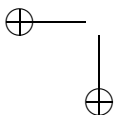
A condição de optimalidade nos permite encontrar

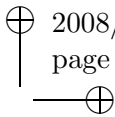
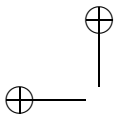
$$(10.7) \quad U_*(z, \lambda) = \begin{cases} -\text{sign } \lambda_2 & , \lambda_2 \neq 0 \\ ? & , \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Calculando agora $z(t), \lambda(t)$ para $t \in [0, T]$, obtemos⁴

$$(10.8) \quad z_2(t) = \int_0^t u(s) \, ds, \quad z_1(t) = \int_0^t \int_0^s u(r) \, dr \, ds, \quad t \in [0, T];$$

⁴Note que λ é calculado *para trás* no tempo.





$$(10.9) \quad \lambda_1(t) = \mu_1, \lambda_2(t) = (T - t)\mu_1 + \mu_2, t \in [0, T].$$

Analisando (10.7), concluímos que basta identificar o sinal e os zeros da função λ_2 para obtermos a estratégia ótima de controle. Estudamos assim os seguintes casos:

- λ_2 não possui zeros: de (10.7), segue que $u(t) \equiv 1$ ou $u(t) \equiv -1$. Entretanto, essas estratégias não são admissíveis, pois as respectivas trajetórias não alcançam o estado final;
- λ_2 possui zeros em $[0, T]$: de (10.9), temos que λ_2 é uma função linear em t . Logo, λ_2 possui apenas um zero em $[0, T]$, o qual denominamos τ .

Temos assim duas famílias de candidatos a controle ótimo:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau \\ -1, & t > \tau \end{cases} \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{cases} -1, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}.$$

Note que com os controles da segunda família não é possível atingir o estado final $z(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ para nenhum $T > 0$. Substituindo a expressão restante em (10.8), temos

$$z(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 \\ \tau \end{pmatrix}; \quad z(T) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}T^2 + 2\tau T - \tau^2 \\ 2\tau - T \end{pmatrix}.$$

Da condição de contorno $z(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, obtemos para o par (τ, T) o sistema não linear

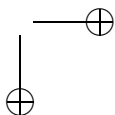
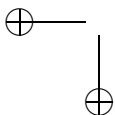
$$\begin{cases} 1 = -\frac{1}{2}T^2 + 2\tau T - \tau^2 \\ 0 = 2\tau - T \end{cases}$$

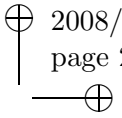
cuja solução é $\tau = 1, T = 2$, como se verifica facilmente. Portanto, a solução do problema de controle é

$$\bar{T} = 2, \quad \bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

□

Aplicação 187 (Tempo mínimo II). Consideramos agora uma variante da aplicação anterior. Suponha que no tempo $t = 0$ nosso carro se encontra na posição $a \in \mathbb{R}$ com velocidade $b \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo é levá-lo até a origem no menor tempo possível, de forma que ao chegar ao destino, o carro tenha velocidade nula.





Temos agora o seguinte problema de controle

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \int_0^T 1 \, dt \\ \text{sujeito a} \\ z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad z(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \\ \psi(T, z(T)) := z(T) = 0 \end{cases}$$

onde $T \geq 0$, $u \in L^1[0, T]$ e $u(t) \in \Omega := [-1, 1]$ q.s. em $[0, T]$. As condições necessárias fornecidas pelo princípio do máximo são as mesmas, com excessão das condições de contorno para a variável de estado

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad z(T) = 0.$$

$U_*(z, \lambda)$ é novamente dada pela equação (10.7) e os multiplicadores de Lagrange por (10.9). Portanto, λ_2 é linear e muda de sinal no máximo uma vez em $[0, T]$. Sendo assim, basta estudar os seguintes casos:

1º Caso: \bar{u} não muda de sinal em $[0, T]$.

- Se $\bar{u} \equiv 1$, temos

$$z_2(t) = b + t, \quad z_1(t) = a + bt + \frac{t^2}{2}, \quad t \in [0, T].$$

Como $z(T) = 0$, tais estratégias são admissíveis apenas para condições iniciais do tipo $(a, b) = (T^2/2, -T)$, com $T > 0$.

- Se $\bar{u} \equiv -1$, temos

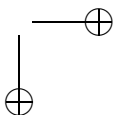
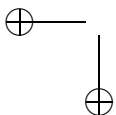
$$z_2(t) = b - t, \quad z_1(t) = a + bt - \frac{t^2}{2}, \quad t \in [0, T].$$

Como $z(T) = 0$, tais estratégias são admissíveis apenas para condições iniciais do tipo $(a, b) = (-T^2/2, T)$, com $T > 0$.

A curva \mathcal{C} na Figura 10.2 é composta pelas condições iniciais (a, b) , para as quais as estratégias $\bar{u} \equiv 1$ ou $\bar{u} \equiv -1$ são ótimas. As respectivas trajetórias correspondem à parte da curva \mathcal{C} limitada por (a, b) e pela origem.

2º Caso: \bar{u} muda de sinal em $\tau \in (0, T)$.

No caso anterior vimos que, se $\bar{u} \equiv 1$, então $z_2(t)^2 = 2z_1(t) + const$; enquanto que $\bar{u} \equiv -1$ implica em $z_2(t)^2 = -2z_1(t) + const$. Portanto, as trajetórias correspondentes a tais controles são necessariamente paralelas a um dos arcos de parábola mostrados na Figura 10.3. De onde



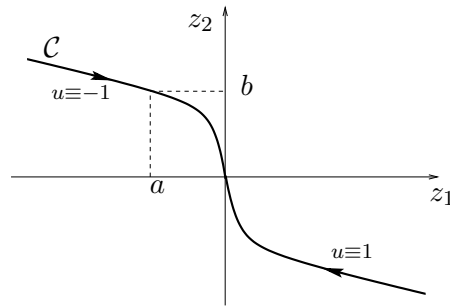
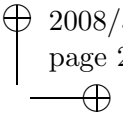
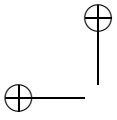


Figura 10.2: Trajetórias correspondentes aos controles ótimos $\bar{u} \equiv 1$ ou $\bar{u} \equiv -1$

concluimos que a trajetória ótima é necessariamente composta por dois arcos: cada um pertencente a uma das famílias na Figura 10.3 (lembre que \bar{u} muda de sinal uma única vez no intervalo $[0, T]$).

Note que a parte final da trajetória ótima é necessariamente como na Figura 10.2 (caso contrário a trajetória não seria admissível). Para determinar a parte inicial da trajetória, observe que, dada uma condição inicial $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, existe uma única curva pertencente às famílias mostradas na Figura 10.3, que intercepta tanto o ponto (a, b) quanto a curva \mathcal{C} (o caso $a > 0, b > 0$ é mostrado na Figura 10.4). O princípio do máximo nos permite concluir que existe uma única trajetória associada a controles do tipo

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau \\ -1, & t > \tau \end{cases} \quad \text{ou} \quad \bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$$

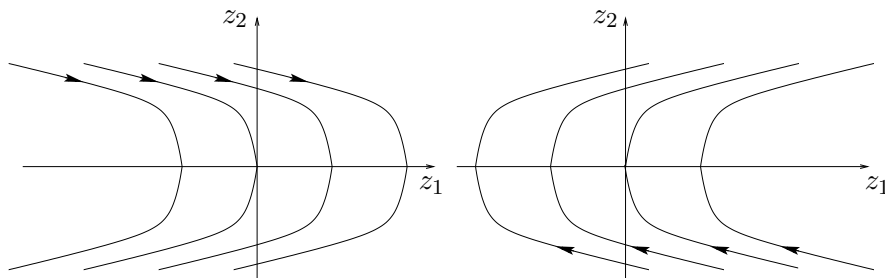
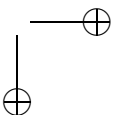
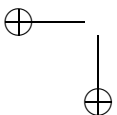


Figura 10.3: Trajetórias correspondentes a controles constantes



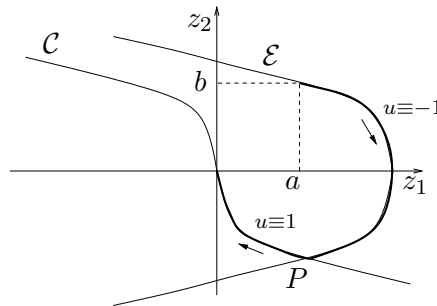
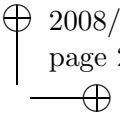


Figura 10.4: Trajetória ótima para a condição inicial $z(0) = (a, b)$

que é admissível para a condição inicial (a, b) . Tal trajetória é composta por dois arcos: um da curva \mathcal{E} limitado por (a, b) e pelo ponto P e outro da curva \mathcal{C} limitado por P e pela origem. Para calcular τ (instante em que trocamos o controle de -1 para 1) não é necessário calcular as constantes μ_1, μ_2 na equação (10.9). No caso $a > 0, b > 0$, basta descobrir para qual $\tau > 0$ a curva $(z_1(t), z_2(t)) = (a + bt - t^2/2, b - t)$ satisfaz a condição

$$z_2(\tau) < 0, \quad z_2(\tau)^2 = 2z_1(\tau).$$

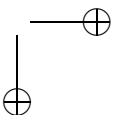
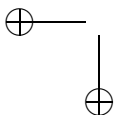
Um cálculo simples mostra que τ é dado por uma das raízes $b \pm \sqrt{b^2/2 - a}$. □

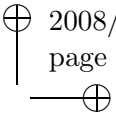
Aplicação 188 (Alunissagem). Considere o problema de controlar a descida de uma espaçonave na Lua, utilizando para isso a menor quantidade possível de combustível. Em um modelo simplificado, temos⁵

- t : tempo;
- $h(t)$: altura da espaçonave;
- $v(t)$: velocidade da espaçonave;
- $m(t)$: massa da espaçonave + combustível;
- $u(t)$: empuxo dos motores da espaçonave.

Seja M a massa da espaçonave sem combustível, F a quantidade inicial de combustível, h_0 a altura inicial, v_0 a velocidade inicial, u_{max} o empuxo máximo dos motores da nave ($0 \leq u(t) \leq u_{max}, t \geq 0$), g a constante gravitacional da Lua (considerada constante) e k a constante de proporcionalidade entre o empuxo e a taxa de queima do combustível.

⁵Este modelo é também discutido em [FlRi], [Ho] e [Know].





As variáveis de estado (h, v, m) satisfazem a seguinte dinâmica:

$$\begin{cases} h' = v(t) \\ v' = -g + u(t)/m(t) \\ m' = -ku(t) \end{cases}$$

Definindo $z(t) = (h(t), v(t), m(t))$, temos o sistema não linear

$$(10.10) \quad \begin{cases} z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ -g + u/z_3 \\ -ku \end{pmatrix} =: f(t, z, u) \\ z(0) = (h_0, v_0, M + F), \quad z(T) = (0, 0, ?) . \end{cases}$$

A condição final segue da hipótese que um pouso 'suave' ocorre quando $h(T) = 0$ e $v(T) = 0$, sendo para m somente relevante que $m(T) \geq M$. Como o custo a ser minimizado corresponde ao gasto de combustível, temos que maximizar

$$m(T) = M + F - k \int_0^T u(t) dt .$$

O problema de controle ótimo pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(T, z, u) = \int_0^T u(t) dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in \{L^1[0, T] \mid u(t) \in \Omega := [0, u_{max}] \text{ q.s. em } [0, T]\}, \\ z' = f(z, u), \quad z(0) = (h_0 \ v_0 \ M + F) \in \mathbb{R}^3, \\ \psi(T, z(T)) = (z_1(T) \ z_2(T)) = 0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

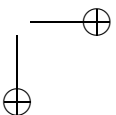
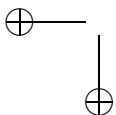
A função de Hamilton é

$$H(t, z, \lambda, u) = \langle \lambda, u \rangle + \eta L(t, z, u) = \lambda_1 z_2 + \lambda_2 (-g + u/z_3) - \lambda_3 k u + \eta u .$$

Minimizando a função de Hamilton em relação a u obtemos

$$(10.11) \quad U_*(z, \lambda) = \begin{cases} 0 & , \eta + \lambda_2/z_3 - k\lambda_3 > 0 \\ ? & , \eta + \lambda_2/z_3 - k\lambda_3 = 0 \\ u_{max} & , \eta + \lambda_2/z_3 - k\lambda_3 < 0 \end{cases}$$

Tomamos por simplicidade $u_{max} = 1$. A fim de tornar o problema fisicamente coerente, supomos ainda



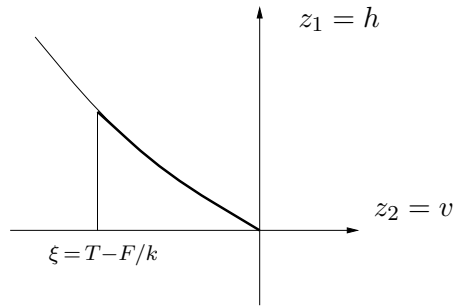
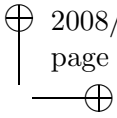


Figura 10.5: Condições iniciais (h, v) que são levadas pelo controle $\bar{u} \equiv 1$ à condição final $(0, 0, m(T))$ com $m(T) \geq M$.

$$1 = \text{empuxo máximo} > \text{força gravitacional} = (M + F)g,$$

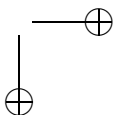
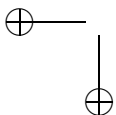
isto é $1/(M + F) > g$. É razoável considerar que existe uma estratégia ótima do tipo bang-bang, i.e. da forma

$$(10.12) \quad \bar{u}(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, \xi] \\ 1 & , t \in [\xi, T] \end{cases}$$

Calculamos inicialmente a trajetória associada à estratégia \bar{u} . Como $\bar{u} \equiv 1$ em $[\xi, T]$, usamos o sistema (10.10) e as condições de contorno $z_1(T) = z_2(T) = 0$ e $z_3(\xi) = M + T$ a fim de determinar z no instante $t = \xi$. Obtemos assim

$$\begin{cases} z_1(\xi) = -\frac{1}{2}g(T - \xi)^2 - \frac{M+F}{k^2} \ln\left(\frac{M+F-k(T-\xi)}{M+F}\right) - \frac{T-\xi}{k} \\ z_2(\xi) = g(T - \xi) + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{M+F-k(T-\xi)}{M+F}\right) \\ z_3(\xi) = M + F \end{cases}$$

Traçando o gráfico de $z_1(\xi)$ por $z_2(\xi)$, obtemos a curva da Figura 10.5, que é formada pelos estados da forma $z(\xi) = (h(\xi), v(\xi), M + F)$ que são levados pelo controle $\bar{u}(t) = 1, t \in [\xi, T]$ no estado final $z(T) = (0, 0, m(T))$ com $m(T) \geq M$. Note que o comprimento dessa curva é limitado pois, como $\bar{u} \equiv 1$, temos $m' = -k$ e o combustível se esgotará após F/k unidades de tempo. Temos assim a limitação $T - \xi \leq F/k$ (além de $T - \xi \geq 0$, obviamente).



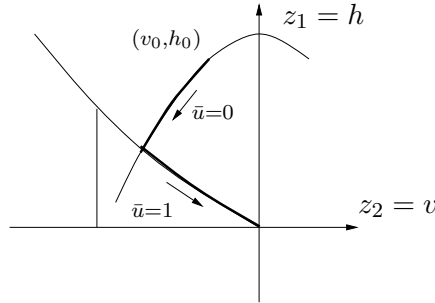
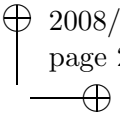
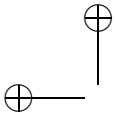


Figura 10.6: Trajetória correspondente à estratégia bang-bang \bar{u} .

Como inicialmente $\bar{u} \equiv 0$, a nave se encontra em queda livre durante o intervalo de tempo $[0, \xi]$. A trajetória correspondente é

$$\begin{cases} z_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0 \\ z_2(t) = -gt + v_0 \\ z_3(t) = M + F \end{cases} \quad t \in [0, \xi].$$

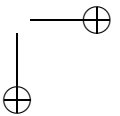
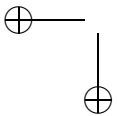
Explicitando $z_1 (= h)$ em função de $z_2 (= v)$, obtemos:

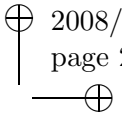
$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2g}[v^2(t) - v_0^2], \quad t \in [0, \xi].$$

A curva $(v(t), h(t))$ é uma parábola no plano de fase $v \times h$. Unindo os dois trechos da trajetória correspondente a \bar{u} , obtemos a curva mostrada na Figura 10.6. Segundo essa trajetória, a nave cai em queda livre até que o estado (v, h) alcance a curva da Figura 10.5. Nesse momento os motores são acionados na potência máxima até um estado final admissível ser atingido ($\psi(T, z(T)) = 0$).

Observe que se a intersecção das duas curvas na Figura 10.6 ocorre em um ponto $(v(\xi), h(\xi))$ com $\xi < T - F/k$, a quantidade de combustível não é suficiente para realizar um pouso suave. Enquanto que se a condição inicial (v_0, h_0) se encontra abaixo da curva na Figura 10.5, mesmo empregando empuxo máximo $u(t) = 1, t \in [0, T]$, o solo lunar é atingido com $v(T) < 0$.

Através do princípio do máximo verificamos agora que a estratégia de controle definida em (10.12) é um candidato a controle ótimo. Suponha





$\lambda(0) = (l_1 \ l_2 \ l_3)$. Substituindo na equação adjunta

$$\begin{cases} \lambda'_1 = 0 \\ \lambda'_2 = -\lambda_1 \\ \lambda'_3 = \lambda_2 u / z_3^2 \end{cases}$$

temos:

$$\lambda_1(t) = l_1, \quad t \in [0, T]; \quad \lambda_2(t) = l_2 - l_1 t, \quad t \in [0, T];$$

$$\lambda_3(t) = l_3, \quad t \in [0, \xi].$$

Como $z_3(t) = M + F - k(t - \xi)$, $t \in [\xi, T]$, podemos calcular λ_3 no intervalo final de tempo, obtendo

$$\lambda_3(t) = l_3 + \int_{\xi}^t \frac{l_2 - l_1 s}{[k(\xi - s) + M + F]^2} ds, \quad t \in [\xi, T].$$

Defina agora $r(t) := \eta + \lambda_2(t)/z_3(t) - k\lambda_3(t)$, $t \in [0, T]$. De (10.11) sabemos que a escolha do controle \bar{u} no tempo t depende de $\text{sign}(r(t))$. Portanto, como a estratégia de controle \bar{u} *salta* de 0 para 1 em $t = \xi$, temos obrigatoriamente

$$r(\xi) = \eta + \frac{\lambda_2(\xi)}{z_3(\xi)} - k\lambda_3(\xi) = 0.$$

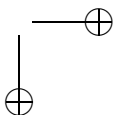
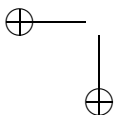
Escolhendo $\eta = 1$ (que satisfaz condição de transversalidade), reescrevemos a equação acima como

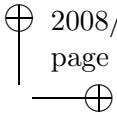
$$1 + \frac{l_2 - l_1 \xi}{M + F} - k l_3 = 0.$$

A escolha de \bar{u} em (10.12) implica em $r(t) > 0$, $t \in [0, \xi)$. Portanto, $l_1 > 0$, necessariamente.

O princípio do máximo fornece-nos ainda uma condição inicial para a equação adjunta:

$$\lambda(T) = -\frac{\partial \psi}{\partial z}(T, z(T))^* \mu = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$





de onde concluímos que $\lambda_3(T) = 0$. Obtemos assim para l_1, l_2, l_3 o sistema sub-determinado de equações lineares

$$\begin{cases} 1 + (M + F)^{-1}(l_2 - l_1\xi) - kl_3 = 0 \\ l_3 + \int_{\xi}^T \frac{l_2 - l_1s}{[k(\xi - s) + M + F]^2} ds = 0 \end{cases}$$

Considerando λ_2 como parâmetro, o sistema se reescreve como

$$\begin{cases} (M + F)^{-1}\xi l_1 + kl_3 = 1 + l_2(M + F)^{-1} \\ \mathcal{P}l_1 - l_3 = \mathcal{Q}l_2 \end{cases}$$

onde $\mathcal{P} = \int_{\xi}^T s[k(\xi - s) + M + F]^{-2} ds$ e $\mathcal{Q} = \int_{\xi}^T [k(\xi - s) + M + F]^{-2} ds$ são constantes positivas. Resolvendo o novo sistema obtemos:

$$(10.13) \quad \begin{pmatrix} l_1 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1 + ((M + F)^{-1} + k\mathcal{Q})l_2] / [\xi(M + F)^{-1} + k\mathcal{P}] \\ \mathcal{P}[1 + ((M + F)^{-1} + k\mathcal{Q})l_2] / [\xi(M + F)^{-1} + k\mathcal{P}] - \mathcal{Q}l_2 \end{pmatrix}$$

Note que para $t \in [\xi, T)$, temos

$$(10.14) \quad \begin{aligned} r(t) &= 1 + (l_2 - l_1 t)/z_3(t) - k\lambda_3(t) \\ &< 1 + l_2/M - kl_3 + (\mathcal{P} - \xi/(M + F))l_1. \end{aligned}$$

Substituindo em (10.14) as expressões encontradas em (10.13) para l_1 e l_3 , obtemos uma restrição linear para escolha de l_2 . Outra restrição (também linear) para l_2 é dada por $l_1 > 0$ e (10.13). Como o problema assim colocado possui solução não única, é possível encontrar uma condição inicial (l_1, l_2, l_3) , de forma que a função r satisfaça

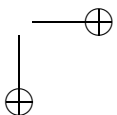
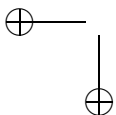
$$\begin{cases} r(t) > 0, & t \in [0, \xi) \\ r(t) < 0, & t \in (\xi, T] \end{cases}$$

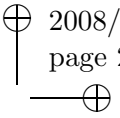
provando que \bar{u} satisfaz as condições do princípio do máximo.

Verificamos agora que \bar{u} é o único candidato fornecido pelo princípio de Pontryagin. A função $r(t)$ obtida de (10.11) determina quando ocorrem saltos na estratégia de controle. Note ainda que, como $\lambda_1 \equiv l_1$, então $\lambda'_2 \equiv -l_1$ e temos

$$\begin{aligned} r'(t) &= (\lambda'_2 z_3 - \lambda_2 z'_3)z_3^{-2} - k\lambda'_3 \\ &= \lambda'_2/z_3 - \lambda_2(-ku)z_3^{-2} - k\lambda_2 uz_3^{-2} \\ &= -l_1/z_3(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Analisamos separadamente as situações possíveis:





- $l_1 \neq 0$: Como $z_3(t) = m(t) > 0$, então r é monótona. Se $l_1 > 0$, obtemos um controle do tipo \bar{u} . Se $l_1 < 0$, obtemos uma estratégia oposta, i.e. inicialmente $u = 1$ e depois $u = 0$. Com essa estratégia não é possível obter um pouso suave. De fato, ou (v_0, h_0) se situa abaixo ou acima do gráfico na Figura 10.5. No primeiro caso, já vimos que $v(T) < 0$. No segundo caso, como u é da forma

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

obtemos do sistema adjunto

$$v(T) - v(\tau) = \int_{\tau}^T v'(t) dt = \int_{\tau}^T -g dt = -g(T - \tau).$$

Logo, uma condição necessária para $v(T) = 0$ é que $T = v(\tau)/g + \tau$. Novamente do sistema adjunto obtemos

$$\begin{aligned} -h(\tau) &= h(T) - h(\tau) = \int_{\tau}^T h'(t) dt = \int_{\tau}^T v(t) dt \\ &= \int_{\tau}^T g(T - t) dt = \frac{g}{2}(T - \tau)^2, \end{aligned}$$

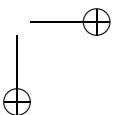
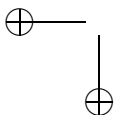
isto é $h(\tau) = -v^2(\tau)/2g < 0$. Portanto, a transição de 1 para 0 na estratégia de controle ocorre abaixo da superfície da Lua, e o pouso obviamente não é suave.

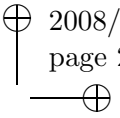
- $l_1 = 0$: Neste caso, $r' = 0$ e r é constante. Se $r \neq 0$, os possíveis candidatos são $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$. O primeiro controle obviamente não permite pouso suave. Já o segundo será ótimo somente se (v_0, h_0) pertence à curva na Figura 10.5, quando a estratégia se torna idêntica a \bar{u} . Por fim, se $r = 0$, temos

$$1 + l_2 \frac{1}{z_3(t)} + k \lambda_3(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

isto é, as funções $\{1, z_3^{-1}, \lambda_3\}$ são linearmente dependentes. Mas isto é uma contradição pois

$$z_3(t) = M + F - k \int_0^t u(s) ds, \quad \lambda_3(t) = l_2 \int_T^t u(s) z_3(s)^{-2} ds.$$





Portanto, o único controle admissível que satisfaz as condições do princípio do máximo é \bar{u} definido em (10.12). \square

Aplicação 189 (Controle singular). Considere o problema escalar de controle

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \frac{1}{2} \int_0^3 z(t)^2 dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in L^1[0, 3], u(t) \in \Omega := [-1, 1] \text{ q.s. em } [0, 3], \\ z' = u, z(0) = z(3) = 1. \end{cases}$$

O tempo final $T = 3$ e a condição final para a trajetória $z(T) = 1$ são fixados através da condição:

$$\psi(T, z(T)) = \begin{pmatrix} 1 - z \\ T - 3 \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Do princípio do máximo, obtemos as condições necessárias:

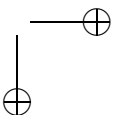
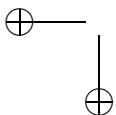
$$\begin{aligned} z' &= u, \quad z(0) = z(3) = 1; \\ \lambda' &= -\eta z, \quad \lambda_1 = \mu_1; \\ H(t, z, \lambda, u) &= \lambda u + \frac{1}{2} \eta z^2, \quad H_1 = \mu_2; \\ \eta + |\mu_1| + |\mu_2| &\neq 0. \end{aligned}$$

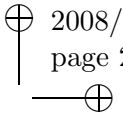
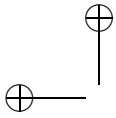
A condição de máximo implica em $U_*(z, \lambda) = -\text{sign } \lambda$. Note que $\eta = 0$ não pode ocorrer, pois implica em $\lambda' = 0$. Logo, $u \equiv 1$ ou $u \equiv -1$, mas ambas as estratégias não são admissíveis. Suponha então $\eta = 1$. Logo $\lambda'(0) = -1$. Supondo $\lambda(0) \leq 0$, temos:

- Se $\lambda(0) \leq 0$ e $\lambda(t) < 0$, $t \in [0, 3]$, então $u \equiv 1$, o que implica em $z(3) = 4$ (contradizendo a condição de contorno final).
- Se $\lambda(0) \leq 0$, $\lambda(t_1) = 0$ para algum $t_1 > 0$ e $\lambda(t) < 0$, $t \in (0, t_1)$, então $\lambda'(t_1) \geq 0$. Mas

$$u(t) \equiv 1, t \in (0, t_1) \Rightarrow z(t) > 0, t \in (0, t_1] \Rightarrow \lambda'(t) < 0, t \in (0, t_1],$$

contradizendo a conclusão $\lambda'(t_1) \geq 0$.





Concluimos assim que $\lambda(0) > 0$. De forma análoga prova-se que $\lambda(3) < 0$. Portanto, a função λ possui pelo menos um zero em $(0, 3)$. Seja t_1 o menor e t_2 o maior zero de λ em $(0, 3)$. Provamos agora que $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$:

- Note que $t_1 \neq t_2$, pois se λ possui apenas um zero, então $z(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0, 3/2] \\ t-2, & t \in [3/2, 3] \end{cases}$, que obviamente não é uma trajetória ótima;
- Em $[0, t_1)$ temos: $u(t) = -1$, $z(t) = 1 - t$, $\lambda(t) = \lambda(0) - t + \frac{1}{2}t^2$. Como $\lambda(t_1) = 0$, então $t_1 = 1 \pm \sqrt{1 - 2\lambda(0)}$. Se t_1 assume o valor da maior raiz, temos $t_1 > 1$ e a trajetória associada a λ não é ótima, pois $\bar{z}(t) := \begin{cases} z(t), & z(t) \geq 0 \\ 0, & z(t) < 0 \end{cases}$ satisfaz

$$\int_0^3 \bar{z}(t)^2 dt < \int_0^3 z(t)^2 dt .$$

Logo, $t_1 = 1 - \sqrt{1 - 2\lambda(0)} \leq 1$.

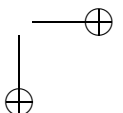
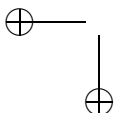
- Se $t_1 < 1$, então $\lambda'(t_1) = -z(t_1) < 0$. Seja $\hat{t} > 1$, tal que $\lambda(t) < 0$, $t \in (t_1, \hat{t})$ e $\lambda(\hat{t}) = 0$. Logo, $\lambda'(\hat{t}) \geq 0$. De $\lambda(t) < 0$, segue $u(t) \equiv 1$, $t \in (t_1, \hat{t})$. Como $z(t_1) > 0$ e $z'(t) = u(t) = 1$, $t \in (t_1, \hat{t})$, temos $z(t) \geq 1 - t_1 > 0$, $t \in [0, \hat{t}]$. Então $\lambda'(\hat{t}) = -z(\hat{t}) < 0$ (contradição).

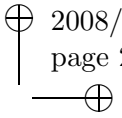
Concluimos assim que $t_1 = 1$. De modo análogo, prova-se que $t_2 = 2$. Provamos agora que $\lambda(t) = 0$, $t \in (t_1, t_2)$. De fato, se $\lambda(t) > 0$ (o caso < 0 é análogo) para algum $t \in (t_1, t_2)$, então existem $\hat{t}_1, \hat{t}_2 \in [t_1, t_2]$ tais que $\lambda(t) > 0$, $t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ e $\lambda(\hat{t}_1) = \lambda(\hat{t}_2) = 0$. Logo, $u(t) = -1$, $t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ e portanto $\lambda''(t) = (-z(t))' = -u(t) = 1$, $t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$, o que é claramente uma contradição. Portanto, a estratégia ótima de controle tem de ser

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \in (1, 2) \\ +1, & t \in [2, 3] \end{cases} .$$

(Note que a trajetória $z \equiv 0$ é um extremal singular do problema e a trajetória ótima \bar{z} é do tipo: bang-singular-bang.) \square

Aplicação 190 (Consumo \times Investimento). Tratamos a seguir um problema clássico da economia, que foi um dos primeiros a ser considerado sob a ótica do cálculo variacional. Consideramos o seguinte





problema macroeconômico: Como equacionar a relação entre consumo e investimento, a fim de otimizar o desenvolvimento econômico?

Suponha que a economia de uma nação é representada pelas variáveis

- $K(t)$: Capital no tempo t ;
- $C(t)$: Consumo;
- $Y(t)$: Produção (produto interno);
- $K'(t)$: Investimento (variação do Capital);

ao longo do intervalo de tempo $t \in [0, \infty)$. Considere ainda o seguinte modelo simplificado:

- i) $Y = g(K)$, onde $g' > 0$ e $g'' \leq 0$;
- ii) $C = Y - K'$ (parte da produção é consumida e o restante é reinvestido);
- iii) $K(0) = K_0$ (o capital inicial é conhecido);
- iv) $U = U(C)$ é a utilidade do capital, onde $U' > 0$, $U'' < 0$;
- v) $\delta > 0$ é o fator de desconto.

O objetivo é encontrar uma política ótima de investimento para o problema:

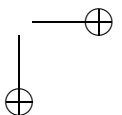
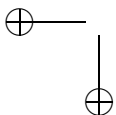
$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(C(t)) dt \\ \text{sujeito a} & K' = g(K) - C, \quad K(0) = K_0. \end{cases}$$

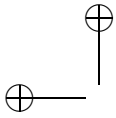
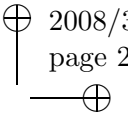
Este problema foi originalmente formulado e resolvido por Ramsey em 1928 (veja [Ra]). A hipótese $C = g(K) - K'$ permite-nos analisar este problema utilizando cálculo variacional (veja Seção 9.2). Note que a equação de Euler–Lagrange é dada por

$$K'' - g'(K)K' + \frac{U'(g(K) - K')}{U''(g(K) - K')}(\delta - g'(K)) = 0.$$

No caso geral esta equação não pode ser resolvida analiticamente. Fazemos aqui a hipótese simplificadora:

$$U(r) = \frac{1}{1-q} r^{1-q}, \quad g(r) = br,$$





onde $b > 0$, $q \in (0, 1)$. Neste caso particular a equação de Euler–Lagrange fica simplificada, na forma de uma equação que sabemos resolver:

$$qK'' + (\delta - b - qb)bK' + b(b - \delta)K = 0.$$

Calculando as raízes do polinômio característico, temos $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = a := q^{-1}(b - \delta)$. Portanto, as soluções que satisfazem a condição inicial $K(0) = K_0$ são da forma:

$$\bar{K}(t) = (K_0 - A)e^{at} + Ae^{bt}, \quad t \geq 0,$$

onde A é um parâmetro livre. Suponha agora que $b > a$, i.e. $\delta > (1 - q)b$. Neste caso, as hipóteses do modelo:

$$C(t) = g(K(t)) - K'(t) > 0, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) \geq 0$$

são satisfeitas respectivamente para $A \geq 0$ e $A < K_0$. Para determinar o parâmetro $A \in [0, K_0)$ é necessária uma condição de contorno para a equação da dinâmica – por exemplo $K'(0)$ ou $K(\infty)$. Como tal condição não é explicitamente fornecida, é preciso analisar a equação de Hamilton–Jacobi–Bellman, que para este problema autônomo se escreve como

$$-\delta V(x) + \min_{u \in \Omega} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, g(x) - u \right\rangle + \frac{1}{1 - q} u^{1 - q} \right\} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

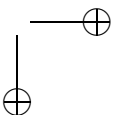
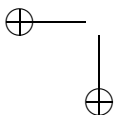
(note que $\delta = b - qa$). É fácil verificar que $V(x) := (1 - q)/(b - a)^q x^{1 - q}$, $x \geq 0$ é solução da equação acima. Note ainda que se $A = 0$ a condição

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} V(\bar{K}(t)) = 0$$

é satisfeita, pois $a(1 - q) < 0$ por hipótese. Portanto, $V(x)$ e a trajetória $\bar{K}(t) = K_0 e^{at}$ satisfazem as condições do teorema, de onde concluímos que uma estratégia ótima de consumo é dada por

$$\bar{C}(t) = (b - a)K_0 e^{at}, \quad t \geq 0.$$

□



Exercícios

10.1. Considere o problema de Bolza

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \frac{1}{2} \int_0^1 u(t)^2 dt + z_1(1)^2 + z_2(1)^2 \\ \text{sujeito a} & \\ u \in L^1[0, 1], & z'_1 = z_2, z'_2 = u, z_1(0) = z_2(0) = 0. \end{cases}$$

- a) Formule o princípio do máximo para o problema acima.
b) Obtenha o processo ótimo.

10.2. Considere o problema de controle ótimo

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \int_0^T [z_1(t)^2 + u(t)^2] dt \\ \text{sujeito a} & \\ u \in L^1[0, T], & z'_1 = z_2, z'_2 = -z_2 + u, z_1(0) = 1, z_2(0) = 0. \end{cases}$$

- a) Formule o princípio do máximo para o problema acima.
b) Obtenha o processo ótimo.

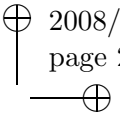
10.3. Considere o problema de controle ótimo escalar

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \frac{1}{2} \int_0^1 [3z(t)^2 + u(t)^2] dt \\ \text{sujeito a} & \\ u \in L^1[0, 1], & z' = -z + u, z(0) = 1. \end{cases}$$

- a) Formule o princípio do máximo para o problema acima.
b) Obtenha o processo ótimo.

10.4 (Problema de Investimento). Suponha que um determinado produto é fabricado com a taxa $z(t)$. No tempo $t > 0$ uma fração $u(t)$ da produção é reinvestida para aumentar a produção, sendo o restante vendido para geração de lucro. O objetivo é determinar uma política de investimento ótima, de forma a maximizar o lucro total no horizonte fixo de tempo $[0, T]$. Temos assim o problema

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \int_0^T (1 - u(t))z(t) dt \\ \text{sujeito a} & \\ z' = uz, & z(0) = z_0 > 0, z(t) \geq 0, u \in \hat{C}[0, T] \end{cases}$$



EXERCÍCIOS

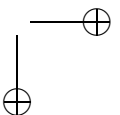
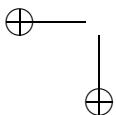
- a) Reescreva o problema como um problema variacional com restrições lagrangeanas: $y'(t) \geq 0$, $y'(t) \leq y(t)$.
- b) Obtenha condições necessárias para o novo problema.
- c) Encontre a taxa ótima de produção \bar{y} .

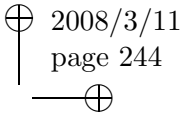
10.5 (Problema do Café). Uma xícara cheia de café à temperatura de 100°C deve ser esfriada a temperatura de 0°C por adição de uma quantidade fixa de creme de leite. Uma equação aproximada para evolução da temperatura z da mistura é dada por

$$z' = -z - 25u - uz/4.$$

As condições de contorno são $z(0) = 100$, $z(T) = 0$.

- a) Obtenha condições necessárias para o problema de tempo ótimo sujeito às restrições $0 \leq u(t) \leq 1$, $t \in [0, T]$, $\int_0^T u(t)dt = 1$, impostas ao fluxo externo de líquido u .
 - b) Use o fato $z' < 0$ para obter um problema equivalente com intervalo de tempo fixo. O que se pode afirmar sobre a unicidade da solução obtida no item a).
- (Sugestão: A nova variável livre é $s = z$.)





Capítulo 11

Programação Dinâmica Discreta

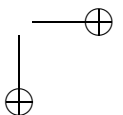
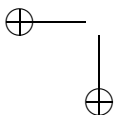
Tratamos neste capítulo dos problemas de controle ótimo com dinâmica discreta, em particular, problemas relacionados com o *princípio de Bellman*. A análise está baseada em um procedimento denominado *programação dinâmica*, o qual permite a determinação de condições necessárias para otimalidade de problemas de controle.

Na Secção 11.1 é apresentado o princípio de Bellman em uma forma bastante genérica. Nas Secções 11.2 a 11.5 são analisados problemas de otimização com dinâmica discreta. Para cada problema encontramos estruturas (uma função, uma equação e condições de contorno) que permitem determinar as soluções ótimas. Entre os problemas analisados estão o da substituição de equipamento e o do caixeiro viajante. Na Secção 11.6 abordamos um modelo genérico para problemas discretos de decisões consecutivas, sendo um resultado de existência discutido em detalhes.

11.1 Introdução

Em otimização o conceito de *programa* está relacionado com o problema de dominar, de forma ótima, uma situação proposta. Tal conceito surgiu originalmente na economia e diz respeito ao desenvolvimento de planejamentos ótimos de produção.

Iniciamos a abordagem considerando um problema genérico. Con-



sidere o problema de otimização da forma¹

$$\begin{cases} \text{Minimizar } g(x) \\ \text{sujeito a } x \in X_{ad} \end{cases}$$

A função $g(x)$ é denominada função objetivo e X_{ad} é o conjunto dos pontos admissíveis (e.g., X_{ad} : conjunto das estratégias de produção viáveis; $g(x)$: custo líquido da realização do plano $x \in X_{ad}$). Os diversos problemas e os respectivos métodos de solução são denominados de acordo com as características particulares:

- Programação Linear (*linear programming*)
Problema: g linear, X_{ad} poliedro convexo em R^m .
- Programação Geométrica (*fractional programming*)
Problema: g quociente de aplicações lineares, X_{ad} poliedro convexo em R^m .
- Programação Convexa (*convex programming*)
Problema: g convexa, X_{ad} subconjunto convexo de um espaço vetorial.
- Programação não linear (*nonlinear programming*)
Problema: demais casos.

A metodologia conhecida como programação dinâmica (*dynamic programming*) foi desenvolvida por R.E. Bellman em fins dos anos 50. Ela pode ser aplicada para solucionar problemas de controle bastante gerais (não lineares, não autônomos) e é uma alternativa à abordagem variacional estudada no Capítulo 10 sob o nome de *princípio do máximo*. O ponto de partida da programação dinâmica é o chamado *princípio de otimalidade de Bellman*:²

Uma estratégia ótima possui a seguinte propriedade: independente das decisões tomadas em instantes de tempo anteriores ao atual, as decisões futuras relativas ao estado, ao qual as decisões passadas levaram, tem que ser escolhidas de forma ótima.

¹Note que problemas de maximização também podem sempre ser formulados deste modo.

²Veja, e.g., [BeDr], Secção 1.11.

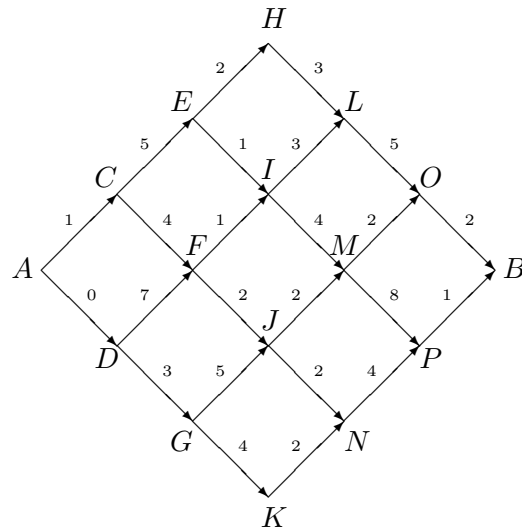
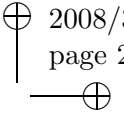
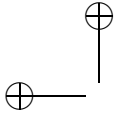


Figura 11.1: Mapa da cidade com ruas de mão única.

Em outras palavras, o modo de escolher a estratégia ótima de controle independe tanto das decisões tomadas em tempos anteriores, quanto dos respectivos estados atravessados pelo sistema até o tempo atual.

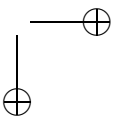
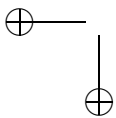
Uma análise detalhada do princípio de Bellman é apresentada na Seção 12.2. Nas seções a seguir, o formalismo da programação dinâmica é introduzido através da investigação de alguns exemplos de grande aplicabilidade. O leitor interessado encontra em [BeDr] várias outras aplicações a problemas discretos.

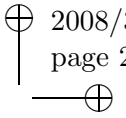
11.2 Problema do Caminho Simples

Suponha que numa cidade imaginária as ruas (todas de mão única) estejam dispostas de acordo com a configuração mostrada na Figura 11.1.

Cada letra representa uma esquina e os números representam o custo (tempo, combustível, ...) para se utilizar a respectiva rua. O nosso objetivo é encontrar o caminho de A até B que possua o menor custo associado possível.

O método mais simples de resolver o problema é enumerar todos os caminhos possíveis e comparar os custos totais de cada caminho. Analisemos o esforço computacional necessário para executar este método:





- Existem 20 diferentes caminhos de A até B .³ De fato, de H a B existe um único caminho e ídem de K a B . De I a B existem 3 caminhos e ídem de J a B . Logo, existem 4 caminhos de E a B , 4 caminhos de G a B e 6 caminhos de F a B . Então, existem 10 caminhos de C a B e 10 caminhos de D a B .
- Para cada caminho realizamos 5 somas, a fim de computar o custo total.
- Precisamos ainda de 19 comparações para encontrar o menor custo.

Utilizando o princípio de otimalidade desenvolvemos agora a idéia da programação dinâmica.

- Um caminho ótimo de A até B passa obrigatoriamente ou por C ou por D .
- Se P_c é um caminho ótimo de C até B de custo p_c e P_d é um caminho ótimo de D até B de custo p_d , é possível determinar o caminho ótimo de A até B somando a p_c o custo da rua de A a C , somando a p_d o custo da rua de A a D e escolhendo a menor das duas somas.

Desta forma o caminho ótimo fica estabelecido. Observe que o procedimento acima descrito é baseado no princípio de Bellman:

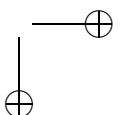
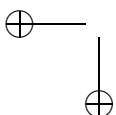
Uma vez descoberto o caminho até C (ou D), determine o restante do caminho de modo que este seja ótimo de C (ou D) até B .

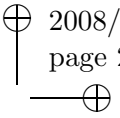
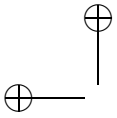
Seja $V(Q_1, Q_2)$ o custo do caminho ótimo de Q_1 a Q_2 e $d(Q_1, Q_2)$ o custo da rua unindo Q_1 e Q_2 . De acordo com o princípio de otimalidade temos:

$$V(A, B) = \min\{V(C, B) + d(A, C); V(D, B) + d(A, D)\}.$$

Note que $v(C, B)$ e $v(D, B)$ são ainda desconhecidos. Para calculá-los precisamos conhecer os caminhos ótimos de C a B e de D a B , respectivamente. Para isso aplicamos recursivamente o princípio de otimalidade.

³No final da secção, mostramos que o número de caminhos é dado pela combinação $\binom{6}{3}$.





Os próximos valores que precisamos são os de $V(E, B)$ e $V(F, B)$. A partir deles calculamos

$$V(C, B) = \min\{V(E, B) + d(C, E); V(F, B) + d(C, F)\},$$

$$V(D, B) = \min\{V(F, B) + d(D, F); V(G, B) + d(D, G)\}.$$

Prosseguindo desta forma chegamos finalmente a

$$V(M, B) = \min\{V(O, B) + d(M, O); V(P, B) + d(M, P)\}.$$

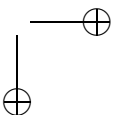
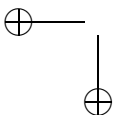
Mas $V(O, B) = d(O, B)$ e $V(P, B) = d(O, P)$ são conhecidos. Sendo assim, podemos calcular os caminhos ótimos de trás para frente, simplesmente calculando os valores da função $V(\cdot, \cdot)$.

Temos então para o exemplo numérico da Figura 11.1:

- $V(O, B) = 2, V(P, B) = 1;$
- $V(L, B) = 5 + 2 = 7, V(N, B) = 4 + 1 = 5, V(M, B) = \min\{2 + 2, 1 + 8\} = 4$
(i.e., quando o caminho ótimo passa por M ele tem que continuar por O);
- $V(H, B) = 3 + 5 + 2 = 10, V(K, B) = 2 + 4 + 1 = 7,$
 $V(J, B) = \min\{4 + 2, 5 + 2\} = 6$ (caminho $JM\dots$),
 $V(I, B) = \min\{7 + 3, 4 + 4\} = 8$ (caminho $IM\dots$);
- $V(E, B) = \min\{10 + 2, 8 + 1\} = 9$ (caminho $EI\dots$),
 $V(F, B) = \min\{8 + 1, 6 + 2\} = 8$ (caminho $FJ\dots$),
 $V(G, B) = \min\{6 + 5, 7 + 4\} = 11$ (caminho $GJ\dots$ ou $GK\dots$);
- $V(C, B) = \min\{9 + 5, 8 + 4\} = 12$ (caminho $CF\dots$),
 $V(D, B) = \min\{8 + 7, 11 + 3\} = 14$ (caminho $DG\dots$);
- $V(A, B) = \min\{12 + 1, 14 + 0\} = 13$ (caminho $AC\dots$).

O caminho ótimo de A a B é então: $A-C-F-J-M-O-B$ e o custo mínimo é $V(A, B) = 13$.

Em contraposição a um método usual de minimização definido no conjunto dos caminhos viáveis de A até B (por exemplo um método iterativo), o procedimento acima não fornece nenhuma solução aproximada antes do término de todos os cálculos. Findos os cálculos, observamos



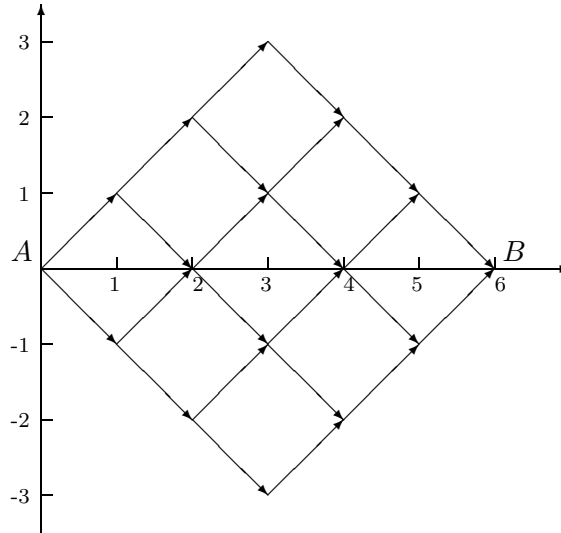
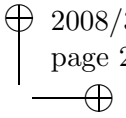


Figura 11.2: Cidade projetada sobre sistema de coordenadas.

que este método nos fornece muito mais do que simplesmente o caminho ótimo de A até B . Podemos calcular de forma direta o caminho ótimo de qualquer ponto até B e ainda sabemos *a priori* qual o custo ótimo (dado por $V(\cdot, B)$).

Por exemplo, o custo do caminho ótimo de E a B é $V(E, B) = 9$ e o caminho ótimo é: $E-I-M-O-B$.

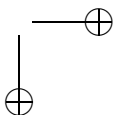
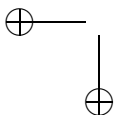
Este problema pode ser ainda analisado de outra forma. Considere a nossa *cidade* projetada sobre um plano coordenado, onde os pontos A e B correspondem às coordenadas $(0, 0)$ e $(6, 0)$, respectivamente, conforme mostrado na Figura 11.2. Em cada ponto existem 2 direções possíveis a seguir: nordeste (u) e sudeste (d). Usamos a seguinte notação para representá-las:

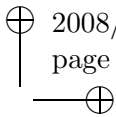
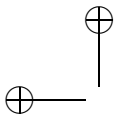
$$(x, y) \xrightarrow{u} (x + 1, y + 1) ; \text{ custo: } c_u(x, y),$$

$$(x, y) \xrightarrow{d} (x + 1, y - 1) ; \text{ custo: } c_d(x, y).$$

Definimos então a *função valor ótimo*

$$V(x, y) := \text{Custo do caminho ótimo de } (x, y) \text{ até } (6, 0).$$





Note que podemos estender a definição das funções c_u , c_d e V a todo \mathbb{Z}^2 . Basta definir o custo de ruas não existentes na cidade como ∞ . Desta forma, podemos usar a notação acima para definir recursivamente a função valor ótimo:

$$V(x, y) = \min\{c_u(x, y) + V(x + 1, y + 1); c_d(x, y) + V(x + 1, y - 1)\},$$

$$(x, y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Esta equação é denominada *equação de otimalidade*. Exigimos ainda que a *condição de contorno* $V(6, 0) = 0$ seja satisfeita. Note que o custo de viajar de $(6, 0)$ a $(6, 0)$ é zero, pois o destino já foi alcançado.

Consideremos agora uma formulação mais geral do nosso problema. Suponha que para chegar de A até B tenhamos que passar por N ruas (onde N é par). Um caminho pode ser representado por uma palavra de N letras pertencentes ao conjunto $\{u, d\}$. O número de letras u e d tem que ser o mesmo, para que o caminho leve de A a B , portanto o número de caminhos admissíveis de A a B é igual ao número de palavras constituídas por $N/2$ u 's e $N/2$ d 's (podemos nos concentrar apenas na posição dos u 's, pois as demais posições são obviamente preenchidas por d 's). Logo, o número de caminhos viáveis é dado por $\binom{N}{N/2}$. Podemos agora comparar o esforço computacional de realizar os métodos de enumeração+comparação e de programação dinâmica.

Pelo método de comparação, realizamos $\binom{N}{N/2} (N - 1)$ somas e $\binom{N}{N/2} - 1$ comparações. Com a Programação Dinâmica são necessárias $2(N - 1) + (N/2)^2$ adições e $(N/2)^2$ comparações. Por exemplo, para $N = 20$ a programação dinâmica requer 220 adições e 100 comparações, enquanto que pela enumeração+comparação precisamos de mais de 3×10^6 somas e 184.000 comparações. Quanto maior a dimensão do problema, maior a vantagem da programação dinâmica.

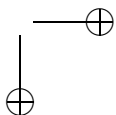
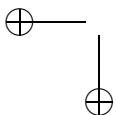
Outra variante do problema é encontrar além do caminho ótimo de A até B também os caminhos ótimos de A até os demais pontos da cidade. Para tanto, consideramos uma outra função valor ótimo.

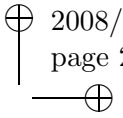
$$V(x, y) := \text{Custo do caminho ótimo de } (0, 0) \text{ até } (x, y).$$

A função V é calculada recursivamente pela equação de otimalidade

$$V(x, y) = \min\{c_u(x - 1, y - 1) + V(x - 1, y - 1);$$

$$c_d(x - 1, y + 1) + V(x - 1, y + 1)\},$$





e pela condição de contorno $V(0, 0) = 0$.

Observação 191. O método de programação dinâmica para problemas de otimização está relacionado à tríade:

Função valor, Equação de otimalidade, Condições de contorno.

□

11.3 Problema da Substituição de Equipamento

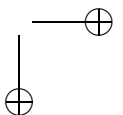
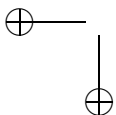
Analisamos nesta secção um problema semelhante ao discutido na Secção 11.2. Este, entretanto, é mais realista. Comum aos dois problemas é o fato que, a cada intervalo de tempo, apenas duas alternativas de decisão são possíveis.

Consideramos aqui o problema de substituição de apenas um equipamento (ex. carro, trator, ...) que se deteriora com o tempo. Nossa tarefa é decidir quando trocá-lo por um novo. Suponha que precisamos possuir tal equipamento pelos próximos N anos (ou outra unidade de tempo qualquer) e que o custo de operar o equipamento por um ano é dado exclusivamente em função da idade do mesmo. Sempre que o equipamento se torna intoleravelmente velho, precisamos substituí-lo. Nesse momento, pagamos um valor fixo pelo equipamento novo e recebemos uma determinada quantia pela venda do equipamento usado, a qual depende somente da idade desse equipamento.

Para formular o problema precisamos conhecer a duração total N do processo, a idade da máquina original que possuímos no tempo $k = 0$ e ainda:

- $c(k)$ = custo de operação por um ano de um equipamento de idade k ;
- p = preço de um equipamento novo;
- $v(k)$ = valor de venda de um equipamento com k anos de uso;
- $r(k)$ = valor de resgate recebido por um equipamento que completa k anos de uso no ano $N + 1$.

Temos que decidir a cada ano se devemos ou não substituir o equipamento atual, de modo a minimizar o custo total no período de N anos.



Temos então a seguinte formulação via programação dinâmica:
Função valor ótimo:

$V(k, y) :=$ Custo mínimo de possuir um equipamento do ano k ao ano N , quando no ano k possuímos um equipamento de y anos de uso.

Equação de otimalidade:

$$V(k, y) = \min \{p - v(x) + c(0) + V(k + 1, 1); c(x) + V(k + 1, x + 1)\}.$$

Condição de contorno:

$$V(N + 1, x) = -r(x).$$

Note que o primeiro termo na equação de otimalidade corresponde à compra de um novo equipamento no ano k , enquanto o segundo termo representa a manutenção do equipamento durante esse ano. A condição de contorno significa que um *rabate* (custo negativo) de $r(x)$ é obtido quando possuímos ao final do processo um equipamento que completa x anos no ano $N + 1$.

Exemplo 192. Considere o problema da substituição de equipamento com os seguintes dados: $N = 5$, $y = 2$, $p = 50$. As funções c , v e r são dadas na tabela abaixo.

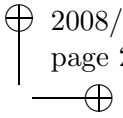
ano	0	1	2	3	4	5	6
c	10	13	20	40	70	100	100
v		32	21	11	5	0	0
r		25	17	8	0	0	0

As condições de contorno são:⁴

$$V(6, 1) = -25, \quad V(6, 2) = -17, \quad V(6, 3) = -8,$$

$$V(6, 4) = V(6, 5) = V(6, 7) = 0.$$

⁴Note que os estados finais que podem ser alcançados a partir de $(0, y)$ são os da forma (x, N) para $x \in \{0, \dots, N, y + N\}$.



A partir daí temos:

$$\begin{aligned}
 V(5, 1) &= \min\{50 - 32 + 10 + V(6, 1); 13 + V(6, 2)\} = -4 && \text{(manter),} \\
 V(5, 2) &= \min\{50 - 21 + 10 + V(6, 1); 20 + V(6, 3)\} = 12 && \text{(manter),} \\
 V(5, 3) &= \min\{24; 40\} = 24 && \text{(comprar),} \\
 V(5, 4) &= \min\{30; 70\} = 30 && \text{(comprar),} \\
 V(5, 6) &= \min\{35; 100\} = 35 && \text{(comprar);} \\
 V(4, 1) &= \min\{28 + V(5, 1); 13 + V(5, 2)\} = 24 && \text{(comprar),} \\
 V(4, 2) &= \min\{35; 44\} = 35 && \text{(comprar),} \\
 V(4, 3) &= \min\{45; 70\} = 45 && \text{(comprar),} \\
 V(4, 5) &= \min\{56; 135\} = 56 && \text{(comprar);}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(3, 1) &= \min\{52; 48\} = 48 && \text{(manter),} \\
 V(3, 2) &= \min\{63; 65\} = 63 && \text{(comprar),} \\
 V(3, 4) &= \min\{79; 126\} = 79 && \text{(comprar);} \\
 V(2, 1) &= \min\{76; 76\} = 76 && \text{(comprar} \\
 &&& \text{ou manter),} \\
 V(2, 3) &= \min\{97; 119\} = 97 && \text{(comprar);} \\
 V(1, 2) &= \min\{115; 117\} = 115 && \text{(comprar).}
 \end{aligned}$$

Temos então as estratégias ótimas: C-C-M-C-M ou C-M-C-C-M, onde C = comprar e M = manter. Calculando diretamente o custo das estratégias, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{custo}(CCMCM) &= p - v(2) + c(0) + p - v(1) + c(0) + c(1) + \\
 & p - v(2) + c(0) + c(1) - r(2) = 115,
 \end{aligned}$$

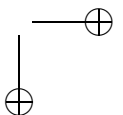
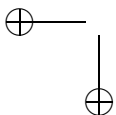
$$\begin{aligned}
 \text{custo}(CMCCM) &= p - v(2) + c(0) + c(1) + p - v(2) + c(0) + \\
 & p - v(1) + c(0) + c(1) - r(2) = 115,
 \end{aligned}$$

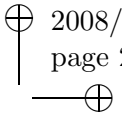
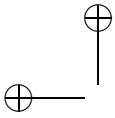
ratificando nossa conclusão.

□

11.4 Problema do Caixeiro Viajante

Consideramos um grafo com N vértices (representando cidades). As cidades são enumeradas arbitrariamente de 1 a N e denotamos por d_{ij} o tempo de viagem (distância, custo, ...) para ir da cidade i à cidade j . Um caixeiro viajante deseja sair da cidade 1, percorrer cada uma das





outras cidades exatamente uma vez e retornar por fim à cidade 1 (tal caminho é denominado *tour*).

O problema que se põe é encontrar o *tour* mais curto para o caixeiro viajante. Defina para tanto $N_j := \{2, \dots, j - 1, j + 1, \dots, N\}$, para $j = 2, \dots, N$. Para cada $j = 2, \dots, N$, $i = 1, \dots, N - 2$, e $M \subset N_j$, subconjunto com exatamente i elementos, definimos

(11.1)

$V(i, j, m) :=$ Comprimento do caminho mais curto da cidade 1 à cidade j atravessando exatamente as i cidades de M

como função valor ótimo. Como equação de otimalidade, escolhemos:

$$(11.2) \quad V(i, j, M) = \min_{k \in M} \{V(i - 1, k, M \setminus \{k\}) + d_{kj}\};$$

e como condição de contorno, tomamos:

$$V(0, j, \emptyset) = d_{1j}, \quad j = 2, \dots, N.$$

Calculando recursivamente, obtemos como solução

$$(11.3) \quad \min_{j \in \{2, \dots, N\}} \{V(N - 2, j, N_j) + d_{j1}\}.$$

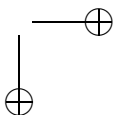
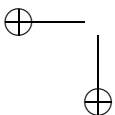
O valor de j que minimiza a expressão em (11.3) corresponde à última cidade percorrida no *tour* ótimo antes de retornar à cidade 1. Verificamos heurísticamente a validade da equação de otimalidade, das condições de contorno e da função valor ótimo através de argumento indutivo.

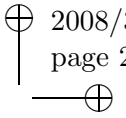
A verificação do caso $i = 1$ fica a cargo do leitor (basta usar as condições de contorno). Seja $i > 1$ e suponha que queremos calcular $V(i, j, M)$. Considere o caminho mais curto da cidade 1 à cidade j via cidades de M e seja $k \in M$ a última cidade de M que é percorrida por este caminho. Como as cidades de $M \setminus \{k\}$ tem que ser percorridas de forma ótima, o comprimento deste sub-caminho é $V(i - 1, k, M \setminus \{k\})$ e o comprimento do caminho original é $V(i - 1, k, M \setminus \{k\}) + d_{kj}$. Isto garante que

$$V(i, j, M) \geq \min_{k \in M} \{V(i - 1, k, M \setminus \{k\}) + d_{kj}\}.$$

A desigualdade oposta segue da definição de V em (11.1).

A fim de calcular o caminho mais curto, calculamos inicialmente $V(1, \cdot, \cdot)$ a partir da condição inicial $V(0, \cdot, \emptyset)$. Então, calculamos $V(2, \cdot, \cdot)$





a partir de $V(1, \cdot, \cdot)$ e assim por diante até chegarmos a $V(N - 2, j, N_j)$, $j = 1, \dots, N$ (compare com (11.3)). O *tour* ótimo é calculado de trás para frente.

Exemplo 193. Considere o problema do caixeiro viajante com 4 cidades cujas distâncias são dadas na tabela abaixo.

$i \times j$	1	2	3	4
1	0	3	1	5
2	1	0	5	4
3	5	4	0	2
4	3	1	3	0

Temos então as condições de contorno:

$$V(0, 2, \emptyset) = d_{12} = 3, \quad V(0, 3, \emptyset) = d_{13} = 1, \quad V(0, 4, \emptyset) = d_{14} = 5.$$

A partir da equação de otimalidade, calculamos agora:

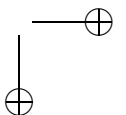
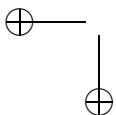
$$\begin{aligned} V(1, 2, \{3\}) &= V(0, 3, \emptyset) + d_{32} = 1 + 4 = 5 \quad (3), \\ V(1, 2, \{4\}) &= 5 + 1 = 6 \quad (4), \\ V(1, 3, \{2\}) &= 3 + 5 = 8 \quad (2), \\ V(1, 3, \{4\}) &= 5 + 3 = 8 \quad (4), \\ V(1, 4, \{2\}) &= 3 + 4 = 7 \quad (2), \\ V(1, 4, \{3\}) &= 1 + 2 = 3 \quad (3); \\ V(2, 2, \{3, 4\}) &= \min\{V(1, 3, \{4\}) + d_{32}; V(1, 4, \{3\}) + d_{42}\} \\ &= \min\{8 + 4; 3 + 1\} = 4 \quad (4), \\ V(2, 3, \{2, 4\}) &= \min\{V(1, 2, \{4\}) + d_{23}; V(1, 4, \{2\}) + d_{43}\} \\ &= \min\{6 + 5; 7 + 3\} = 10 \quad (4), \\ V(2, 4, \{2, 3\}) &= \min\{V(1, 2, \{3\}) + d_{24}; V(1, 3, \{2\}) + d_{34}\} \\ &= \min\{5 + 4; 8 + 2\} = 9 \quad (2), \end{aligned}$$

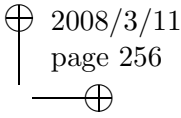
Por fim, obtemos o comprimento do *tour* ótimo

$$\min_{j \in \{2, 3, 4\}} \{V(3, j, \{2, 3, 4\} \setminus \{j\}) + d_{j1}\} = \min\{4+1, 10+5, 9+3\} = 5 \quad (2).$$

A última cidade do *tour* (antes de retornar à 1) é portanto a cidade 2. Como o mínimo no cálculo de $V(2, 2, \{3, 4\})$ é obtido para $j = 4$, esta é a penúltima cidade. A antepenúltima só pode ser a cidade 3. O *tour* ótimo é portanto: 1-3-4-2-1.

□





Analisemos agora o esforço computacional para realizar esta estratégia de programação dinâmica. A cada estágio i , o valor de $V(i, j, M)$ tem de ser calculado para $(N - 2) \binom{N-2}{i}$ diferentes pares j, M . Cada um desses cálculos exige i somas e $i - 1$ comparações. Somando sobre todos os estágios $i = 1, \dots, N - 2$ obtemos:

$$\text{Adições: } (N - 1)(N - 2)2^{N-3},$$

$$\text{Comparações: } (N - 1) \sum_{i=1}^{N-2} (i - 1) \binom{N-2}{i} \approx (N - 1)(N - 4)2^{N-3}.$$

(Note que desconsideramos as últimas $(N - 1)$ adições e $(N - 2)$ comparações a fim de calcular o comprimento do *tour* ótimo.) Sendo assim, o número de operações cresce de forma exponencial e não polinomial.

A estratégia vista aqui não é a mais eficiente conhecida. A busca por algoritmos rápidos representa um extenso ramo de pesquisa atualmente. Nossa estratégia requer para um problema com 20 cidades algo em torno de 85×10^6 operações.

Note ainda que a quantidade de memória necessária para execução do algoritmo é um problema extra. Se $N \leq 256$, precisa-se, para cada i , de $(N - 1) \binom{N-2}{i}$ Bytes para armazenar os valores de $V(1, \cdot, \cdot)$. Por exemplo, para $N = 20$, precisa-se de aproximadamente 925 KB para armazenar $V(9, \cdot, \cdot)$ e para $N = 100$ são necessários 2.3×10^{21} GB para armazenar $V(50, \cdot, \cdot)$.

11.5 Problema Linear-Quadrático Discreto

Considere o sistema discreto

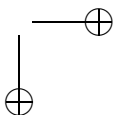
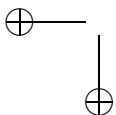
$$(11.4) \quad z_{k+1} = Az_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

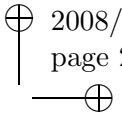
e a função objetivo

$$(11.5) \quad J(z, u) := \frac{1}{2} [\langle z_N, Sz_N \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} (\langle z_k, Qz_k \rangle + \langle u_k, Ru_k \rangle)],$$

onde $z_k \in \mathbb{R}^n, k = 0, \dots, N$, $u_k \in \mathbb{R}^m, k = 0, \dots, N - 1$ e as matrizes $S \in \mathbb{R}^{n,n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, $R \in \mathbb{R}^{m,m}$. São dadas ainda as condições iniciais

$$(11.6) \quad z_0 = z^0 \in \mathbb{R}^n.$$





O problema que analisamos é:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) \\ \text{sujeito as restrições} \\ (11.4) \text{ e } (11.6). \end{cases}$$

Fazemos ainda as seguintes hipóteses sobre as matrizes do problema: S e R são positivas definidas; Q é positiva semi-definida.

A condição $R > 0$ reflete o fato de não impormos nenhuma restrição às variáveis de controle ($u \in \mathbb{R}^m$). Ela significa que o fato de exercer uma estratégia qualquer de controle está associado a um custo.

Quando consideramos o problema sob a óptica da programação dinâmica, escolhemos a função valor ótimo

$$V(k, x) := \min\{J_k(z, u) \mid (z, u) \in Z_k(x) \times \mathbb{R}^{(N-k)m}\},$$

onde

$$J_k(z, u) := \frac{1}{2}[\langle z_N, Sz_N \rangle + \sum_{j=k}^{N-1} (\langle z_j, Qz_j \rangle + \langle u_j, Ru_j \rangle)],$$

$$Z_k(x) := \{z \in \mathbb{R}^{(N-k+1)n} \mid z_k = x, z_{j+1} = Az_j + Bu_j, j = k, \dots, N-1\};$$

a equação de otimalidade

$$V(k, x) = \min\{V(k+1, Ax + Bu) + \frac{1}{2}(\langle x, Qx \rangle + \langle u, Ru \rangle) \mid u \in \mathbb{R}^m\};$$

e as condições de contorno

$$V(N, x) = \frac{1}{2}\langle x, Sx \rangle.$$

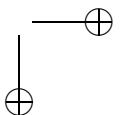
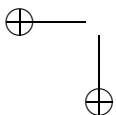
Observe que a equação de otimalidade pode ser resolvida recursivamente ($k = N - 1, \dots, 1$), pois as aplicações envolvidas em sua definição são diferenciáveis e em cada passo k temos que resolver um problema de minimização convexo (para o qual as condições necessárias para existência de solução são também suficientes).

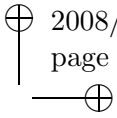
Consideremos o caso $k = N - 1$. Temos

(11.7)

$$V(N - 1, x)$$

$$= \min\left\{\frac{1}{2}(\langle (Ax + Bu), S(Ax + Bu) \rangle + \langle x, Qx \rangle + \langle u, Ru \rangle) \mid u \in \mathbb{R}^m\right\}.$$





Como R e S são positivas definidas, uma condição necessária e suficiente para que u_{N-1} seja mínimo de (11.7) é que satisfaça

$$Ru + B^*S(Ax + Bu) = 0.$$

Resolvendo esta equação para u , obtemos

$$u_{N-1}^* := -(B^*SB + R)^{-1}B^*SAx.$$

A fim de executar o cálculo recursivamente, definimos as matrizes $S_N := S$,

$$K_{N-1} := -(B^*SB + R)^{-1}B^*SA,$$

$$S_{N-1} := (A - BK_{N-1})^*S_N(A - BK_{N-1}) + K_{N-1}^*RK_{N-1} + Q.$$

Podemos então escrever

$$u_{N-1}^* = K_{N-1}x, \quad V(N-1, x) = \frac{1}{2}\langle x, S_{N-1}x \rangle.$$

Podemos repetir o raciocínio para o passo $k = N-2$ (apartir de $N-1$), bastando para isso que troquemos S_N por S_{N-1} . Da mesma forma procedemos para os passos $k = N-3, \dots, 0$, obtendo assim a função valor ótimo para cada passo. Escrevendo na forma de algoritmo, temos:

$$S_N := S;$$

para $k = N-1, \dots, 0$ calcule

$$K_k := (B^*S_{k+1}B + R)^{-1}B^*S_{k+1}A;$$

$$S_k := (A - BK_k)^*S_{k+1}(A - BK_k) + K_k^*RK_k + Q;$$

Uma vez calculadas as matrizes K_k e S_k , a tarefa de encontrar a estratégia ótima de controle fica bastante simples. Basta executar o algoritmo:

$$z_0 := z^0;$$

$$V(0, z_0) := \frac{1}{2}\langle z_0, S_0z_0 \rangle;$$

para $k = 0, \dots, N-1$, calcule

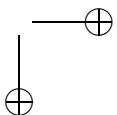
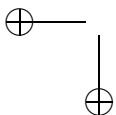
$$u_k := -K_kz_k;$$

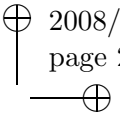
$$z_{k+1} := Az_k + Bu_k;$$

$$V(k+1, z_{k+1}) := \frac{1}{2}\langle z_{k+1}, S_{k+1}z_{k+1} \rangle;$$

e obtemos o controle ótimo (u_0, \dots, u_{N-1}) , a trajetória ótima (z_0, \dots, z_N) e o custo mínimo $V(0, z_0)$.

Observação 194. O método acima fornece mais informação do que procurávamos inicialmente. O controle ótimo é obtido na forma de controle de realimentação a partir das matrizes de ganho K_k . Para diferentes valores iniciais z^0 , podemos encontrar a estratégia ótima, bastando





para isso executar o algoritmo acima (na verdade podemos descobrir a trajetória ótima a partir de qualquer $z \in \mathbb{R}^n$ e passo k). O custo mínimo é conhecido a cada passo k e dado por $V(k, z_k)$. \square

Abordamos agora o problema formulado com duas condições de contorno (nos tempos $k = 0$ e $k = N$). Considere o seguinte problema de controle:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (\langle z_k, Qz_k \rangle + \langle u_k, Ru_k \rangle) \\ \text{sujeito a} \\ z_{k+1} = Az_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad z_0 = z^0, \quad z_N = z^N \end{cases},$$

onde $z_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $R \in \mathbb{R}^{m,m}$. Observe que substituímos a penalidade $1/2 \langle z_N, Sz_N \rangle$ no funcional anterior pela condição de contorno $z_N = z^N$. Supomos agora s.p.g. que $z^N = 0$. Sob o ponto de vista da programação dinâmica, temos a tríade formada por: função valor ótimo

$$V(k, x) := \min\{J_k(z, u) \mid (z, u) \in Z_k(x) \times \mathbb{R}^{(N-k)m}\},$$

onde

$$J_k(z, u) := \frac{1}{2} \sum_{j=k}^{N-1} (\langle z_j, Qz_j \rangle + \langle u_j, Ru_j \rangle),$$

$$Z_k(x) := \{z \in \mathbb{R}^{(N-k+1)n} \mid z_k = x, z_{j+1} = Az_j + Bu_j, j = k, \dots, N-1\};$$

equação de otimalidade

$$V(k, x) = \min\{V(k+1, Ax + Bu) + \frac{1}{2}(\langle x, Qx \rangle + \langle u, Ru \rangle) \mid u \in \mathbb{R}^m\};$$

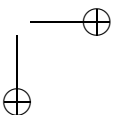
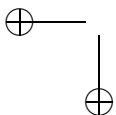
condições de contorno

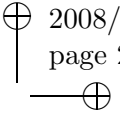
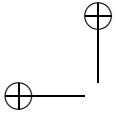
$$V(N, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \infty, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}.$$

Repetindo a construção feita anteriormente, temos:

$$V(N-1, x) = \frac{1}{2} \langle x, S_{N-1}x \rangle,$$

sempre que o estado $z^N = 0$ for atingível a partir de x . Sendo assim, podemos tratar este problema com o mesmo algoritmo já visto para o problema com apenas uma condição de contorno.





11.6 Problema de Decisões Consecutivas

Iniciamos a secção analisando um modelo genérico para problemas discretos de decisões consecutivas, nos quais a função objetivo permite a abordagem via programação dinâmica. A seguir apresentamos um resultado que garante existência e unicidade de soluções para o modelo. Problemas Markovianos de decisões consecutivas são tratados em [Pi], onde em particular é analisado o algoritmo de Howard.

Descrição do Modelo

Suponha que um determinado processo evolui em intervalos de tempo discretos $t = j \in \{0, 1, \dots, N + 1\}$ e que, a cada instante de tempo j , o estado seja representado por $z_j \in \mathbb{R}^n$. O vetor de decisões (ou controle) é representado por $v_j \in \Omega_j \subset \mathbb{R}^m$, $j \in 0, \dots, N$, de modo que a evolução da variável de estado é descrita por:

$$z_{j+1} = T_j(z_j, v_j), \quad j \in 0, \dots, N,$$

onde o estado inicial z_0 e as funções T_j que descrevem a dinâmica do sistema são conhecidos. Suponha ainda que as decisões tenham que ser tomadas de forma a minimizar a função objetivo (custos)

$$g(z_0, \dots, z_{N+1}, v_0, \dots, v_N) := \sum_{j=0}^N l_j(z_j, z_{j+1}, v_j).$$

Para funções objetivo dessa forma é possível abordar o problema através da programação dinâmica. Temos:

Função valor ótimo:

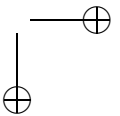
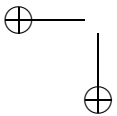
$$V(j, z) := \min \left\{ \sum_{k=j}^N l_k(z_k, z_{k+1}, v_k) \mid z_j = z, z_{k+1} = T_k(z_k, v_k), v_k \in \Omega_k, k = j, \dots, N \right\}.$$

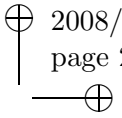
Equação de otimalidade:

$$V(j, z) = \min_v \{ V(j + 1, T_j(z, v)) + l_j(z, T_j(z, v), v) \}.$$

Condições de contorno:

$$V(N + 1, z) = 0, \quad z \in Z_{ad}.$$





A tarefa que se impõe é descobrir $V(0, z_0)$.

Processos particularmente interessantes são aqueles em que as funções T_j e l_j são constantes (processos estacionários), i.e., $T_j = T$ e $l_j = l, \forall j$. Neste caso, uma alternativa para descobrir a função valor ótimo é analisar a equação funcional

$$(11.8) \quad f(z) = \min_v \{ f(T(z, v)) + l(T(z, v), v) \},$$

a qual é satisfeita por $\tilde{V}(z) := \lim_{j \rightarrow \infty} V(j, z)$, caso o limite exista para todo z .

Exemplo 195 (Investimento de Capital). Suponha que no início do ano dispomos de um capital de z US-dólares, o qual pode ser aplicado em duas atividades produtivas que geram no final do ano os lucros $g_1(z)$ e $g_2(z)$, respectivamente. A variável de decisão v corresponde à fração de z investida na primeira atividade. Logo, o lucro no final do ano é dado pela expressão

$$g_1(zv) + g_2(z(1 - v)),$$

onde $v \in [0, 1] = \Omega$. Suponha ainda que associado à aplicação do capital estejam determinados custos como propaganda, impostos, ...). Deste modo, ao final do ano temos a disposição apenas o capital

$$\bar{z} := \alpha v z + \beta z(1 - v),$$

onde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ são dados. Consideramos o processo ao longo de N anos, tendo um capital inicial de z_0 US-dólares. O objetivo é maximizar o lucro (minimizando para isto o lucro negativo). Definimos

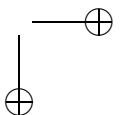
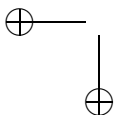
$$T(z, v) := \alpha v + \beta(z - v) \quad \text{e} \quad l(z, v) := -g_1(zv) - g_2(z(1 - v)),$$

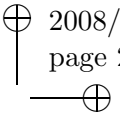
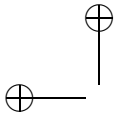
obtendo assim a função valor ótimo:

$$\begin{aligned} V(j, z) &:= \min \left\{ \sum_{k=j}^N l(z_k, v_k) \mid z_j = z, z_{k+1} \right. \\ &= T(z_k, v_k), v_k \in [0, 1], k = j, \dots, N \left. \right\} \end{aligned}$$

e a equação de otimalidade:

$$V(j, z) = \min_v \{ V(j + 1, T(z, v)) + l(z, v) \}.$$





Observe que a equação (11.8) se escreve como

$$f(z) = (F(f))(z) := \min_{v \in [0,1]} \{ f(\alpha v z + \beta z(1-v)) - g_1(zv) - g_2(z(1-v)) \}$$

para este exemplo. □

Um Teorema de Existência

Dados os conjuntos $Z_{ad} \subset \mathbb{R}^n$ e $U_{ad} \subset \mathbb{R}^m$ respectivamente dos estados e decisões admissíveis, considere a equação funcional

$$(11.9) \quad f(z) = \min_{u \in U_{ad}} \{ \chi(z, u) f(T(z, u)) + \phi(z, u) \}, \quad z \in Z_{ad},$$

onde $\chi, \phi : Z_{ad} \times U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$, $T : Z_{ad} \times U_{ad} \rightarrow Z_{ad}$ são dados e $f : Z_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ é a incógnita. A existência de soluções para equação (11.9) é garantida pelo seguinte resultado:

Teorema 196. *Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

U_{ad} é compacto, $Z_{ad} \subset \bar{B}_\delta(0)$ é fechado, $0 \in Z_{ad}$;

$T(\cdot, u)$ é contínua, uniformemente em $u \in U_{ad}$ e existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que

$$(11.10) \quad |T(z, u)| \leq \alpha |z|, \quad \forall (z, u) \in Z_{ad} \times U_{ad};$$

$\chi(\cdot, u)$ é contínua, uniformemente em $u \in U_{ad}$ e

$$(11.11) \quad |\chi(z, u)| \leq 1, \quad \forall (z, u) \in Z_{ad} \times U_{ad};$$

$\phi(\cdot, u)$ é contínua, uniformemente em $u \in U_{ad}$ e

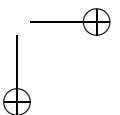
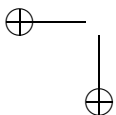
$$(11.12) \quad \phi(0, u) = 0 \quad \text{para todo } u \in U_{ad};$$

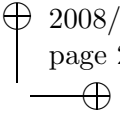
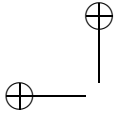
$$(11.13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\alpha^n \delta) < \infty, \quad \text{onde } h(r) := \max_{z \in Z_{ad}, |z| \leq r} \max_{u \in U_{ad}} |\phi(z, u)|, \quad 0 \leq r \leq \delta.$$

Então existe uma única aplicação contínua $f : Z_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $f(0) = 0$ e (11.9).

Demonstração: Um desenvolvimento análogo ao apresentado na primeira parte desta secção nos permite escrever a equação (11.9) como uma





equação de ponto fixo. Construímos agora nossa solução através da iteração de ponto fixo:

$$\begin{aligned}
 f_0(z) &:= \min_{u \in U_{ad}} \phi(z, u), \quad z \in Z_{ad}; \\
 (11.14) \quad f_{n+1}(z) &:= \min_{u \in U_{ad}} \{ \chi(z, u) f_n(T(z, u)) + \phi(z, u) \}, \quad z \in Z_{ad}.
 \end{aligned}$$

Mostramos inicialmente que, para $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade:

$$(11.15) \quad \max_{z \in Z_{ad}, |z| \leq r} |f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq \max_{z \in Z_{ad}, |z| \leq \alpha r} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|.$$

Para $n = 1$: tome $z \in Z_{ad}$.

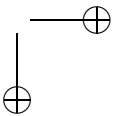
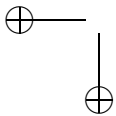
Sejam $u_1, u_2 \in U_{ad}$ tais que $f_i(z) = \{ \chi(z, u_i) f_{i-1}(T(z, u_i)) + \phi(z, u_i) \}$, $i = 1, 2$. A existência de u_1, u_2 é garantida pela compacidade de U_{ad} e pela continuidade de f_0 e f_1 . Temos então:

$$\begin{aligned}
 f_2(z) - f_1(z) &\leq \underbrace{\chi(z, u_1) f_1(T(z, u_1)) + \phi(z, u_1)}_{\geq f_2(z)} \\
 &\quad - \underbrace{[\chi(z, u_1) f_0(T(z, u_1)) + \phi(z, u_1)]}_{= f_1(z)} \\
 &= \chi(z, u_1) [f_1(T(z, u_1)) - f_0(T(z, u_1))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(z) - f_1(z) &\geq \underbrace{\chi(z, u_2) f_1(T(z, u_2)) + \phi(z, u_2)}_{= f_2(z)} \\
 &\quad - \underbrace{[\chi(z, u_2) f_0(T(z, u_2)) + \phi(z, u_2)]}_{\geq f_1(z)} \\
 &= \chi(z, u_2) [f_1(T(z, u_2)) - f_0(T(z, u_2))]
 \end{aligned}$$

Portanto, para $z \in Z_{ad}$ com $|z| \leq r$, temos de (11.10) e (11.11)

$$\begin{aligned}
 |f_2(z) - f_1(z)| &\leq \max_{u \in U_{ad}} |\chi(z, u)| |f_1(T(z, u)) - f_0(T(z, u))| \\
 &\leq \max_{\substack{z \in Z_{ad} \\ |z| \leq \alpha r}} |f_1(z) - f_0(z)|.
 \end{aligned}$$



Para $n > 1$, a verificação é feita de forma análoga, ficando assim provada a desigualdade (11.15). Observe que o mesmo artifício nos permite estimar $|f_1(z) - f_0(z)|$ por

$$(11.16) \quad \max_{\substack{z \in Z_{ad} \\ |z| \leq r}} |f_1(z) - f_0(z)| \leq \max_{\substack{z \in Z_{ad} \\ |z| \leq \alpha r}} \max_{u \in U_{ad}} |\phi(z, u)| = h(\alpha r).$$

Definindo agora para $n \in \mathbb{N}_0$ $h_n(r) := \max_{z \in Z_{ad}, |z| \leq r} |f_{n+1}(z) - f_n(z)|$, $0 \leq r \leq \delta$, obtemos de (11.15) e (11.16)

$$h_n(r) \leq h_{n-1}(\alpha r) \leq \dots \leq h_0(\alpha^n r) \leq h(\alpha^{n+1} r), \quad 0 \leq r \leq \delta.$$

De (11.13), obtemos para $z \in Z_{ad}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} h(\alpha^n \delta) < \infty,$$

provando que a série $\sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1}(z) - f_n(z))$ converge uniformemente em

Z_{ad} . Defina agora a função $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1}(z) - f_n(z)) + f_0(z)$, $z \in Z_{ad}$. f é contínua por construção. A propriedade $f(0) = 0$ segue de

$$\begin{aligned} f_0(0) &= 0 \quad (\text{devido a (11.12)}), \\ f_n(0) &= 0 \quad (\text{devido a (11.10) e (11.12)}). \end{aligned}$$

A equação (11.9) é obtida de (11.14) tomando o limite $n \rightarrow \infty$ e usando o fato da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir uniformemente para f em Z_{ad} .

Para provar a unicidade, suponha que \hat{f} é uma outra solução de (11.9). Defina

$$k(\delta) := \max_{\substack{z \in Z_{ad} \\ |z| \leq r}} |f(z) - \hat{f}(z)|, \quad 0 \leq r \leq \delta.$$

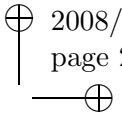
O mesmo procedimento utilizado acima nos fornece agora

$$\max_{\substack{z \in Z_{ad} \\ |z| \leq r}} |f(z) - \hat{f}(z)| \leq \max_{\substack{z \in Z_{ad} \\ |z| \leq \alpha r}} |f(z) - \hat{f}(z)|, \quad 0 \leq r \leq \delta.$$

Isto é, $k(r) \leq k(\alpha r) \leq \dots \leq k(\alpha^n r) \leq \dots$. Tomando o limite $n \rightarrow \infty$, obtemos (f e \hat{f} são contínuas)

$$k(r) \leq k(0) = |f(0) - \hat{f}(0)| = 0, \quad 0 \leq r \leq \delta,$$

completando assim a demonstração. ■



Exercícios

11.1. Dados $c > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o problema de minimização

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \prod_{i=1}^n x_i \\ \text{sujeito a} & x_1 + \dots + x_n = c. \end{cases}$$

a) Formule o problema acima como um problema de programação dinâmica, i.e. encontre função valor, equação de otimalidade e condições de contorno.

b) Resolva o problema do item a).

11.2. Um navio com capacidade para transportar 730 toneladas de carga deve ser carregado com três tipos de grãos. As cargas a serem transportadas são dadas na tabela abaixo:

Grão	Peso (Ton)	Valor
G1	100	360
G2	125	475
G3	250	1000

a) Usando programação dinâmica, determine a forma ótima (com relação ao valor da carga) de carregar o navio.

b) Resolva novamente o problema usando programação linear.

11.3. Dados $c \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, considere o problema

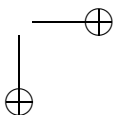
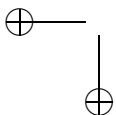
$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^n p_i z_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^n w_i z_i \leq c, \quad z_i \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

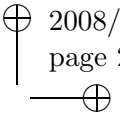
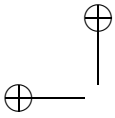
onde $p_i, w_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, n$, são constantes fornecidas. Defina para $k = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, c$ a função

$$f_k(j) := \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i z_i \mid \sum_{i=1}^k w_i z_i \leq j, \quad z_i \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, \dots, k \right\}.$$

a) Verifique que $f_k(j)$ é a função valor para o problema de programação dinâmica correspondente. Determine a equação de otimalidade e as condições de contorno.

b) Mostre que $f_k(j)$ é monótona não decrescente.





c) Resolva o problema para os dados $n = 4, c = 14, p = (7, 8, 9, 24), w = (5, 4, 6, 10)$.

11.4 (Problema do Caminho Mais Curto). Considere um Grafo com vértices K_1, \dots, K_N . Suponha que cada par de vértices (K_i, K_j) esteja unido por uma aresta de comprimento d_{ij} . Os seguintes valores são admissíveis para d_{ij} :

$d_{ij} < 0$ (Lucro!); $d_{ij} > 0$ (Custos!); $d_{ij} = \infty$ (Não existe comunicação!).

O objetivo é encontrar o caminho mais curto entre os vértices K_1 e K_N .

a) Mostre que a função valor é da forma

$$(11.17) \quad V(i, k) := \text{Comprimento do caminho mais curto de } K_1 \text{ a } K_k, \text{ que atravessa no máximo } i \text{ arestas.}$$

b) Verifique que a equação de otimalidade é dada por:

$$(11.18) \quad V(i, k) := \begin{cases} \min_{j \neq k} \{V(i-1, j) + d_{jk}\} & , k \neq 1 \\ \min_{j \in \{1, \dots, N\}} \{V(i-1, j) + d_{j1}\} & , k = 1 \end{cases} .$$

c) Mostre que as condições de contorno são da forma

$$V(0, k) := \begin{cases} 0 & , k = 1 \\ \infty & , k > 1 \end{cases} , \quad V(1, 1) := 0.$$

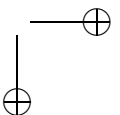
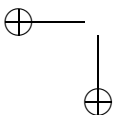
d) Considere o grafo da Figura 11.3. Observe que as condições iniciais são

$$V(0, 1) = 0, \quad V(0, 2) = V(0, 3) = V(0, 4) = \infty.$$

Encontre o caminho mais curto do vértice K_1 ao vértice K_4 .

11.5 (Problema da Alocação de Recursos). Este problema não é exatamente dinâmico, ou seja não requer uma seqüência de decisões. Suponha que, dadas X unidades de um determinado recurso (matéria prima, capital, ...), temos que distribuí-las por N atividades A_1, \dots, A_N . Para cada atividade A_k , temos uma função $r_k(x)$, que representa o retorno (lucro) obtido pela atividade A_k quando uma determinada quantidade de recursos $x \in \{0, \dots, X\}$ é alocada a esta atividade (as funções r_k são monótonas não decrescentes por hipótese). O objetivo é encontrar uma alocação ótima dos X recursos pelas atividades A_1, \dots, A_n , de modo a maximizar a função de produtividade

$$\sum_{j=1}^N r_j(x_j).$$



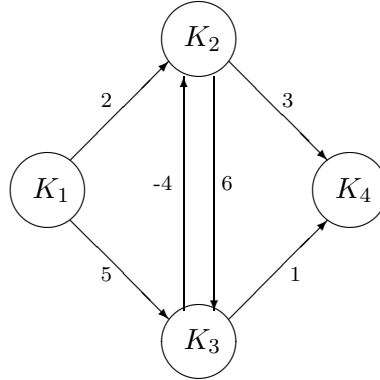
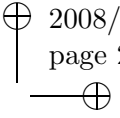
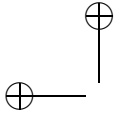


Figura 11.3: Grafo para o problema do caminho mais curto.

a) Verifique que o problema pode ser escrito como

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \sum_{j=1}^N r_j(x_j) \\ \text{sujeito a} & \\ & (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^N, x_j \geq 0, j = 1, \dots, N, \\ & \sum_{j=1}^N x_j = X \end{cases}$$

A fim de usar a programação dinâmica, precisamos de uma variável que torne possível definir a equação de otimalidade de forma indutiva. Afirmamos por hora que esta variável é k , o índice das atividades consideradas (veja último item do exercício). Defina a função valor:

$$V(k, x) := \text{Produtividade máxima obtida quando } x \text{ unidades de recurso são distribuídas pelas atividades } A_k, \dots, A_N;$$

onde $x \in \{0, \dots, X\}$ e $k \in 1, \dots, N$.

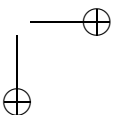
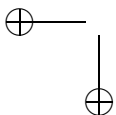
b) Mostre que a função valor satisfaz a equação de otimalidade

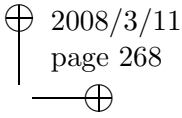
$$(11.19) \quad V(k, x) = \max_{y \in \{0, \dots, x\}} \{V(k + 1, x - y) + r_k(y)\}$$

e as condições de contorno

$$V(N, x) = r_N(x).$$

c) Prove que o máximo da função de produtividade é dado por $V(1, X)$.





Capítulo 12

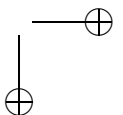
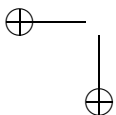
Programação Dinâmica Contínua

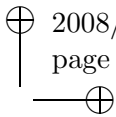
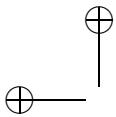
Consideramos neste capítulo aplicações da programação dinâmica a problemas de controle com dinâmica contínua. A formulação dos problemas aqui estudados é genérica, abrangendo problemas não lineares, não autônomos, assim como restrições às variáveis de controle. Em contrapartida, a obtenção dos resultados que dizem respeito a situações tão gerais exige a formulação de condições muito restritivas e muitas vezes difíceis de ser comprovadas.

O ponto principal deste capítulo é a análise da função valor ótimo (ou função valor). Na Secção 12.1 são demonstrados alguns resultados referentes à regularidade (Lipschitz continuidade) desta função. Na Secção 12.2 é obtida uma relação implícita entre a função valor e os processos ótimos, o princípio de Bellman. Na Secção 12.3 analisamos uma equação diferencial parcial não linear de primeira ordem (equação de Hamilton–Jakobi–Bellman) e a relação de suas soluções com a função valor (teoremas de verificação). Na Secção 12.4 estudamos os problemas de controle com dinâmica linear e função objetivo quadrática. Para esta família especial de problemas é possível, resolvendo a equação diferencial de Riccati, obter a função valor e os controles ótimos correspondentes.

12.1 Função Valor Ótimo

Nesta secção associamos a uma dada família de problemas de controle (que diferem apenas pela condição inicial) uma função que está





intrinsecamente relacionada com a solução de cada um dos problemas desta família. Esta relação é expressa através de um princípio de otimalidade e de uma equação diferencial, que constituem o objeto do estudo das secções subseqüentes.

Seja $T > 0$ fixo. Dados $t_0 \in [0, T]$ e $z_0 \in \mathbb{R}^n$, considere a seguinte família de problemas de controle:

$$P(t_0, z_0) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } J(t_0, z_0; u, z) := \int_{t_0}^T L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s), u(s)) ds, \quad t \in [t_0, T], \\ u \in L^1([t_0, T]; \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [t_0, T], \end{cases}$$

onde $L : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Observe que a dinâmica do sistema é descrita por uma equação integral, o que nos permite admitir trajetórias menos regulares. O conjunto dos controles admissíveis é dado por

$$U_{ad}[t_0, T] := \{u \in L^1([t_0, T]; \mathbb{R}^m) \mid u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [t_0, T]\}.$$

Denominamos por *processos* os pares $(u, z^u) \in U_{ad}[t_0, T] \times C([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ formados por controle e trajetória correspondente. O conjunto dos processos admissíveis para $P(t_0, z_0)$ é

$$\mathcal{D}_{t_0, z_0} := \{(u, z^u) \mid u \in U_{ad}[t_0, T], J(t_0, z_0; u, z^u) < \infty\}.$$

Definição 197. Dado $u \in U_{ad}[t_0, T]$, denotamos a trajetória correspondente por z^u . A *função valor ótimo* é a aplicação $V : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V(t_0, z_0) := \inf\{J(t_0, z_0; u, z^u) \mid u \in U_{ad}[t_0, T]\}.$$

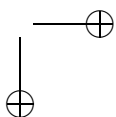
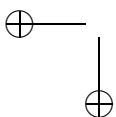
Um controle $\bar{u} \in U_{ad}[t_0, T]$ é denominado *controle ótimo* para $P(t_0, z_0)$, quando

$$V(t_0, z_0) = J(t_0, z_0; \bar{u}, z^{\bar{u}}).$$

Neste caso, $\bar{z} := z^{\bar{u}}$ é denominada *trajetória ótima* e o par (\bar{u}, \bar{z}) é chamado de solução ou *processo ótimo* para o problema $P(t_0, z_0)$.

□

Observação 198. Existência e unicidade de soluções para o problema $P(t_0, z_0)$ podem ser garantidas ao impormos restrições especiais às funções L e f . Se supomos, por exemplo, que as funções envolvidas na



formulação do problema de controle ótimo são apenas C^1 , podemos ter situações do tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(t_0, z_0; u, z) := \int_{t_0}^1 [z^2(s) + (u^2(s) - 1)^2] ds \\ \text{sujeito a} \\ z'(s) = u(s), \text{ q.s. em } [0, 1], z(t_0) = z_0, \\ u \in \{L^1([t_0, 1]; \mathbb{R}) \mid u(t) \in \mathbb{R} \text{ q.s. em } [t_0, 1]\}. \end{array} \right.$$

Note que $V(0, 0) = \inf\{J(0, 0; u, z) \mid u \text{ admissível para } P(0, 0)\} = 0$, pois a seqüência de controles

$$u_n(t) = \begin{cases} 1 & , t \in \bigcup_{k=0}^{(n-3)/2} [2kh, (2k+1)h] \\ -1 & , t \in \bigcup_{k=0}^{(n-2)/2} [(2k+1)h, (2k+2)h] \end{cases}$$

com $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, satisfaz $|u_n(t)| = 1$ q.s. em $[0, 1]$ e ainda $J(0, 0; u_n, z^{u_n}) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Entretanto, não existe estratégia u tal que $J(0, 0; u, z^u) = 0$, pois isto implicaria em $z^u \equiv 0$ e, ao mesmo tempo, $|(z^u)'(t)| = 1$ q.s. em $[0, 1]$. \square

Fazemos agora as seguintes hipóteses sobre a formulação do problema $P(t_0, z_0)$:

H1) Existe uma constante positiva K_1 tal que

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| + |L(t, x, u) - L(t, y, u)| \leq K_1|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

para todo $t \in [0, T]$, $u \in \Omega$;

H2) Dado $x \in \mathbb{R}^n$, as funções $L(\cdot, x, \cdot)$ e $f(\cdot, x, \cdot)$ são mensuráveis;

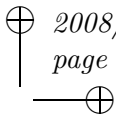
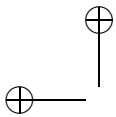
H3) Existe uma constante positiva K_2 tal que

$$|f(t, x, u)| + |L(t, x, u)| \leq K_2(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

para todo $t \in [0, T]$, $u \in \Omega$;

H4) Dados $t \in [0, T]$, $u \in \Omega$, as funções $f(t, \cdot, u)$, $L(t, \cdot, u)$ são continuamente diferenciáveis e as derivadas parciais f_z , L_z são contínuas em $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$;

H5) Ω é fechado.



Note que $H3)$ é a mais interessante das hipóteses. Denominada por *crescimento linear*, esta hipótese não somente garante existência e unicidade de soluções para a equação da dinâmica, como também limita o crescimento do integrando da função objetivo.

A fim de obtermos as propriedades relevantes da função valor, precisamos de um lema auxiliar que estime o crescimento das trajetórias de um sistema dinâmico.

Lema 199. *Suponha que $H1), \dots, H5)$ são satisfeitas. Seja $s \in [0, T]$ e $x, x_1 \in \mathbb{R}^n$ com $|x| \leq R, |x_1| \leq R$. Dado $u \in U_{ad}[s, T]$, defina*

$$z(r) := x + \int_s^r f(q, z(q), u(q))dq, \quad z_1(r) := x_1 + \int_s^r f(q, z_1(q), u(q))dq,$$

para $r \in [s, T]$. Então existe constante K (que não depende de u) tal que

$$(12.1) \quad |z(r) - x| \leq K(1 + R)|r - s|, \quad r \in [s, T];$$

$$(12.2) \quad |z(r) - z_1(r)| \leq K(1 + R)|x - x_1|, \quad r \in [s, T].$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} |z(r) - x| &\leq \int_s^r |f(q, z(q), u(q)) - f(q, x, u(q))|dq + \int_s^r |f(q, x, u(q))|dq \\ &\leq K_1 \int_s^r |z(q) - x|dq + K_2 \int_s^r (1 + |x|)dq. \end{aligned}$$

Do Lema de Gronwall 264, obtemos

$$|z(r) - x| \leq K(1 + |x|)|r - s|, \quad r \in [s, T],$$

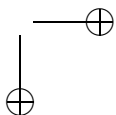
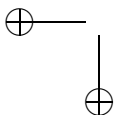
provando (12.1). Para provar (12.2) note que

$$z(r) - z_1(r) = \int_s^r [f(q, z(q), u(q)) - f(q, z_1(q), u(q))] dq + (x - x_1).$$

Usando novamente o lema de Gronwall e $H1)$ o teorema segue.¹ ■

No teorema a seguir verificamos que as condições $H1), \dots, H5)$ são suficientes para que V esteja bem definida. Além disso são discutidas algumas propriedades da função valor.

¹Para mais detalhes sobre a constante K , veja o Exercício 12.1.



Lema 200. *Suponha que as hipóteses $H1), \dots, H5)$ são satisfeitas. Então são verdadeiras as afirmativas:*

a) $J(s, z; u, z^u)$ está bem definido para todo $(s, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ e todo $u \in U_{ad}[s, T]$.

b) $V(s, z)$ está bem definida para todo $(s, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$;

c) V é localmente lipschitz contínua em $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, i.e. existe uma constante K (que depende de T) tal que

$$(12.3) \quad |V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2)| \leq K(1 + R)(|s_1 - s_2| + |z_1 - z_2|),$$

para todo $(s_1, z_1), (s_2, z_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ com $|z_1| \leq R, |z_2| \leq R$.

Demonstração: Seja $(s, z) \in [s, T] \times \mathbb{R}^n$ e $u \in U_{ad}[s, T]$. Temos então

$$\begin{aligned} |J(s, z; u, z^u)| &\leq \int_s^T |L(r, z^u(r), u(r)) - L(r, z, u(r))| dr \\ &\quad + \int_s^T |L(r, z, u(r))| dr \\ &\leq \int_s^T K_1 |z^u(r) - z| dr + \int_s^T K_2 (1 + |z|) dr. \end{aligned}$$

De (12.1), temos

$$(12.4) \quad |J(s, z; u, z^u)| \leq K_1 K (1 + |z|) \int_s^T |r - s| ds + K_2 T (1 + |z|) < M < \infty,$$

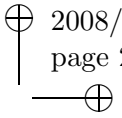
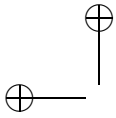
provando a). Para provar b), basta observar que as constantes K, K_1, K_2 em (12.4) não dependem de u , logo a estimativa obtida é uniforme em $U_{ad}[s, T]$.

O item c) é o mais interessante do teorema. Sejam $(s_1, z_1), (s_2, z_2) \in [s, T] \times \mathbb{R}^n$ com $|z_i| \leq R$ (suponha $s_1 \leq s_2$). Dado $\varepsilon > 0$ escolha $u_1 \in U_{ad}[s_1, T]$ e $u_2 \in U_{ad}[s_2, T]$ tais que

$$V(s_i, z_i) \geq J(s_i, z_i; u_i, z^{u_i}) - \varepsilon/2, \quad i = 1, 2.$$

Isto é sempre possível, pois como vimos no item a), V está bem definida. Defina agora

$$\bar{u}_1(t) := \begin{cases} u_1(t) & , t \in [s_1, s_2) \\ u_2(t) & , t \in [s_2, T] \end{cases} \quad \text{e} \quad \bar{u}_2 := u_1|_{[s_2, T]}.$$



Temos então

$$\begin{aligned} V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2) &\leq V(s_1, z_1) - J(s_2, z_2; u_2, z^{u_2}) + \varepsilon/2 \\ &\leq J(s_1, z_1; \bar{u}_1, z^{\bar{u}_1}) - J(s_2, z_2; u_2, z^{u_2}) + \varepsilon/2, \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2) \geq J(s_1, z_1; u_1, z^{u_1}) - \varepsilon/2 - J(s_2, z_2; \bar{u}_2, z^{\bar{u}_2}).$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned} |V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2)| &\leq \varepsilon + |J(s_1, z_1; \bar{u}_1, z^{\bar{u}_1}) - J(s_2, z_2; u_2, z^{u_2})| \\ &\quad + |J(s_1, z_1; u_1, z^{u_1}) - J(s_2, z_2; \bar{u}_2, z^{\bar{u}_2})|. \end{aligned}$$

Basta, portanto, estimar os termos

$$|J(s_1, z_1; \bar{u}_1, z^{\bar{u}_1}) - J(s_2, z_2; u_2, z^{u_2})|, \quad |J(s_1, z_1; u_1, z^{u_1}) - J(s_2, z_2; \bar{u}_2, z^{\bar{u}_2})|.$$

Da definição do funcional J , temos

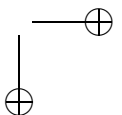
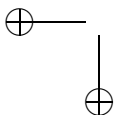
$$\begin{aligned} &|J(s_1, z_1; \bar{u}_1, z^{\bar{u}_1}) - J(s_2, z_2; u_2, z^{u_2})| \\ &\leq \left| \int_{s_1}^{s_2} L(r, z^{\bar{u}_1}(r), \bar{u}_1(r)) dr \right| \\ &\quad + \left| \int_{s_2}^T [L(r, z^{\bar{u}_1}(r), \bar{u}_1(r)) - L(r, z^{u_2}(r), u_2(r))] dr \right| \\ &= \left| \int_{s_1}^{s_2} L(r, z^{u_1}(r), u_1(r)) dr \right| \\ &\quad + \left| \int_{s_2}^T [L(r, z^{\bar{u}_1}(r), u_2(r)) - L(r, z^{u_2}(r), u_2(r))] dr \right| \\ &\leq K_2 \int_{s_1}^{s_2} (1 + |z^{u_1}(r)|) dr + K_1 \int_{s_2}^T |z^{\bar{u}_1}(r) - z^{u_2}(r)| dr \\ &\leq K(1 + R)|s_1 - s_2| + K(1 + R)|z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

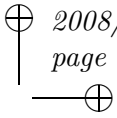
onde K depende apenas de T , K_1 e K_2 . Para obter a última desigualdade utilizamos o Lema 199 e a desigualdade

$$|z^{\bar{u}_1}(s_2) - z^{u_2}(s_2)| \leq |z^{\bar{u}_1}(s_2) - z^{\bar{u}_1}(s_1)| + |z^{\bar{u}_1}(s_1) - z^{u_2}(s_2)|.$$

De modo análogo provamos que

$$|J(s_1, z_1; u_1, z^{u_1}) - J(s_2, z_2; \bar{u}_2, z^{\bar{u}_2})| \leq K(1 + R)(|s_1 - s_2| + |z_1 - z_2|).$$





Podemos então concluir que

$$|V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2)| \leq \varepsilon + K(1 + R)(|s_1 - s_2| + |z_1 - z_2|),$$

onde a constante K não depende de z_1, z_2, s_1, s_2 e ε . Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, o teorema fica provado. ■

O item *a)* do Teorema 200 garante que, dado $(s, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, todo controle $u \in U_{ad}[s, T]$ está associado a um processo de custo finito, i.e. $J(s, z; u, z^u) < \infty$. Uma consequência imediata deste fato é que, para todo $(s, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, temos

$$\mathcal{D}_{s,z} = \{(u, z^u) \mid u \in U_{ad}[s, T]\}.$$

O leitor atento percebe que a hipótese de crescimento linear *H3)* permite a obtenção das constantes K em (12.1), (12.2) e (12.3), sem que seja preciso supor Ω limitado. Resumindo, *H3)* nos permite provar a Lipschitz-continuidade da função valor, ainda que o conjunto de controles Ω seja ilimitado (veja Exercício 12.4).

Observação 201. O teorema de Rademacher (veja [Mo]) garante que uma função Lipschitz contínua é diferenciável quase sempre. Portanto, uma consequência do item *c)* do Teorema 200 é que a função valor é diferenciável em $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ quase sempre em relação à medida de Lebesgue. □

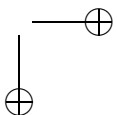
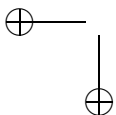
12.2 Princípio de Bellman

Apresentamos nesta seção um resultado de fundamental importância para a verificação da otimalidade de processos admissíveis. Trata-se do princípio de otimalidade de Bellman. Este resultado é, por sua vez, consequência do seguinte lema chave da programação dinâmica:

Lema 202. *Seja $(t_0, z_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $u \in U_{ad}[t_0, T]$ e $z := z^u$, com $z(t_0) = z_0$. Se as hipóteses *H1), ..., H5)* são satisfeitas, são verdadeiras as afirmativas:*

a) Para todo $s_1, s_2 \in [t_0, T]$, com $s_1 \leq s_2$, temos

$$(12.5) \quad V(s_1, z(s_1)) \leq V(s_2, z(s_2)) + \int_{s_1}^{s_2} L(r, z(r), u(r)) dr;$$



b) O controle $u \in U_{ad}[t_0, T]$ é ótimo para $P(t_0, z_0)$ se e somente se para todo $s_1, s_2 \in [t_0, T]$, com $s_1 \leq s_2$, temos

$$(12.6) \quad V(s_1, z(s_1)) = V(s_2, z(s_2)) + \int_{s_1}^{s_2} L(r, z(r), u(r)) ds.$$

Demonstração: Provamos inicialmente a). Seja $\tilde{u} \in U_{ad}(s_2, T)$ um controle admissível para o problema $P(s_2, z(s_2))$. Logo, o controle \bar{u} definido por

$$\bar{u}(t) := \begin{cases} u(t) & , t \in [s_1, s_2] \\ \tilde{u}(t) & , t \in [s_2, T] \end{cases} ,$$

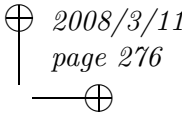
é admissível para $P(s_1, z(s_1))$ para qualquer $s_1 \in [t_0, s_2]$. Tomando $\bar{z} := z^{\bar{u}}$, temos da definição da função valor

$$\begin{aligned} V(s_1, z(s_1)) &\leq \int_{s_1}^T L(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} L(s, z(s), u(s)) ds + J(s_2, z(s_2); \tilde{u}, \bar{z}). \end{aligned}$$

Como $\tilde{u} \in U_{ad}(s_2, T)$ é um controle admissível qualquer, a desigualdade (12.5) segue da definição de V . Para provar b), suponha que u é um controle ótimo para $P(t_0, z_0)$. Segue então do item a) e da definição da função valor

$$\begin{aligned} V(t_0, z_0) &\leq V(s_1, z(s_1)) + \int_{t_0}^{s_1} L(s, z(s), u(s)) ds \\ &\leq V(s_2, z(s_2)) + \int_{t_0}^{s_2} L(s, z(s), u(s)) ds \\ &\leq \int_{s_2}^T L(s, z(s), u(s)) ds + \int_{t_0}^{s_2} L(s, z(s), u(s)) ds \\ &= J(t_0, z_0; u, z) = V(t_0, z_0). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que o controle u é tal que (12.6) é satisfeita. Tomando $s_1 := t_0$ e $s_2 := T$ em (12.6), temos que $V(t_0, z_0) = J(t_0, z_0; u, z)$. Logo, u é um controle ótimo para $P(t_0, z_0)$. (Usamos tacitamente a identidade $V(T, z(T)) = 0$, a qual segue da definição da função valor.) ■



Corolário 203. Dado $(t_0, z_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, seja $\bar{u} \in U_{ad}[t_0, T]$ um controle ótimo para $P(t_0, z_0)$ e $\bar{z} := z^{\bar{u}}$ a trajetória correspondente com $\bar{z}(t_0) = z_0$. Então, a restrição $\bar{u}|_{[t, T]}$ é um controle ótimo para $P(t, \bar{z}(t))$, para todo $t \in [t_0, T]$.

Demonstração: Segue diretamente do item b) do Lema 202 quando escolhermos $s_1 = t$ e $s_2 = T$. ■

Resumindo as conclusões acima, o Corolário 203 nos permite enunciar o princípio de optimalidade de Bellman da seguinte forma:²

Se $\bar{u} \in U_{ad}[t_0, T]$ é um controle ótimo para o problema $P(t_0, z_0)$, então, para todo $t \in [t_0, T]$, a restrição $\bar{u}|_{[t, T]}$ é um controle ótimo para o problema $P(t, z^{\bar{u}}(t))$.

Na secção seguinte utilizamos a equação (12.6) para obter uma equação diferencial parcial, da qual a função valor ótimo (quando composta com a trajetória ótima do problema) é solução.

12.3 Equação de Hamilton–Jakobi–Bellman

Usando a notação da secção anterior, consideramos a função valor ótimo V ao longo da trajetória ótima definida no intervalo $[t_0, T]$ do problema $P(t_0, z_0)$

$$V(t, \bar{z}(t)) = \int_t^T L(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds.$$

Derivando formalmente em relação a t obtemos a identidade

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, \bar{z}(t)) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}(t, \bar{z}(t)), f(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)) \right\rangle = -L(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)),$$

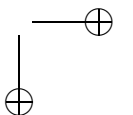
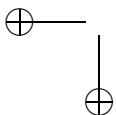
a qual motiva a formulação da principal equação da programação dinâmica para problemas de controle ótimo contínuos.

Teorema 204. Considere o problema $P(t_0, z_0)$ sujeito às hipóteses $H1), \dots, H5)$. São válidas as seguintes afirmativas:

a) Se V é diferenciável em $(t, z) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$, então

$$(12.7) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t, z) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}(t, z), f(t, z, u) \right\rangle + L(t, z, u) \geq 0,$$

²Veja Secção 11.1.



para todo $u \in \Omega$;

b) Seja $\bar{u} \in U_{ad}[t_0, T]$ um controle ótimo para $P(t_0, z_0)$. Se V é diferenciável ao longo da trajetória ótima $(t, \bar{z}(t))$, para todo $t \in (t_0, T)$, então

$$(12.8) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t, \bar{z}(t)) + \min_{u \in \Omega} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}(t, \bar{z}(t)), f(t, \bar{z}(t), u) \right\rangle + L(t, \bar{z}(t), u) \right\} = 0,$$

para todo $t \in (t_0, T)$, sendo o mínimo obtido em $u = \bar{u}(t)$ para cada t .

Demonstração: Seja $u \in \Omega$ e \hat{z} uma solução local³ de

$$\hat{z}(s) = z + \int_t^s f(r, \hat{z}(r), u) dr.$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que a trajetória $(s, \hat{z}(s))$ está bem definida no intervalo $[t, t + \delta]$. Seja agora u_δ um controle admissível qualquer para $P(t + \delta, \hat{z}(t + \delta))$ e defina

$$\tilde{u}(r) := \begin{cases} u & , r \in [t, t + \delta) \\ u_\delta(r) & , r \in [t + \delta, T] \end{cases}.$$

O controle assim construído satisfaz $\tilde{u} \in U_{ad}[t, T]$ e sua trajetória correspondente é tal que $z^{\tilde{u}}(s) = \hat{z}(s)$, $s \in [t, t + \delta)$. Do item a) do Lema 202, temos que para todo $0 < h \leq \delta$

$$V(t, \hat{z}(t)) \leq V(t + h, \hat{z}(t + h)) + \int_t^{t+h} L(r, \hat{z}(r), \tilde{u}(r)) dr.$$

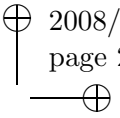
Logo,

$$\frac{1}{h} [V(t + h, \hat{z}(t + h)) - V(t, \hat{z}(t))] \geq -\frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(r, \hat{z}(r), u) dr.$$

Tomando o limite $h \downarrow 0$, obtemos (12.7), provando assim o item a). A fim de provar b), repetimos a construção feita no item anterior para o ponto $(t, z) := (t, \bar{z}(t))$, obtendo assim para todo $u \in \Omega$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{dt} V(t, \bar{z}(t)) + L(t, \bar{z}(t), u) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, \bar{z}(t)) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, \bar{z}(t)), f(t, \bar{z}(t), u) \right\rangle + L(t, \bar{z}(t), u). \end{aligned}$$

³A existência de tal solução local é garantida pela hipótese sobre a regularidade de f feita em H2).



Note ainda que o item *b)* do Lema 202 com $s_1 := t$ e $s_2 := t + h$ implica em

$$\frac{1}{h} [V(t + h, \bar{z}(t + h)) - V(t, \bar{z}(t))] = -\frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) dr.$$

Tomando o limite $h \downarrow 0$, obtemos (12.8) e o teorema fica provado. ■

Observação 205. Para utilizar o Teorema 204 precisamos antes garantir a regularidade enunciada para V . Na Observação 201, concluímos que V é diferenciável quase sempre, o que ainda não nos basta. Via de regra, não é de se esperar que V seja mais do que diferenciável quase sempre, como podemos verificar no seguinte exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(t_0, z_0; u, z) := -[z(1) - z_0] \\ \text{sujeito a} \\ u \in U_{ad}[t_0, 1] := \{w \in L^1([t_0, 1]; \mathbb{R}) \mid w(s) \in [0, 1] \text{ q.s. em } [t_0, 1]\}, \\ z' = zu, \text{ q.s. em } [t_0, 1], z(t) = z_0. \end{array} \right.$$

Temos aqui $L(t, z, u) = -zu$, $f(t, z, u) = zu$, $T = 1$ e $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Note que

$$|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)| + |L(t, x_1, u) - L(t, x_2, u)| \leq 2|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$|f(t, x, u)| + |L(t, x, u)| \leq 2(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

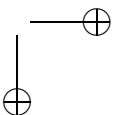
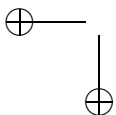
para todo $(t, u) \in [0, T] \times \Omega$. Logo as hipóteses $H1), \dots, H5)$ são satisfeitas. É de simples verificação o fato da função valor ser dada por

$$V(t, z) = \begin{cases} z - ze^{1-t}, & z \geq 0 \\ 0 & , z < 0 \end{cases},$$

pois os controles ótimos são $u \equiv 0$ para $z \leq 0$ e $u \equiv 1$ para $z > 0$. A função V obviamente não é continuamente diferenciável em $[0, T] \times \mathbb{R}$. Note ainda que V é apenas *localmente* lipschitz contínua em $[0, T] \times \mathbb{R}$. □

O Teorema 204 não é em geral muito útil na determinação do controle ótimo, pois a função valor ótimo é, a princípio, desconhecida. Entretanto, o teorema nos permite intuir que a função valor ótimo pode ser definida pela equação diferencial parcial

$$(12.9) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t, z) + \min_{u \in \Omega} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}(t, z), f(t, z, u) \right\rangle + L(t, z, u) \right\} = 0.$$



Resultados dessa natureza são conhecidos na literatura como *teoremas de verificação*. A fim de analisarmos tais resultados, definimos, como no Capítulo 10, a função de Hamilton

$$H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(t, z, \lambda, u) \longmapsto \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + L(t, z, u)$$

e a função auxiliar

$$\mathcal{H} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(t, z, \lambda) \longmapsto \min_{u \in \Omega} \{ \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + L(t, z, u) \}.$$

Teorema 206. *Suponha que H1), ..., H5) são satisfeitas. Seja $W : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação continuamente diferenciável satisfazendo*

$$(12.10) \quad \frac{\partial W}{\partial t}(t, z) + \min_{u \in \Omega} \{ \langle \frac{\partial W}{\partial z}(t, z), f(t, z, u) \rangle + L(t, z, u) \} = 0,$$

em $(t, z) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ e ainda a condição final

$$(12.11) \quad W(T, z) = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Então, dado $(t_0, z_0) \in [0, T] \times \Omega$, um controle $\bar{u} \in U_{ad}[t_0, T]$ e sua trajetória correspondente $\bar{z} := z^{\bar{u}}$ formam um processo ótimo para $P(t_0, z_0)$ se

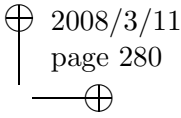
$$H(t, \bar{z}(t), \frac{\partial W}{\partial z}(t, \bar{z}(t)), \bar{u}(t)) = \mathcal{H}(t, \bar{z}(t), \frac{\partial W}{\partial z}(t, \bar{z}(t))), \quad t \in [t_0, T].$$

Neste caso, ao longo da trajetória ótima temos

$$W(t, \bar{z}(t)) = V(t, \bar{z}(t)), \quad t \in [t_0, T].$$

Demonstração: Seja $t \in [t_0, T)$, $\hat{u} \in U_{ad}[t, T]$ um controle admissível para $P(t, \bar{z}(t))$ e $\hat{z} := z^{\hat{u}}$. Temos então

$$\begin{aligned} & J(t, \bar{z}(t); \hat{u}, \hat{z}) \\ &= \int_t^T L(r, \hat{z}(r), \hat{u}(r)) \, dr \\ &= \int_t^T L(r, \hat{z}(r), \hat{u}(r)) \, dr + W(t, \bar{z}(t)) + \int_t^T \frac{d}{dr} W(r, \hat{z}(r)) \, dr \\ &= \int_t^T \left[L(r, \hat{z}(r), \hat{u}(r)) + \frac{\partial W}{\partial r}(r, \hat{z}(r)) + \mathcal{H}(r, \hat{z}(r), \frac{\partial W}{\partial z}(r, \hat{z}(r))) \right] \, dr \\ &\quad + W(t, \bar{z}(t)) \geq W(t, \bar{z}(t)), \end{aligned}$$



onde a última desigualdade é conseqüência de (12.10). De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} W(t, \bar{z}(t)) &= W(t, \bar{z}(t)) + \int_t^T \left[L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) + \frac{d}{dr} W(r, \bar{z}(r)) \right] dr \\ &= W(T, \bar{z}(T)) + \int_t^T L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) dr \\ &= J(t, \bar{z}(t); \bar{u}, \bar{z}). \end{aligned}$$

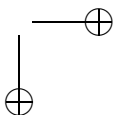
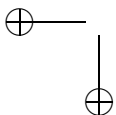
Como o controle $\hat{u} \in U_{ad}[t, T]$ é arbitrário, temos que $W(t, \bar{z}(t)) = J(\bar{z}, \bar{u}; t, \bar{z}(t)) = V(t, \bar{z}(t))$ e o teorema segue. ■

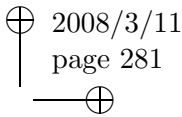
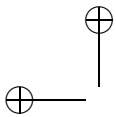
A equação (12.10) é a conhecida *equação de Hamilton–Jakobi–Bellman* (HJB). A equação leva o nome dos três pioneiros que contribuíram para o seu desenvolvimento com as seguintes abordagens: Hamilton obteve resultados relacionando o cálculo variacional e a mecânica clássica (função de Hamilton); Jakobi investigou a teoria de condições suficientes no cálculo variacional (campos de trajetórias); Bellman trouxe esses resultados para a programação dinâmica e chegou à formulação aqui apresentada. Note que podemos utilizar a função de Hamilton para reescrever a equação HJB na forma

$$(12.12) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t, z) + \mathcal{H}(t, z, \frac{\partial V}{\partial z}(t, z)) = 0, \quad (t, z) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$$

(compare com a condição de máximo do Teorema 178).

Caso a função valor não seja diferenciável, é possível usar resultados da chamada *análise não suave* para, ainda assim, caracterizar a função valor como solução da equação HJB. Neste caso tanto os conceitos de derivada, quanto os de solução de uma equação diferencial são diferentes dos usados no Teorema 206: o conceito de derivada corresponde às derivadas de Dini enquanto que para a equação HJB usa-se os conceitos de subsolução e supersolução de Dini. O leitor interessado encontra maiores detalhes em [BaCa] ou [CLSW]. Em particular, o Capítulo 4 de [CLSW] é dedicado a aplicações da análise não suave à teoria de controle ótimo e a programação dinâmica. Em [BaCa] são tratados problemas de controle ótimo em horizonte infinito de tempo (veja Secção 10.2 e Aplicação 190). Em ambas as referências acima, assim como em [BLS2], é verificado o fato dos conceitos de solução de Dini e solução viscosa (veja Capítulo 13) coincidirem.





Observação 207. O Teorema 206 nos permite desenvolver um esquema para calcular tanto o controle ótimo, quanto a função valor:

- Encontre $U_*(t, z, \lambda) \in \Omega$ tal que

$$(12.13) \quad \begin{aligned} \langle \lambda, f(t, z, U_*(t, z, \lambda)) \rangle + L(t, z, U_*(t, z, \lambda)) \\ = \inf_{u \in \Omega} \{ \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + L(t, z, u) \} \end{aligned}$$

(aqui λ é um parâmetro de U_*).

- Obtenha a solução $V = V(t, z)$ da equação diferencial parcial (em geral não linear):

$$(12.14) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}, f(t, z, U_*(t, z; \frac{\partial V}{\partial z})) \right\rangle + L(t, z, U_*(t, z; \frac{\partial V}{\partial z})) = 0,$$

com a condição de contorno $V(T, z) = 0, z \in \mathbb{R}^n$.

- Substitua $\lambda := \frac{\partial V}{\partial z}(t, z)$ na expressão de U_* . Assim, o controle ótimo para $P(t_0, z_0)$ é obtido na forma de controle de realimentação:

$$u(\cdot) := U_*(\cdot, z(\cdot), \frac{\partial V}{\partial z}(\cdot, z(\cdot))),$$

onde $z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(r, z(r), u(r))dr$.

Em muitos problemas de importância prática, o esquema acima não pode ser levado a cabo. Na Secção 12.4 investigamos uma família especial de problemas (linear-quadráticos), para os quais o esquema acima fornece efetivamente o controle ótimo para qualquer condição inicial.

□

Observação 208. O Teorema 206 nos leva a concluir que a programação dinâmica para problemas de controle contínuos se baseia na seguinte estrutura:

Função valor ótimo:

$$V(t, z) := \inf \{ J(t, z; u, z^u) \mid u \text{ é admissível para } P(t, z) \};$$

Equação de otimalidade:

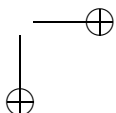
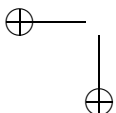
$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, z) + \mathcal{H}(t, z, \frac{\partial V}{\partial z}(t, z)) = 0, (t, z) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n;$$

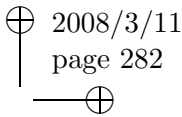
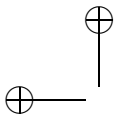
Condição de contorno:

$$V(T, z) = 0, z \in \mathbb{R}^n.$$

Neste ponto, um paralelo com a programação dinâmica para problemas discretos é facilmente traçado (veja Observação 191).

□





Observação 209. O item *b*) do Teorema 204 fornece condições necessárias para otimalidade de uma estratégia de controle. As condições de otimalidade discutidas no Capítulo 10 (princípio do máximo) podem ser obtidas a partir da equação HJB, desde que determinadas hipóteses sobre a regularidade de V e U_* possam ser asseguradas (como vimos na Observação 205, não é de se esperar que a função valor seja, em geral, continuamente diferenciável).

Suponha que V e U_* são continuamente diferenciáveis em seus respectivos domínios de definição. Derivando a equação HJB em relação a z , obtemos

$$V_{tz} + f_z^* V_z + U_z^* f_u^* V_z + V_{zz}^* f + L_z + U_z^* L_u = 0.$$

Logo,

$$-V_{tz} - V_{zz}^* f = U_z^* (f_u^* V_z + L_u) + f_z^* V_z + L_z.$$

Quando o termo $U_z^*(f_u^* V_z + L_u)$ é identicamente nulo, a função adjunta definida por $\lambda(t) := V_z(t, z(t))$ satisfaz

$$\lambda' = -f_z^* V_z - L_z,$$

que é a denominada *equação adjunta*. Observando a regularidade das funções envolvidas, obtemos o seguinte conjunto de condições necessárias para otimalidade de um processo (z, u) :

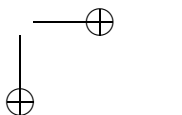
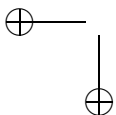
$$\begin{aligned} z' &= + \frac{\partial H}{\partial \lambda}, & z(t_0) &= z_0, \\ \lambda' &= - \frac{\partial H}{\partial z}, & \lambda(T) &= 0, \\ H(t, z(t), \lambda(t), u(t)) &= \min_{w \in \Omega} H(t, z(t), \lambda(t), w), \end{aligned}$$

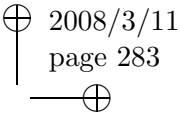
onde $H = H(t, z, \lambda, u)$ é a função de Hamilton. O sistema acima para as variáveis (z, λ) é denominado *sistema Hamiltoniano*.

Para maiores detalhes sobre a relação entre a programação dinâmica e o princípio do máximo, consulte [FIRi, Secção 4.8]. \square

Exemplo 210. Calculamos neste exemplo a função valor ótimo para o problema na Observação 198:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(t_0, z_0; u, z) := \int_{t_0}^1 [z^2(s) + (u^2(s) - 1)^2] ds \\ \text{sujeito a} \\ z'(s) = u(s), \text{ q.s. em } [t_0, 1], z(t_0) = z_0, \\ u \in \{L^1([t_0, 1]; \mathbb{R}) \mid u(t) \in \mathbb{R} \text{ q.s. em } [t_0, 1]\}, \end{array} \right.$$





onde $t_0 \in [0, 1]$. Verificamos na Observação 198 que $V(0, 0) = 0$. Um argumento análogo nos permite concluir que $V(t_0, 0) = 0$ e ainda que não existe estratégia ótima para o problema $P(t_0, 0)$.

Se $z_0 \neq 0$ e $|z_0| < 1 - t_0$, o controle u com $u(s) = -\text{sign}(z_0)$, $s \in [t_0, \tau]$, onde $\tau = t_0 + |z_0| < 1$, nos permite atingir o estado $z(\tau) = 0$. A partir daí, argumentamos como no problema $P(\tau, 0)$ para concluir que não existe estratégia ótima.

Se $z_0 \neq 0$ e $|z_0| > 1 - t_0$, é fácil verificar que o controle dado por $u(s) = -\text{sign}(z_0)$, $s \in [t_0, 1]$ é ótimo para $P(t_0, z_0)$.

A argumentação acima nos permite calcular a função valor ótimo:

$$V(t, z) = \begin{cases} \frac{1}{3}|z|^3 & , |z| < 1 - t \\ 0 & , z = 0 \\ \frac{1}{3}|z|^3 - \frac{1}{3}(|z| + t - 1)^3 & , |z| > 1 - t \end{cases} .$$

A equação HJB se escreve como⁴

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| + z^2 = 0, \quad (t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

A verificação do fato de $P(t_0, z_0)$ não possuir solução para $|z_0| < 1 - t_0$ pode ainda ser feita através do Teorema 206, pois não existe controle admissível \bar{u} tal que o mínimo na equação HJB (12.10) (substituindo W por V) ocorra em $w = \bar{u}(t)$. \square

Exemplo 211. Calculamos neste exemplo a função valor ótimo para o problema

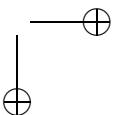
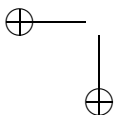
$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(t_0, z_0; u, z) := \int_{t_0}^1 z^2(s) ds \\ \text{sujeito a} \\ z'(s) = u(s), \text{ q.s. em } [t_0, 1]; z(t_0) = z_0, \\ |u(s)| \leq 1 \text{ q.s. em } [t_0, 1]. \end{cases}$$

A função de Hamilton e a função auxiliar \mathcal{H} são dadas por

$$H(t, z, u, \lambda) = \lambda u + z^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(t, z, \lambda) = -|\lambda| + z^2.$$

⁴Como $H(t, z, u, \lambda) = \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + L(t, z, u) = \lambda u + z^2 + (u - 1)^2$, temos

$$\mathcal{H}(t, z, \lambda) = \min_{u \in \Omega} \{H(t, z, u, \lambda)\} = -|\lambda| + z^2.$$



Portanto, U_* é dado por

$$U_*(t, z, \lambda) = \begin{cases} -\text{sign}(\lambda) & , \lambda \neq 0 \\ ? & , \lambda = 0 \end{cases} .$$

A equação HJB é dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| + z^2 = 0, \quad (t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

e a condição de contorno é $V(1, z) = 0, z \in \mathbb{R}$. Resolvendo a equação diferencial, encontramos a função valor ótimo

$$V(t, z) = \begin{cases} \frac{1}{3}|z|^3 & , t + |z| < 1 \\ \frac{1}{3}|z|^3 - \frac{1}{3}(|z| + t - 1)^3 & , t + |z| \geq 1 \end{cases} .$$

□

Exemplo 212. Nos problemas de controle relacionados com o cálculo variacional, é possível deduzir a equação de Euler–Lagrange a partir do sistema Hamiltoniano apresentado na Observação 209 (compare com o Exemplo 1.2.8). Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(z) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, z(t), z'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z' = u, \quad z(t_0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1. \end{cases}$$

Podemos analisá-lo no contexto dos problemas de controle, definindo $f(t, z, u) = u$ e impondo a condição final $\psi(t_1, z_1) = 0$, onde $\psi(t, z) = (t - t_1, z - z_1)$. Se z é uma trajetória ótima para o problema, a variável adjunta correspondente λ satisfaz a equação diferencial

$$\lambda'(t) = -L_z(t, z(t), z'(t)).$$

A condição $U_z^*(f_u^*V_z + L_u) = U_z^*(V_z + L_u) \equiv 0$ (ver Observação 209) é satisfeita se exigirmos $V_z = -L_u$. Logo, da definição da variável adjunta λ temos

$$\lambda'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \right).$$

Substituindo na equação adjunta, temos

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) = 0,$$

que é a equação de Euler–Lagrange para o problema variacional. □

Exemplo 213. Neste exemplo calculamos o controle ótimo para o problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(u, z) := \int_0^2 [tz(t)^2 + u(t)^2] dt \\ \text{sujeito a} \\ |u(s)| \leq 1/2 \text{ q.s. em } [0, 2] \\ z' = u, z(0) = 1 \end{cases}$$

Como o tempo final é fixo, escolhamos em nossa formulação $\psi(t_1, z) := t_1 - 2$. Este é um problema especial em que a equação diferencial da dinâmica é linear e a função objetivo é quadrática e estritamente convexa. Na Secção 12.4, verifica-se que essas condições são suficientes para garantir tanto existência quanto unicidade de soluções para o problema de controle. A equação HJB se escreve:

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t, z) + \min_{|u| \leq 1/2} \left\{ \frac{\partial W}{\partial z}(t, z)u + tz^2 + u^2 \right\} = 0,$$

de onde obtemos:

$$2U_*(t, z; \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < -1 \\ -\lambda, & -1 \leq \lambda \leq 1 \\ -1, & \lambda > 1 \end{cases}.$$

Substituindo U_* na equação HJB, obtemos para a função valor ótimo uma equação diferencial parcial não linear de difícil solução. Uma vez resolvida esta equação, podemos encontrar o controle ótimo usando a estratégia descrita na Observação 207. Desta forma, obtemos

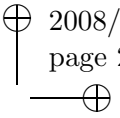
$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1/2, & t \in [0, 1] \\ t/2 - 1, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

como sendo a única solução do problema. \square

12.4 Problema de Controle Linear-Quadrático

Com o objetivo de ilustrar as idéias aqui investigadas, iniciamos a secção considerando o seguinte problema de controle:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(t_0, z_0; u, z) := \frac{1}{2} \int_{t_0}^1 qu(t)^2 dt + \frac{1}{2}z(1)^2 \\ \text{sujeito a} \\ u \in U_{ad}[t_0, 1] := L^1([t_0, 1]; \mathbb{R}^m), \\ z' = z + u(t), \text{ q.s. em } [t_0, 1], z(t_0) = z_0, \end{cases}$$



com condição inicial $(t_0, z_0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$. Tal problema é denominado $P(t_0, z_0)$. A hipótese $q > 0$ reflete o fato da execução de uma estratégia de controle estar associada a custos. A função de Hamilton é dada por:

$$H(t, z, u, \lambda) = \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + L(t, z, u) = \lambda(z + u) + \frac{1}{2}qu^2,$$

de onde obtemos

$$\mathcal{H}(t, z, \lambda) = z\lambda - \frac{\lambda^2}{2q}.$$

A equação HJB se escreve

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, z) + z \frac{\partial V}{\partial z}(t, z) - \frac{1}{2q} \left(\frac{\partial V}{\partial z}(t, z) \right)^2 = 0$$

e as condições de contorno são

$$V(1, z) = \frac{1}{2}z^2, \quad z \in \mathbb{R}.$$

A fim de determinar a função valor, supomos que esta se deixa escrever na forma

$$V(t, z) := \frac{1}{2}v(t)z^2, \quad \forall (t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Substituindo na equação HJB, obtemos para v o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} v' = \frac{v^2}{q} - 2v \\ v(1) = 1 \end{cases}.$$

Através do método de separação de variáveis encontramos a solução:

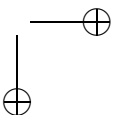
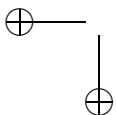
$$v(s) = \frac{2qe^{2(1-s)}}{e^{2(1-s)} + (2q - 1)}, \quad s \in [0, 1].$$

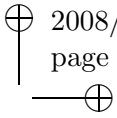
Uma vez conhecida a função valor, podemos calcular a estratégia ótima de controle e a respectiva trajetória ótima para o problema $P(0, z_0)$. Obtemos desta forma

$$\bar{u}(t) = U_*(t, z, \frac{\partial V}{\partial z}(t, z)) = -\frac{v(t)}{q}z, \quad \forall (t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$$

(note que $U_*(t, z, \lambda) = -\lambda/q$). O controle ótimo é assim obtido na forma de controle de realimentação de estado.⁵

⁵É possível provar que \bar{u} é único pois, como $q > 0$, a função objetivo é estritamente convexa em u .





Analizamos agora a família de problemas de controle com dinâmica linear e função objetivo quadrática. Considere o funcional

$$J(t_0, z_0; z, u) := \frac{1}{2} \langle z(T), Dz(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left\langle (z(t), u(t)), \begin{pmatrix} M(t) & R(t) \\ R(t)^* & N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt,$$

(onde $z = z^u$) e o problema de controle

$$P(t_0, z_0) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } J(t_0, z_0; u, z) \\ \text{sujeito a} \\ u \in U_{ad} := L^1([t_0, T]; \mathbb{R}^m), \\ z' = A(t)z + B(t)u, \quad z(t_0) = z_0, \end{cases}$$

onde $t_0 \in [0, T]$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $A, M : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$, $B, N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$, $R : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m,m}$ e $D \in \mathbb{R}^{n,n}$. Consideramos na formulação do problema as seguintes hipóteses:

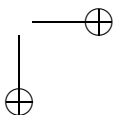
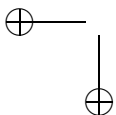
- A1) Não são feitas restrições às variáveis de controle ($\Omega = \mathbb{R}^m$);
- A2) O tempo final T é fixado;
- A3) As aplicações A, B, M, N, R são contínuas;
- A4) D é positiva semidefinida e N é positiva definida para todo $t \in [t_0, t_1]$;
- A5) $\begin{pmatrix} M(t) & R(t) \\ R(t)^* & N(t) \end{pmatrix}$ é positiva semidefinida para todo $t \in [0, T]$.

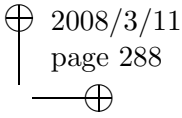
Observação 214. A exigência $N(t) > 0$ substitui a ausência de restrições no controle, enquanto que as hipóteses sobre D e $\begin{pmatrix} M & R \\ R^* & N \end{pmatrix}$ asseguram que a função objetivo representa os custos correspondentes à execução de uma estratégia de controle.

□

Note que o problema linear-quadrático pode ser tratado seguindo a abordagem apresentada na Observação 207. A função de Hamilton, que é dada por

$$H(t, z, u, \lambda) := \langle \lambda, A(t)z + B(t)u \rangle + \frac{1}{2} (\langle z, M(t)z \rangle + \langle z, R(t)u \rangle + \langle u, R^*(t)z \rangle + \langle u, N(t)u \rangle),$$





depende quadraticamente da variável de controle. Portanto, temos⁶

$$U_*(t, z, \lambda) = -N^{-1}(t) (B^*(t)\lambda + R^*(t)z),$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, z, \lambda) &= \langle \lambda, A(t)z - B(t)N^{-1}(t)R^*(t)z \rangle + \frac{1}{2} \langle z, M(t)z \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} (\langle \lambda, B(t)N^{-1}(t)B^*(t)\lambda \rangle + \langle z, R(t)N^{-1}(t)R^*(t)z \rangle) \end{aligned}$$

e a equação HJB se escreve

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &+ \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}, A(t)z - B(t)N^{-1}(t)R^*(t)z \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}, B(t)N^{-1}(t)B^*(t) \frac{\partial V}{\partial z} \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [\langle z, M(t)z \rangle - \langle z, R(t)N^{-1}(t)R^*(t)z \rangle] = 0. \end{aligned}$$

Fazemos agora a hipótese mais importante do desenvolvimento, que nos permite efetivamente determinar V . Suponha que a função valor para o problema linear-quadrático é da forma:

$$V(t, z) := \frac{1}{2} \langle z, Q(t)z \rangle, \quad (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n,$$

onde $Q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ é continuamente diferenciável. Como a função objetivo representa somente custos (i.e. $J \geq 0$), podemos supor ainda que $Q(t)$ é positiva semidefinida para todo $t \in [0, T]$. Substituindo a expressão de V na equação HJB, obtemos⁷

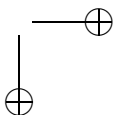
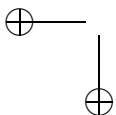
$$0 = \langle z, Y(t)z \rangle,$$

⁶Observe que

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, z, u, \lambda) = B^*(t)\lambda + R^*(t)z + N(t)u.$$

⁷No problema linear-quadrático, a dependência de U_* em relação ao multiplicador de Lagrange pode ser retirada, pois por hipótese $\lambda(t) = V_z(t, z) = Q(t)z(t)$. Temos assim

$$U_*(t, z, \frac{\partial V}{\partial z}) = U_*(t, z) = -N(t)^{-1}(B^*(t)Q(t) + R^*(t))z.$$



onde

$$Y(t) = Q'(t) + Q(t)A(t) + A^*(t)Q(t) + M(t) - (Q(t)B(t) + R(t))N(t)^{-1}(B^*(t)Q(t) + R(t)).$$

A tarefa que se impõe, portanto, é a de encontrar uma função matricial Q tal que $Y(t) \equiv 0$. O teorema apresentado a seguir é o desdobramento natural dos resultados até aqui obtidos.

Teorema 215. *Suponha que as hipóteses $A1), \dots, A5)$ são satisfeitas. Então o problema linear-quadrático $P(t_0, z_0)$ possui como única solução o par (\bar{z}, \bar{u}) , onde o controle ótimo \bar{u} é da forma*

$$(12.15) \quad \bar{u}(s) = U_*(s, z) := -N(s)^{-1}(B^*(s)Q(s) + R(s))z, \quad s \in [t_0, T].$$

A função matricial Q é solução de

$$(12.16) \quad \frac{dQ}{dt} = -QA(t) - A^*(t)Q - M(t) + (QB(t) + R(t))N(t)^{-1}(B^*(t)Q + R(t))$$

no intervalo $(0, T)$ e satisfaz a condição de contorno final

$$(12.17) \quad Q(T) = D.$$

Demonstração: A solução Q de (12.16), (12.17) está unicamente definida em um intervalo máximo de existência $(t', T]$, com $t' < T$. Sabemos ainda que Q é simétrica, pois todas as 'matrizes-coeficiente' da equação diferencial de Riccati o são (veja Exercício 12.3).

Defina a função $W : (t', T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $W(t, x) := \langle x, Q(t)x \rangle$ e considere o seguinte problema de controle:

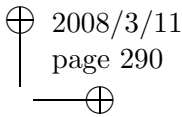
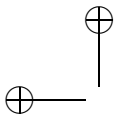
$$P(s, x) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} & \langle z(T), Dz(T) \rangle + \int_s^T L(r, z(r), u(r)) dr \\ \text{sujeito a} & \\ z' = A(r)z + B(r)u, & z(s) = x, \end{cases}$$

onde

$$L(r, y, w) := \left\langle (y \ w), \begin{pmatrix} M(r) & R(r) \\ R(r)^* & N(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (r, y) \in (t', T) \times \mathbb{R}^n.$$

Da escolha de Q como solução de (12.16), concluímos que, para todo $(s, x) \in (t', T) \times \mathbb{R}^n$, vale

$$\frac{\partial W}{\partial t}(s, x) + \min_{w \in \mathbb{R}^m} \left\{ \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(s, x), A(s)x + B(s)w \right\rangle + L(s, x, w) \right\} = 0,$$



sendo o mínimo atingido em $w = U_*(s, x) = -N(s)^{-1}(B^*(s)Q(s) + R(s))x$. Além disso, temos ainda que $W(T, x) = \langle x, Dx \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Agora, dados $(s, \bar{x}) \in (t', T) \times \mathbb{R}^n$, definimos $\bar{z} : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ como a solução do problema de valor inicial

$$z' = A(t)z + B(t)U_*(t, z), \quad z(s) = \bar{x},$$

e $\bar{u} : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é definido por $\bar{u}(t) := U_*(t, \bar{z}(t))$. Então, \bar{u} é admissível para $P(s, \bar{x})$ e $\bar{z} = z^{\bar{u}}$. Do Teorema 206, concluímos que \bar{u} é um controle ótimo para $P(s, \bar{x})$ e que o custo ótimo é dado por $W(s, \bar{x})$. Portanto, basta provarmos que $t' \leq t_0$ para que o teorema fique, a menos da questão da unicidade, demonstrado. Da definição de W , temos que

$$0 \leq W(s, x) = \langle x, Q(s)x \rangle, \quad (s, x) \in (t', T] \times \mathbb{R}^n.$$

Escolhendo para o problema $P(s, \bar{x})$ o controle admissível $\tilde{u} \equiv 0$ e denominando a respectiva trajetória por \tilde{z} , temos

$$\langle \bar{x}, Q(s)\bar{x} \rangle \leq \langle \tilde{z}(T), D\tilde{z}(T) \rangle + \int_s^T \tilde{z}(r)^* M(r) \tilde{z}(r) dr \leq c(s) |\bar{x}|^2,$$

onde a constante $c(s)$ depende somente das matrizes D , M e da matriz de transição Φ_A do sistema $z' = A(t)z$.⁸ Como $Q(s)$ é simétrica semipositiva definida para $s \in [t_0, t_1]$, segue da última desigualdade

$$\|Q(s)\| \leq c := \sup\{c(r) \mid r \in [0, T]\}, \quad s \in [0, T].$$

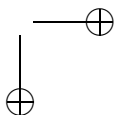
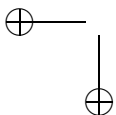
Portanto, o intervalo de existência da solução Q de (12.16) contém $[0, T]$, isto é $t' \leq t_0$. Provamos por fim a unicidade de soluções para o problema linear-quadrático. Seja \bar{u} um controle ótimo para $P(t_0, z_0)$ e $u \neq \bar{u}$ um controle admissível qualquer para o mesmo problema. Dado $\tau > 0$, considere o controle admissível

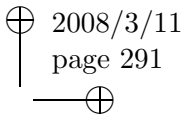
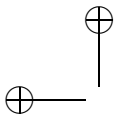
$$u_\tau := \bar{u} + \tau(u - \bar{u}).$$

Denotamos a trajetória correspondente por $z_\tau := z^{u_\tau}$ e o custo associado por $I(\tau) := J(t_0, z_0; u_\tau, z_\tau)$. A aplicação $\tau \mapsto I(\tau)$ não só é duas vezes continuamente diferenciável, como é quadrática, de onde segue

$$I(\tau) = I(0) + \tau I'(0) + \frac{1}{2} \tau^2 I''(0).$$

⁸A constante c é calculada no Exercício 12.2.





Note que $I'(0) = 0$, pois \bar{u} é mínimo global de J (logo, $\tau = 0$ é mínimo local de I), enquanto que

$$I''(0) = \int_{t_0}^T \langle (u(t) - \bar{u}(t)), N(t)(u(t) - \bar{u}(t)) \rangle dt.$$

Como $N(t)$ é positiva definida para todo $t \in [t_0, T]$, então

$$J(t_0, z_0; u_\tau, z_\tau) - J(t_0, z_0; \bar{u}, z^{\bar{u}}) = I(\tau) - I(0) > 0.$$

Como $u \in U_{ad}$ e $\tau > 0$ são arbitrários, a unicidade fica provada. ■

A equação (12.16) é denominada *equação diferencial de Riccati*. Esta equação diferencial corresponde a uma forma particular da equação de Euler–Lagrange para os problemas linear-quadráticos.

Corolário 216. *Seja \bar{u} o controle ótimo obtido no Teorema 215, $\bar{z} := z^{\bar{u}}$ sua trajetória correspondente e Q a solução da equação diferencial de Riccati (12.16). Defina a aplicação*

$$\bar{\lambda} : [t_0, T] \ni t \mapsto Q(t)\bar{z}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

São válidas as afirmativas:

a) A função $\bar{\lambda}$ é solução da equação diferencial

$$\lambda'(t) = -A(t)^* \lambda(t) - M(t)\bar{z}(t) - R(t)\bar{u}(t), \quad t \in (t_0, T);$$

b) A aplicação $[t_0, T] \ni t \mapsto \langle \bar{\lambda}(t), \bar{z}(t) \rangle \in \mathbb{R}$ define a função valor ótimo sobre a trajetória ótima do problema linear-quadrático, i.e.

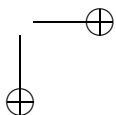
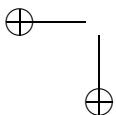
$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}(t), \bar{z}(t) \rangle &= \langle \bar{z}(T), D\bar{z}(T) \rangle \\ &\quad + \int_t^T \left\langle (\bar{z}(t), \bar{u}(t)), \begin{pmatrix} M(t) & R(t) \\ R(t)^* & N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}(t) \\ \bar{u}(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt, \\ &= J(t, \bar{z}(t); \bar{u}|_{[t, T]}, \bar{z}|_{[t, T]}) \\ &= V(t, \bar{z}(t)), \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0, T]$.

Demonstração: Para provar a), basta substituir as expressões obtidas para \bar{u} e Q' em (12.15) e (12.16) na equação

$$\bar{\lambda}'(t) = Q'(t)z(t) + Q(t)(A(t)\bar{z}(t) + B(t)\bar{u}).$$

Quanto ao item b), a afirmativa já foi provada na demonstração do Teorema 215, quando verificamos que $V(t, z) = \langle z, Q(t)z \rangle$, para $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. ■



Uma análise da solubilidade das equações diferenciais de Riccati (não somente as oriundas do problema linear-quadrático, como também a equação geral de Riccati) pode ser encontrada em [Bar, Capítulo 5].

Corolário 217 (Princípio do Máximo). *Seja \bar{u} o controle ótimo fornecido pelo Teorema 215 para o problema $P(t_0, z_0)$. Defina a aplicação $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$(12.18) \quad H(t, z, \lambda, u) := \langle \lambda, A(t)z + B(t)u \rangle + \frac{1}{2} \left\langle (z, u), \begin{pmatrix} M(t) & R(t) \\ R(t)^* & N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Então o problema de valor de contorno

$$(12.19) \quad z' = + \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, z, \lambda, \bar{u}(t)), \quad z(t_0) = z_0,$$

$$(12.20) \quad \lambda' = - \frac{\partial H}{\partial z}(t, z, \lambda, \bar{u}(t)), \quad \lambda(T) = Dz(T)$$

possui solução $(\bar{z}, \bar{\lambda})$, a qual satisfaz

$$(12.21) \quad H(t, \bar{z}(t), \bar{\lambda}(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in \mathbb{R}^m} H(t, \bar{z}(t), \bar{\lambda}(t), u), \quad t \in [t_0, T].$$

Demonstração: Seja \bar{z} a trajetória correspondente ao controle \bar{u} e escolha $\bar{\lambda}$ de acordo com o Corolário 216. Um simples cálculo prova que (12.19), (12.20) são satisfeitas pelo par $(\bar{z}, \bar{\lambda})$. A equação (12.21), por sua vez, está de acordo com o fato do controle ótimo \bar{u} satisfazer (12.15). ■

Do Corolário 217 fica claro que a aplicação H definida em (12.18) é a função de Hamilton para o problema $P(t_0, z_0)$. No exemplo a seguir estudamos a utilização desse corolário para determinar a solução de um problema escalar.

Exemplo 218. Considere o problema de controle ótimo escalar:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \int_0^T (u(t)^2 + z(t)^2) dt \\ \text{sujeito a} & \\ z' = -z + u, & z(0) = z_0. \end{cases}$$

As condições (12.19), (12.20) e (12.21) nos levam às seguintes equações:

$$\begin{aligned} z' &= -z + u, \quad z(0) = z_0, \\ \lambda' &= \lambda - z, \quad \lambda(T) = 0, \\ E_*(t, z, \lambda) &= -\lambda, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Eliminando u nas duas primeiras equações, obtemos o sistema

$$\begin{cases} z' = -z - \lambda, & z(0) = z_0, \\ \lambda' = -z + \lambda, & \lambda(T) = 0. \end{cases}$$

Este problema de valor de contorno pode ser facilmente resolvido utilizando-se a teoria de sistemas lineares, pois a solução geral deste tipo de problema é conhecida. A equação diferencial de Riccati e a condição de contorno se escrevem neste caso como

$$Q' + 2Q - Q^2 = -1, \quad Q(T) = 0.$$

Ou seja, a equação diferencial de Riccati é escalar. Apesar de ser não linear, podemos obter, através de uma mudança de variáveis, uma representação implícita para $Q = Q(t)$. De fato, se r_1 e r_2 são as raízes do polinômio $r^2 - 2r - 1 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} T - t &= \int_t^T dt = \int_Q^0 \frac{ds}{(s - r_1)(s - r_2)} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \left(\int_Q^0 \frac{ds}{s - r_1} - \int_Q^0 \frac{ds}{s - r_2} \right), \end{aligned}$$

que é a representação procurada. \square

Observação 219. Em problemas do tipo linear-quadrático, as condições (12.19), (12.20) e (12.21) são suficientes para otimalidade de uma solução do problema de controle $P(t_0, z_0)$. Para maiores detalhes, veja o Capítulo 10 e a Secção 9.4, onde são discutidas condições suficientes para otimalidade.

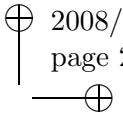
Essas condições suficientes podem ser utilizadas para calcular uma aproximação numérica para a solução de $P(t_0, z_0)$. Para isto procedemos da seguinte forma:

- Elimine \bar{u} do sistema (12.19), (12.20), definindo a função auxiliar E_*

$$\bar{u}(t) = E_*(t, z, \lambda) := -N(t)^{-1}(B(t)^*\lambda + R(t)z);$$

- Obtenha assim o problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} z' = +\frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, z, \lambda, E_*(t, z, \lambda)), & z(t_0) = z_0, \\ \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial z}(t, z, \lambda, E_*(t, z, \lambda)), & \lambda(t_1) = Dz(t_1); \end{cases}$$



• O problema resultante pode ser resolvido numericamente pelo procedimento conhecido como *método de shooting* (veja Secção A.6), utilizando-se um algoritmo do tipo:

1. Encontre uma aproximação inicial λ_0 para $\lambda(t_0)$;
2. Resolva o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} z' = +\frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, z, \lambda, E_*(t, z, \lambda)) , & z(t_0) = z_0, \\ \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial z}(t, z, \lambda, E_*(t, z, \lambda)) , & \lambda(t_0) = \lambda_0; \end{cases}$$
3. Aprimore a aproximação inicial (e.g., através do método de Newton) com o objetivo de satisfazer a equação $\lambda(t_1) = Dz(t_1)$;
4. Retorne ao passo 2;

□

Exercícios

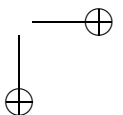
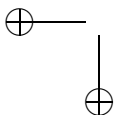
12.1. Verifique que a constante K em (12.1), (12.2) é da forma $c_1 e^{c_2 T}$, com $c_i > 0$ dependendo apenas de K_1 e/ou de K_2 – as constantes em $H1)$ e $H3)$.

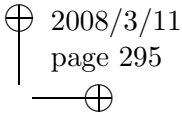
12.2. Mostre que a função $c(s)$ usada para estimar as trajetórias do problema linear-quadrático na demonstração do Teorema 215 é da forma

$$c(s) = \|D\| \|\Phi_A(T, s)\|^2 + \int_s^T \|M(r)\| \|\Phi_A(t, r)\|^2 dr.$$

12.3. Verifique que uma solução Q da equação diferencial matricial de Riccati (12.16) é simétrica.

12.4. Suponha que o conjunto dos controles $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ seja, além de fechado, também limitado. Formule uma hipótese mais fraca do que $H3)$, que ainda permita verificar a Lipschitz continuidade (local) da função valor.





EXERCÍCIOS

12.5. Suponha que $\bar{u} \in U_{ad}[0, T]$ é um controle ótimo para o problema $P(0, z_0)$. Prove que, para todo $\tau \in [0, T]$, a restrição $\bar{u}|_{[0, \tau]}$ é um controle ótimo para o problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \int_0^\tau L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t f(s, z(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, \tau], \\ u \in L^1([0, \tau]; \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [0, \tau], \end{cases}$$

(Tal resultado também é válido para problemas com horizonte infinito; veja Exercício 12.11.)

12.6. Suponha que a função de Hamilton $H(t, z, \lambda, u) = \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + L(t, z, u)$ é convexa.

a) Obtenha a partir da Observação 209 uma condição suficiente para otimalidade de uma estratégia de controle.

(Sugestão: Observe a relação entre $H(t, z, \lambda, u)$ e o termo $U_z^*(f_u^*V_z + L_u)$.)

b) Compare o resultado obtido no item a) com o Teorema 174.

12.7. Considere o problema de tempo mínimo

$$\begin{cases} \text{Minimizar } t_1 \\ \text{sujeito a } z' = -z - \frac{1}{4}uz - 25u, \quad z(0) = 80, \quad z(t_1) = 40, \\ 0 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, t_1], \quad \int_0^{t_1} u(s)ds = 1. \end{cases}$$

Tal problema possui a seguinte interpretação:⁹ Em uma xícara com café, inicialmente a 80°C, é despejado leite frio. A temperatura final da mistura *café com leite* deve ser de 40°C e a quantidade de leite é limitada.

a) Interprete a equação diferencial e as restrições do problema.

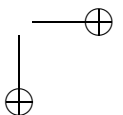
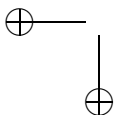
b) Transforme a restrição integral em uma equação diferencial, obtendo para esta condições inicial e final.

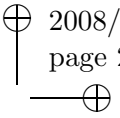
c) Obtenha a equação de Hamilton–Jacobi–Bellman para o problema.

12.8. Calcule a solução do problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \int_0^1 [3z(t)^2 + u(t)]^2 dt \\ \text{sujeito a } z' = z + u, \quad z(0) = z_0. \end{cases}$$

⁹Especialmente interessante para matemáticos, conhecidos por transformarem café em teoremas.





12.9. Dado $T > 0$, considere o problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } z(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt \\ \text{sujeito a } z' = -z + u, z(0) = 1. \end{cases}$$

- a) Obtenha a equação de Hamilton–Jacobi–Bellman.
- b) Encontre a função valor ótimo.
- c) O que se pode afirmar sobre a função valor no limite $T \rightarrow \infty$?

12.10. Dados $T > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, considere o problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \langle a, z(T) \rangle \\ \text{sujeito a } z' = Az + Bu, z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n, \\ |u_i| \leq 1, t \in [0, T], 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

- a) Obtenha a equação de Hamilton–Jacobi–Bellman.
- b) Mostre que a função valor ótimo é dada por

$$W(t, x) := \langle a, e^{-A(t-T)}x \rangle - \int_t^T \sum_{i=1}^m |\langle a, e^{-A(s-T)}b_i \rangle| ds,$$

onde $B = (b_1 | \dots | b_m)$.

- c) Encontre o controle ótimo para o problema.

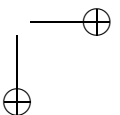
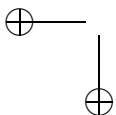
$$\begin{cases} \text{Minimizar } z_1(1)^2 + z_2(1)^2 + \int_0^1 u(t)^2 dt \\ \text{sujeito a } z'_1 = z_2, z'_2 = u, (z_1(0), z_2(0)) = (1, 0). \end{cases}$$

- a) Resolva a equação diferencial de Riccati correspondente.
- b) Calcule o controle ótimo.

12.11. [Horizonte infinito] Sejam $A, M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$, $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m,m}$, funções matriciais continuamente diferenciáveis, com $M(t) > 0$, $N(t) > 0$, $t \geq 0$. Considere o problema linear-quadrático¹⁰

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_0^\infty [\langle z, Mz \rangle + \langle u, Nu \rangle] dt \\ \text{sujeito a} \\ z' = Az + Bu(t), t \in [0, \infty), z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

¹⁰Para detalhes sobre programação dinâmica em horizonte infinito, veja [Leit]. Em particular os problemas linear-quadráticos em horizonte infinito são considerados rm [So].



a) Suponha que Q é solução da equação diferencial de Riccati

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -QA - A^*Q - M + QB N^{-1} B^*Q, \quad t \in (-\infty, 0], \\ Q(0) &= 0. \end{aligned}$$

Defina $Q(t) := Q(-t)$ e obtenha uma equação diferencial, cuja solução seja Q .

b) Mostre que $V(0, z) = \langle z, Q(T)z \rangle$, onde V é a função valor para o problema linear quadrático formulado no intervalo finito $[0, T]$.

c) Prove que, para todo $t_2 > t_1 \geq 0$, temos $\langle z, Q(t_2)z \rangle \geq \langle z, Q(t_1)z \rangle$, $z \in \mathbb{R}^n$.

d) Suponha que o sistema (A, B) é controlável para todo $t > 0$. Prove que o limite $Q := \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ existe.

(Sugestão: Mostre que dado $z_0 \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $t \mapsto \langle z_0, Q(t)z_0 \rangle$ é limitada superiormente por $J(z^u, u)$ para algum processo (z^u, u) com $z^u(0) = z_0$).

e) Prove que a matriz Q , definida no item d), é solução da equação algébrica de Riccati¹¹

$$-QA - A^*Q - M + QB N^{-1} B^*Q = 0.$$

f) Mostre que $\langle z_0, Qz_0 \rangle \leq J(z^u, u)$, para todo processo admissível (z^u, u) com $z^u(0) = z_0$.

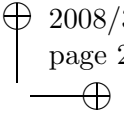
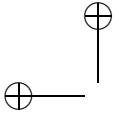
g) Verifique que a função valor para o problema de horizonte infinito é $V(z) = \langle z, Qz \rangle$.

h) Mostre que o controle ótimo para o problema com horizonte infinito é dado pela lei de realimentação $\bar{u}(t) = M(t)^{-1} B^* Q z(t)$, $t \geq 0$, e ainda que $J(\bar{z}, \bar{u}) < \infty$.

i) Prove que $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \bar{z}(t), Q\bar{z}(t) \rangle = 0$, para todo $z_0 \in \mathbb{R}^n$.

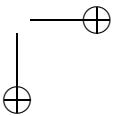
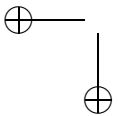
j) Mostre que o controle \bar{u} do item h) é o único controle ótimo para o problema.

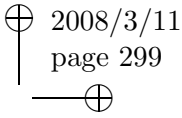
¹¹Para detalhes sobre a solubilidade da equação algébrica de Riccati consulte [Bar], capítulo 5.



12.12. Suponha que $\bar{u} \in U_{ad}[0, \infty)$ é o controle ótimo para o problema do Exercício 12.11. Prove que, para todo $\tau \in [0, \infty)$, a restrição $\bar{u}|_{[0, \tau]}$ é o controle ótimo para o problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \int_0^\tau [\langle z, Mz \rangle + \langle u, Nu \rangle] dt \\ \text{sujeito a} \\ z' = Az + Bu(t), t \in [0, \tau], z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$





Capítulo 13

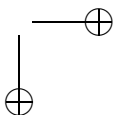
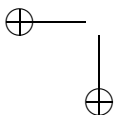
Soluções Viscosas e Função Valor

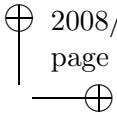
Neste capítulo estudamos o conceito de *soluções de viscosidade* de equações diferenciais parciais (ver [CrLi]). Em particular, estamos interessados nas soluções viscosas da equação HJB, apresentada no Capítulo 12. Nosso objetivo é considerar problemas de controle ótimo, cuja função valor correspondente é (Lipschitz) contínua e verificar que, nesses casos, a função valor é a única solução de viscosidade da equação HJB.

Na Secção 13.1 é introduzido o conceito de soluções viscosas. Na Secção 13.2 analisamos a fórmula de Hopf–Lax, um caso particular da equação de Euler–Lagrange quando o integrando da função objetivo depende somente de z' . Na Secção 13.3 verificamos que a função valor é uma solução de viscosidade da equação HJB. Na Secção 13.4 o princípio do máximo é demonstrado para problemas com horizonte finito (tempo final fixo) utilizando-se técnicas de programação dinâmica. Na Secção 13.5 provamos um resultado de unicidade para soluções viscosas da equação HJB.

13.1 Soluções Viscosas de EDP's

O conceito de solução de viscosidade pode ser formulado para qualquer equação diferencial parcial (EDP), linear ou não. Estamos parti-





cularmente interessados no problema

$$(13.1) \quad \partial_t v + \mathcal{H}(t, x, \partial_x v) = 0, \quad (t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n,$$

$$(13.2) \quad v(1, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

O problema de solucionar a equação (13.1) sujeito à condição final (13.2) é, daqui para frente, denominado de problema (\mathcal{H}, g) . Inicialmente o problema (\mathcal{H}, g) é analisado sujeito às seguintes hipóteses:

$$\mathcal{H} \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \quad g \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}).$$

Note que (13.1) é uma equação diferencial de primeira ordem. Tal equação é, em geral, não linear. Este é certamente o caso quando (13.1) é a equação HJB associada a uma família de problemas de controle ótimo. Sendo assim, o método de curvas características não se aplica, da mesma forma não se aplica uma abordagem *variacional* utilizando *distribuições* e derivadas generalizadas. A alternativa de considerar soluções Lipschitz contínuas de (13.1) que, por serem diferenciáveis quase sempre¹, satisfazem a equação diferencial a menos de um conjunto de medida (de Lebesgue) nula, não é muito atraente, uma vez que podem existir *muitas* dessas soluções.

Nos anos 80 foi desenvolvido por M.G. Crandall e P.L. Lions (medalha Fields em 1996) um trabalho pioneiro na direção de solubilidade de equações parciais não lineares. Por eles foi introduzido o conceito de *soluções de viscosidade*, que não só possibilita um tratamento adequado da equação HJB para soluções não continuamente diferenciáveis, como também abre caminho para a dedução do princípio do máximo (veja Secção 13.4).

Definição 220. Uma função $v : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada *solução viscosa* da equação (13.1) quando satisfaz:

a) v é contínua;

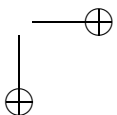
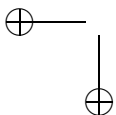
b) Para toda $\phi \in C^1((0, 1) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tal que $v - \phi$ possui um máximo local em $(t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$, temos

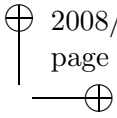
$$\partial_t \phi(t, x) + \mathcal{H}(t, x, \partial_x \phi(t, x)) \geq 0.$$

c) Para toda $\phi \in C^1((0, 1) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tal que $v - \phi$ possui um mínimo local em $(t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$, temos

$$\partial_t \phi(t, x) + \mathcal{H}(t, x, \partial_x \phi(t, x)) \leq 0.$$

¹Consulte o teorema de Hademacher, por exemplo em [Mo].





Caso satisfaça somente *a)* e *b)*, a função v é denominada *sub-solução viscosa*. Caso v satisfaça somente *a)* e *c)*, é denominada *super-solução viscosa*. As funções ϕ utilizadas na caracterização das soluções viscosas são as chamadas *funções teste*. \square

Observação 221. Na literatura, muitas vezes é utilizada na definição das soluções viscosas, ao invés da condição *a)*, a exigência: v *uniformemente contínua e limitada*. No contexto da teoria de controle tal exigência é por demais restritiva, pois o domínio de definição de v é ilimitado. O caráter da Definição 220 é estritamente local e é de simples verificação o fato de que, uma função v que a satisfaça, também satisfará a outra variante em qualquer subconjunto compacto de $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$.

Na Definição 220 podemos usar como espaço de funções teste $C^\infty((0, 1) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, ao invés de $C^1((0, 1) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e, ainda assim, obter o mesmo conceito de solução (veja Lema 222).

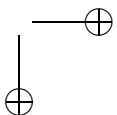
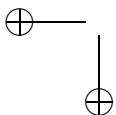
É possível definir soluções viscosas para equações diferenciais parciais genéricas de primeira e segunda ordem. Isto entretanto foge aos nossos objetivos. O leitor interessado deve consultar [FISo]. \square

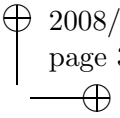
Como qualquer novo conceito de solução, a teoria de soluções viscosas tem como objetivo natural a investigação dos seguintes temas:

1. Esclarecimento de questões inerentes ao conceito de solução, como: existência, unicidade, estabilidade (dependência contínua de condições iniciais);
2. Utilização do conceito na teoria de controle, a fim de esclarecer as seguintes perguntas:
A função valor é uma solução viscosa de HJB? O princípio do máximo pode ser novamente obtido?

Neste capítulo investigamos o conceito de soluções viscosas exclusivamente no contexto da teoria de controle ótimo. Existem aplicações extremamente interessantes desta teoria para equações parciais não lineares de segunda ordem (como o método da viscosidade esvanescente). O leitor interessado na teoria de EDP's pode encontrar maiores detalhes na obra de J.L. Lions (veja por exemplo [Li]). A origem do termo *viscosidade* é esclarecida no final desta secção.

Lema 222. *Seja $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e diferenciável no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Então existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^m)$ tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e $u - \varphi$ possui*





um mínimo local estrito em x_0 .

Demonstração: Podemos supor sem perda de generalidade que $x_0 = 0$, $u(x_0) = 0$, $\nabla u(x_0) = 0$ (de fato, caso contrário basta provar o teorema para $\tilde{u}(x) := u(x + x_0) - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), x \rangle$). Das hipóteses, temos que

$$u(x) = |x|v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{com } \lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0.$$

Defina

$$\rho(r) := \max_{|x| \leq r} |v(x)|, \quad r \geq 0.$$

Logo, ρ é contínua, monótona não decrescente e $\rho(0) = 0$. Defina agora $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) := \int_{|x|}^{2|x|} \rho(r) dr + |x|^2.$$

De $|\varphi(x)| \leq |x|\rho(2|x|) + |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, segue que

$$\varphi(0) = 0, \quad \nabla \varphi(0) = 0.$$

Para $x \neq 0$, temos

$$\nabla \varphi(x) = 2x|x|^{-1}\rho(2|x|) - x|x|^{-1}\rho(|x|) + 2x.$$

Podemos então concluir que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^m)$. Agora, para $x \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} u(x) - \varphi(x) &= |x|v(x) - \int_{|x|}^{2|x|} \rho(r) dr - |x|^2 \\ &\leq |x|\rho(|x|) - \int_{|x|}^{2|x|} \rho(r) dr - |x|^2 \leq -|x|^2. \end{aligned}$$

Logo,

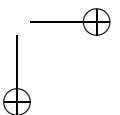
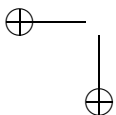
$$u(x) - \varphi(x) < 0 = u(0) - \varphi(0), \quad x \neq 0,$$

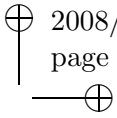
completando a demonstração. ■

Teorema 223. *Seja v uma solução viscosa de (13.1), tal que v é diferenciável no ponto $(t_0, x_0) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$. Então temos*

$$\partial_t v(t_0, x_0) + \mathcal{H}(t_0, x_0, \partial_x v(t_0, x_0)) = 0.$$

Demonstração: Aplicando o Lema 222, temos que existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, tal que $v - \varphi$ possui um mínimo local em (t_0, x_0) . Esta função





φ é agora *convolvida* com um *mollifier*² η^ε , gerando uma função $\varphi^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi^\varepsilon(t, x) &:= (\eta^\varepsilon * \varphi)(t, x) \\ &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(t - \tau, x - \xi) \varphi(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Temos assim a convergência

$$\varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi, \quad \partial_t \varphi^\varepsilon \rightarrow \partial_t \varphi, \quad \partial_x \varphi^\varepsilon \rightarrow \partial_x \varphi$$

uniforme em uma vizinhança compacta A de (t_0, x_0) . Portanto, $v - \varphi^\varepsilon$ possui um máximo $(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$ em A . É fácil ver que $(t^\varepsilon, x^\varepsilon) \rightarrow (t_0, x_0)$. Da Definição 220 segue que

$$\partial_t \varphi^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon) + \mathcal{H}(t^\varepsilon, x^\varepsilon, \partial_x \varphi^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon)) \geq 0.$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + \mathcal{H}(t_0, x_0, \partial_x \varphi(t_0, x_0)) \geq 0.$$

Entretanto, como

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) = \partial_t v(t_0, x_0), \quad \partial_x \varphi(t_0, x_0) = \partial_x v(t_0, x_0),$$

fica provado que

$$\partial_t v(t_0, x_0) + \mathcal{H}(t_0, x_0, \partial_x v(t_0, x_0)) \geq 0.$$

A desigualdade

$$\partial_t v(t_0, x_0) + \mathcal{H}(t_0, x_0, \partial_x v(t_0, x_0)) \leq 0$$

é provada de forma análoga. ■

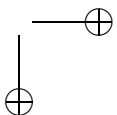
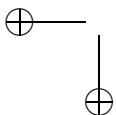
Definição 224. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Os conjuntos

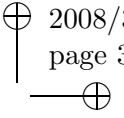
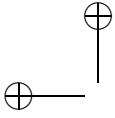
$$\partial^+ F(x) := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{y \rightarrow x} (F(y) - F(x) - \langle p, y - x \rangle) |y - x|^{-1} \leq 0\},$$

$$\partial^- F(x) := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{y \rightarrow x} (F(y) - F(x) - \langle p, y - x \rangle) |y - x|^{-1} \geq 0\}$$

são denominados respectivamente de *superdiferencial* e *subdiferencial* de F no ponto $x \in A$. □

²Denominamos por *mollifier* as funções $\eta \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ que satisfazem $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) dt dx = 1$. Maiores detalhes sobre essas funções, assim como sobre a operação de convolução de funções são encontrados em [Ru2].





As definições acima correspondem à tentativa de recuperar o conceito de *derivada* para aplicações não suaves. Os conjuntos $\partial^+ F(x)$ e $\partial^- F(x)$ contém elementos que servem a este propósito. Note que os casos $\partial^+ F(x) = \emptyset$, $\partial^- F(x) = \emptyset$ não estão excluídos. Entretanto, para aplicações Lipschitz contínuas a possibilidade que isto não aconteça aumenta drasticamente. Este é um dos pontos de interesse da denominada *análise não suave*. No contexto da análise convexa esta questão está bem esclarecida.

Para funções de várias variáveis utilizamos ainda a noção de sub(super)diferenciais parciais $\partial_x^+ F(x, y)$ ou $\partial_y^- F(x, y), \dots$, sendo esses definidos de forma óbvia.

Lema 225. *Seja $v : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. São equivalentes as afirmações:*

- a) v é solução viscosa de (13.1);
- b) Os conjuntos $\partial^+ v(t, x), \partial^- v(t, x)$ satisfazem:
 - b.1) $q + \mathcal{H}(t, x, p) \geq 0, \forall (q, p) \in \partial^+ v(t, x), (t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n;$
 - b.2) $q + \mathcal{H}(t, x, p) \leq 0, \forall (q, p) \in \partial^- v(t, x), (t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n.$

Demonstração: (a) \implies (b) Seja $(t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$ e $(q, p) \in \partial^+ v(t, x)$. Construímos a seguir uma função teste ϕ , com $(q, p) \in \partial^+ \phi(t, x)$ e $v(s, y) - \phi(s, y) \leq v(t, x) - \phi(t, x)$, para todo (s, y) em uma vizinhança adequada. Para tanto considere:

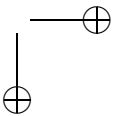
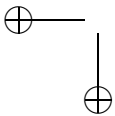
$$\begin{aligned} & v(s, y) - v(t, x) - q(t - s) - \langle p, y - x \rangle \\ & \leq \max \left\{ \frac{v(s, y) - v(t, x) - q(s - t) - \langle p, y - x \rangle}{|s - t| + |y - x|}, 0 \right\} (|s - t| + |y - x|) \\ & \leq \int_{\alpha(s, y)}^{2\alpha(s, y)} \sup_{0 < \alpha(s', y') \leq r'} \max \left\{ \frac{v(s', y') - v(t, x) - q(s' - t) - \langle p, y' - x \rangle}{|s' - t| + |y' - x|}, 0 \right\} dr', \end{aligned}$$

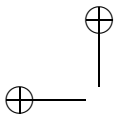
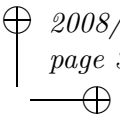
onde $\alpha(s, y) := \sqrt{|s - t|^2 + |y - x|^2}$. Defina

$$g(s, y) := \frac{v(s, y) - v(t, x) - q(s - t) - \langle p, y - x \rangle}{|s - t| + |y - x|},$$

para $\alpha(s, y) > 0$ e

$$G(s, y) := \begin{cases} \sup\{0, g(s, y)\} & , \text{ se } \alpha(s, y) > 0 \\ 0 & , \text{ senão.} \end{cases}$$





Note que G é contínua, pois $(q, p) \in \partial^+ v(t, x)$. Agora defina

$$h(r) := \sup_{0 \leq \alpha(s,y) \leq r} G(s, y), \quad r \geq 0.$$

Obviamente h é contínua. Defina ainda ϕ através de

$$\phi(s, y) := q(s - t) + \langle p, y - x \rangle + \int_{\alpha(s,y)}^{2\alpha(s,y)} h(r') dr'.$$

Logo, $\phi \in C^1((0, 1) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e, da construção acima, segue que

$$v(s, y) - \phi(s, y) \leq v(t, x) - \phi(t, x) \quad \forall (s, y) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n.$$

(Note que a construção acima pode ser antecipada a partir do Lema 222.) Como v é uma solução viscosa, o item *b.1)* segue agora da definição de ϕ . A desigualdade no item *b.2)* é obtida de forma análoga.

(b) \implies (a) Seja $(t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$ e $\phi \in C^1((0, 1) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ uma função teste, tal que $v - \phi$ possui um máximo local em (t, x) . Sem perda de generalidade temos

$$v(s, y) - \phi(s, y) \leq v(t, x) - \phi(t, x) \quad \forall (s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n.$$

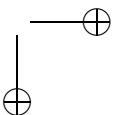
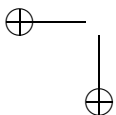
Seja $(q, p) \in \partial^+ \phi(t, x)$. Como ϕ é diferenciável, o conjunto $\partial^+ \phi(t, x)$ é constituído de exatamente um elemento: a derivada de ϕ (veja Lema 226 a seguir). Temos então

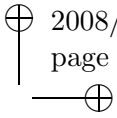
$$\begin{aligned} \limsup_{(s,y) \rightarrow (t,x)} \frac{v(s, y) - v(t, x) - q(s - t) - \langle p, y - x \rangle}{|s - t| + |y - x|} \\ \leq \limsup_{(s,y) \rightarrow (t,x)} \frac{\phi(s, y) - \phi(t, x) - q(s - t) - \langle p, y - x \rangle}{|s - t| + |y - x|} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(q, p) \in \partial^+ v(t, x)$ e, da desigualdade no item *b.1)*, segue que

$$\partial_t \phi(t, x) + \mathcal{H}(t, x, \partial_x \phi(t, x)) \geq 0.$$

Assim, fica provada a desigualdade *b)* da Definição 220. A desigualdade *c)* desta definição é provada de forma análoga. Logo, v é uma solução viscosa de (13.1). ■





Lema 226. *Seja $v : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. São verdadeiras as afirmativas:*

- a) $\partial^+v(t, x), \partial^-v(t, x)$ são convexos para todo $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$;
- b) Se v é diferenciável em $(t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$, então

$$\partial^+v(t, x) = \partial^-v(t, x) = \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, x), \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right) \right\};$$

- c) Se v é lipschitz contínua em $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$, i.e. v satisfaz

$$|v(s, y) - v(t, x)| \leq \kappa \sqrt{|s - t|^2 + |y - x|^2}, \quad (s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$$

para algum $\kappa \geq 0$, então

$$\sqrt{q^2 + |p|^2} \leq \kappa,$$

para todo $(q, p) \in \partial^+v(t, x) \cup \partial^-v(t, x)$, $(t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração: O item a) segue imediatamente das definições de sub e superdiferencial, da mesma forma que o item b). A fim de provar c), tome $(q, p) \in \partial^+v(t, x)$. Temos então

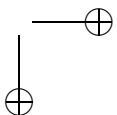
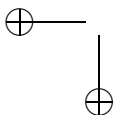
$$\begin{aligned} -\kappa + (q^2 + |p|^2)^{1/2} &= -\kappa + \sup_{(h, z) \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{-qh - \langle p, z \rangle}{(h^2 + |z|^2)^{1/2}} \\ &= -\kappa + \limsup_{(h, z) \rightarrow 0} \frac{-qh - \langle p, z \rangle}{(h^2 + |z|^2)^{1/2}} \\ &\leq \limsup_{(h, z) \rightarrow 0} \frac{v(t + h, x + z) - v(t, x) - qh - \langle p, z \rangle}{(h^2 + |z|^2)^{1/2}} \leq 0, \end{aligned}$$

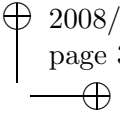
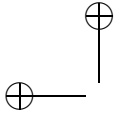
onde κ é a constante de Lipschitz de v . Um resultado análogo é obtido para o caso $(q, p) \in \partial^-v(t, x)$, completando assim a demonstração. ■

Fica assim claro que, nos pontos em que uma solução viscosa de (13.1) é diferenciável, ela satisfaz a equação diferencial no sentido clássico. Note ainda que, caso $v - \varphi$ possua um máximo local em (t_0, x_0) , podemos (no que diz respeito à definição das soluções de viscosidade) supor que este máximo é estrito. De fato, definindo a função

$$\tilde{\varphi}(t, x) := \varphi(t, x) + \delta(|x - x_0|^2 + |t - t_0|^2), \quad (\text{onde } \delta > 0),$$

temos que $v - \tilde{\varphi}$ possui um máximo local estrito em (t_0, x_0) e ainda que os gradientes de φ e $\tilde{\varphi}$ coincidem no ponto (t_0, x_0) .





Concluimos esta secção fazendo uma referência à origem do termo *viscosidade*, utilizado na Definição 220. Uma vez formulado o problema (13.1), (13.2), considere o seguinte problema auxiliar (do tipo parabólico):

$$(13.3) \quad \varepsilon \Delta v^\varepsilon + \partial_t v^\varepsilon + \mathcal{H}(t, x, \partial_x v^\varepsilon) = 0, \quad (t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n,$$

$$(13.4) \quad v^\varepsilon(1, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Com hipóteses relativamente fracas sobre a regularidade de \mathcal{H} e g é possível garantir, para cada $\varepsilon > 0$, a existência de uma solução *suave* v^ε . Como nos modelos relacionados à fluido-dinâmica, o termo Δv está associado com a viscosidade do fluido (onde v representa um campo de velocidades), a estratégia de aproximar a solução de (13.1), (13.2) introduzindo o termo de viscosidade artificial $\varepsilon \Delta v^\varepsilon$ e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ é conhecida como *método da viscosidade esvanescente*.

Defina v como o limite (localmente uniforme) da seqüência v^ε . Dada uma função teste $\varphi \in C^\infty((0, 1) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tal que $v - \varphi$ possui um máximo local no ponto (t_0, x_0) , então $v^\varepsilon - \varphi$ possuem máximos locais nos pontos $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$ e ainda $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_\varepsilon = t_0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x_0$. Daí segue que

$$\begin{aligned} \partial_t v^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) &= \partial_t \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon), & \partial_x v^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) &= \partial_x \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon), \\ -\Delta v^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) &\geq -\Delta \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon), \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\partial_t v^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) + H(t_\varepsilon, x_\varepsilon, \partial_x \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon)) = \varepsilon \Delta v^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq -\varepsilon \Delta \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon).$$

Como conseqüência da convergência (localmente) uniforme $v^\varepsilon \rightarrow v$, temos

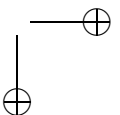
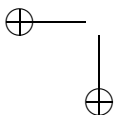
$$\partial_t \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon) + H(t_\varepsilon, x_\varepsilon, \partial_x \varphi(t_\varepsilon, x_\varepsilon)) \geq 0,$$

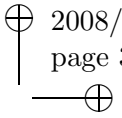
de onde segue a desigualdade utilizada na Definição 220.

13.2 Fórmula de Hopf-Lax

Nesta secção, consideramos sob a ótica da programação dinâmica um problema comum ao cálculo variacional e à teoria de controle ótimo.

$$P(t, x) \quad \begin{cases} \text{Minimizar} & \int_t^1 L(z'(s)) ds + g(z(1)) \\ \text{sujeito a} & z(t) = x \end{cases}$$





Por $V(t, x)$ denominamos a função valor associado ao problema $P(t, x)$, $[0, 1] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V(t, x) \in \mathbb{R}$. Consideramos o problema formulado com as seguintes hipóteses:

L1) A função L é convexa e coerciva, i.e. $\lim_{|q| \rightarrow \infty} \frac{L(q)}{|q|} = \infty$;

L2) A função g é Lipschitz contínua (com constante de Lipschitz l_g).

Definimos agora

$$W(t, x) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{(1-t)L((y-x)/(1-t)) + g(y)\}, \quad 0 \leq t < 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Da coercividade de L e da Lipschitz continuidade de g , segue que $W(t, x)$ está bem definida, podendo inclusive o ínfimo, na definição de W , ser substituído por mínimo.

Lema 227. *Suponha que L e g satisfazem as hipóteses L1), L2). Temos então, para todo $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$, que*

$$V(t, x) = W(t, x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{(1-t)L(1-t)^{-1}(y-x) + g(y)\}.$$

Demonstração: Seja $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, defina $z(s) := x + \frac{s-t}{1-t}(y-x)$, para $s \in [t, 1]$. Como $z(t) = x$, temos que

$$V(t, x) \leq \int_t^1 L((y-x)/(1-t)) ds + g(y) = (1-t)L((y-x)/(1-t)) + g(y).$$

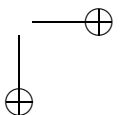
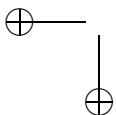
Como $y \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário, temos que $V(t, x) \leq W(t, x)$. Seja agora $z \in C^1([t, 1]; \mathbb{R}^n)$ com $z(t) = x$. Da desigualdade de Jensen (veja [Wa1]), obtemos para $y := z(1)$

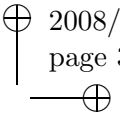
$$(1-t)L\left((1-t)^{-1} \int_t^1 z'(s) ds\right) + g(y) \leq \int_t^1 L(z'(s)) ds + g(y),$$

ficando assim provado que $V(t, x) \geq W(t, x)$. ■

Lema 228. *Suponha que L e g satisfazem as hipóteses L1), L2). Temos então, para $0 \leq t < s < 1$, que*

$$V(t, x) = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \{(s-t)L((z-x)/(s-t)) + V(s, z)\}.$$





Demonstração: Sejam $0 \leq t < s < 1$. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, escolha $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(1-s)L((y-z)/(1-s)) + g(y) = V(s, z).$$

Temos então

$$\begin{aligned} V(t, x) &\leq (1-t)L((y-x)/(1-t)) + g(y) \\ &= (1-t)L\left(\frac{1-s}{1-t}(y-z)/(1-s)\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1-s}{1-t}\right)(z-x)/(s-t) + g(y) \\ &\leq (1-t)\left\{\frac{1-s}{1-t}L((y-z)/(1-s))\right. \\ &\quad \left.+ \left(1 - \frac{1-s}{1-t}\right)L((z-x)/(s-t)) + g(y)\right\} \\ &= (s-t)L((z-x)/(s-t)) + V(s, z). \end{aligned}$$

Escolha $y \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $V(t, x) = (1-t)L((y-x)/(1-t)) + g(y)$ e defina

$$z := \frac{1-s}{1-t}x + \left(1 - \frac{1-s}{1-t}\right)y.$$

Temos então

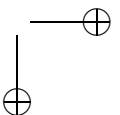
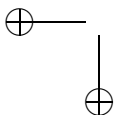
$$\begin{aligned} &(s-t)L((z-x)/(s-t)) + V(s, z) \\ &\leq (s-t)L((y-x)/(1-t)) \\ &\quad + (1-s)L((y-x)/(1-t)) + g(y) \\ &= (1-t)L((1-t)^{-1}(y-x)) + g(y) \\ &= V(t, x), \end{aligned}$$

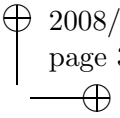
de onde segue o lema. ■

Lema 229. *Suponha que L e g satisfazem as hipóteses $L1$), $L2$). Então a função valor V é Lipschitz contínua.*

Demonstração: Seja $t \in [0, 1)$ e $u, v \in \mathbb{R}^n$. Escolha $y \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $V(t, u) = (1-t)L((y-u)/(1-t)) + g(y)$. Definindo agora $w := v + g - u$, temos

$$\begin{aligned} V(t, v) - V(t, u) &\leq (1-t)L((w-v)/(1-t)) + g(w) \\ &\quad - (1-t)L((y-u)/(1-t)) - g(y) \\ &\leq g(v+y-u) - g(y) \leq l_g|v-u|. \end{aligned}$$





(l_g é a constante de Lipschitz de g .) Por simetria, obtemos

$$(13.5) \quad |V(t, v) - V(t, u)| \leq l_g |v - u|.$$

Esta desigualdade vale também para $t = 1$, pois $V(1, v) = g(v)$ e $V(1, u) = g(u)$. Seja agora $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, 1)$, temos então

$$V(t, x) \leq (1 - t)L(0) + g(x)$$

e ainda

$$\begin{aligned} V(t, x) &\leq g(x) + \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{(1 - t)L((y - x)/(1 - t)) + g(y) - g(x)\} \\ &\leq g(x) - (1 - t) \max_{w \in \mathbb{R}^n} \{l_g |w| - L(w)\} \\ &= g(x) - (1 - t) \max_{|g| \leq l_g} \max_{w \in \mathbb{R}^n} \{\langle w, g \rangle - L(w)\}. \end{aligned}$$

Portanto, $|V(t, x) - g(x)| \leq c|1 - t|$. De (13.5) e da equação de otimalidade do Lema 228, segue ainda que

$$|V(t_1, x) - V(t_2, x)| \leq c|t_1 - t_2|, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Juntando essas desigualdades, o lema fica provado. ■

Lema 230. *Suponha que L e g satisfazem as hipóteses L1), L2) e que existe constante $c > 0$ tal que*

$$g(x + z) - 2g(x) + g(x - z) \leq c|z|^2, \quad x, z \in \mathbb{R}^n.$$

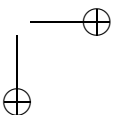
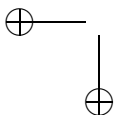
Então temos

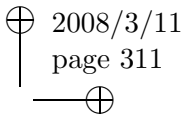
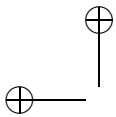
$$V(t, x + z) - 2V(t, x) + V(t, x - z) \leq c|z|^2, \quad x, z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, 1].$$

Demonstração: Escolhendo $y \in \mathbb{R}^n$ com $V(t, x) = (1 - t)L((y - x)/(1 - t)) + g(y)$, temos

$$\begin{aligned} &V(t, x + z) - 2V(t, x) + V(t, x - z) \\ &\leq (1 - t)L((y + z - x - z)/(1 - t)) + g(y + z) \\ &\quad - 2(1 - t)L((y - x)/(1 - t)) - 2g(y) \\ &\quad + (1 - t)L((y - z - x + z)/(1 - t)) + g(y - z) \\ &= g(y + z) - 2g(y) + g(y - z) \\ &\leq c|z|^2 \end{aligned}$$

e o teorema fica provado. ■





Definimos agora a função de Hamilton

$$\mathcal{H}(p) := \inf_{w \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, w \rangle + L(w) \}, \quad p \in \mathbb{R}^n$$

correspondente ao problema $P(t, x)$. No teorema a seguir verificamos que a função valor é uma solução viscosa da equação HJB.

Teorema 231. *Suponha que L e g satisfazem as hipóteses $L1)$, $L2)$. Então a função valor V é uma solução viscosa da equação diferencial*

$$\partial_t v + \mathcal{H}(\partial_x v) = 0.$$

Demonstração: Seja $(t_0, x_0) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ uma função teste, tal que $V - \varphi$ possui um máximo local em (t_0, x_0) . Para $t_0 < s < 1$, temos

$$V(t_0, x_0) \leq (s - t_0)L((s - t_0)^{-1}(z - x_0)) + V(s, z).$$

Agora, como $V - \varphi$ possui um máximo local em (t_0, x_0) , temos que

$$\varphi(t_0, x_0) - \varphi(t, x) \leq V(t_0, x_0) - V(t, x),$$

para todo (t, x) em uma vizinhança apropriada de (t_0, x_0) . Logo, para $q \in \mathbb{R}^n$ e $h > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\varphi(t_0 + h, x_0 + hq) - \varphi(t_0, x_0) \geq V(t_0 + h, x_0 + hq) - V(t_0, x_0) \geq -hL(q).$$

Portanto, $\partial_t \varphi(t_0, x_0) + \langle \partial_x \varphi(t_0, x_0), q \rangle \geq -L(q)$, i.e.

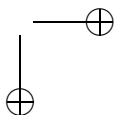
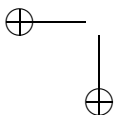
$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + \mathcal{H}(\partial_x \varphi)(t_0, x_0) \geq 0.$$

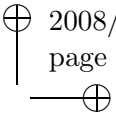
Seja agora $\varphi \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tal que $V - \varphi$ possui um mínimo local em (t_0, x_0) . Suponha que existe $r > 0$, para o qual

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + \mathcal{H}(\partial_x \varphi)(t_0, x_0) \geq r.$$

Tome $h > 0$ suficientemente pequeno e escolha $z \in \mathbb{R}^n$ com $V(t_0, x_0) = hL(h^{-1}(z - x_0)) + V(t_0 + h, z)$. Temos então, para $q := h^{-1}(z - x_0)$, que

$$\begin{aligned} & \varphi(t_0 + h, z) - \varphi(t_0, x_0) \\ &= h \int_0^1 [\langle \partial_x \varphi(t_0 + sh, sz + (1 - s)x_0), q \rangle \\ & \quad + \partial_t \varphi(t_0 + sh, sz + (1 - s)x_0)] ds \\ & \geq hr - hL(q) = hr - V(t_0, x_0) + V(t_0 + h, z), \end{aligned}$$





que pode ser reescrito como

$$V(t_0 + h, z) - \varphi(t_0 + h, z) + hr \leq V(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0).$$

Porém, esta desigualdade contradiz o fato de (t_0, x_0) ser mínimo local de $V - \varphi$. ■

13.3 Função Valor como Solução Viscosa de HJB

Considere novamente a família de problemas de controle ótimo do Capítulo 10

$$P(s, y) \begin{cases} \text{Minimizar } J(s, y; u) := \int_s^1 L(t, z(t), u(t))dt + g(z(1)) \\ \text{sujeito a} \\ u \in U_{ad}[s, 1] := \{w : [s, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m \mid w \text{ mensurável,} \\ \quad w(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [s, 1]\}, \\ z'(t) = f(t, z(t), u(t)), \text{ q.s. em } [s, 1], z(s) = y, \end{cases}$$

onde $L : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, satisfazem as seguintes hipóteses:

- A1) f , L são contínuas e $f(\cdot, \cdot, u)$, $L(\cdot, \cdot, u)$ são contínuas em (t, z) , uniformemente em $u \in \Omega \neq \emptyset$;
- A2) Para todo $(t, u) \in [0, 1] \times \Omega$, as aplicações $f(t, \cdot, u)$, $L(t, \cdot, u)$, $g(\cdot)$ são continuamente diferenciáveis;
- A3) Existe $K > 0$ tal que, para todo $(t, u) \in [0, 1] \times \Omega$ e todo $x, z \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$|f(t, x, u) - f(t, z, u)| + |L(t, x, u) - L(t, z, u)| + |g(x) - g(z)| \leq K|x - z|,$$

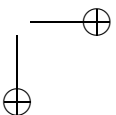
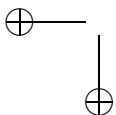
$$|f(t, x, u)| + |L(t, x, u)| + |g(x)| \leq K(1 + |x|).$$

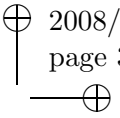
A função de Hamilton H é definida por

$$H(t, x, \omega, p) := \langle p, f(t, x, \omega) \rangle + L(t, x, \omega), \quad (t, x, \omega, p) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

A função valor ótimo

$$V : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \ni (s, y) \longmapsto \inf_{u \in U_{ad}[s, 1]} J(s, y; u) \in \mathbb{R}$$





está bem definida pelo Lema 200 e é, em particular, contínua na faixa $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$. Além disso, vale o princípio de otimalidade de Bellman:

$$(13.6) \quad V(s, y) = \inf_{u \in U_{ad}[s,1]} \left\{ \int_s^t L(r, z^{u,y}(r), u(r)) dr + V(t, z^{u,y}(t)) \right\}, \quad t \in [s, 1],$$

onde a trajetória $z^{u,y}$ é a solução do problema de valor inicial

$$(13.7) \quad z' = f(t, z, u(t)) \text{ q.s. em } [s, 1], \quad z(s) = y.$$

Dado $t \in [s, 1]$, definimos agora a aplicação $\mathcal{T}_{s,t}$ que associa a cada função $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função $(\mathcal{T}_{s,t}\psi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$(\mathcal{T}_{s,t}\psi)(y) := \inf_{u \in U_{ad}[s,t]} \left\{ \int_s^t L(r, z^{u,y}(r), u(r)) dr + \psi(z^{u,y}(t)) \right\}.$$

É de simples verificação o fato de

$$V(s, y) = (\mathcal{T}_{s,t} V(t, \cdot))(y).$$

(Em particular $V(s, y) = (\mathcal{T}_{s,1} g)(y)$.) A fim de considerar o problema (13.1), (13.2) associado a $P(s, y)$, definimos a função

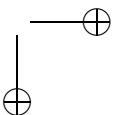
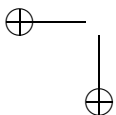
$$\mathcal{H}(t, x, p) := \inf_{\omega \in \Omega} \{ \langle p, f(t, x, \omega) \rangle + L(t, x, \omega) \}, \quad (t, x, p) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Teorema 232. *A função valor V do problema $P(0, y)$ é uma solução viscosa da equação de Hamilton–Jacobi–Bellman (13.1).*

Demonstração: Seja $\phi \in C^1((0, 1) \times \mathbb{R}^n)$ uma função teste tal que $V - \phi$ possui um máximo local em $(t_0, x_0) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$. Podemos sempre supor $V(t_0, x_0) = \phi(t_0, x_0)$ (por que?). Logo, existe uma vizinhança $[t_0, t_0 + \delta] \times A$ de (t_0, x_0) onde temos

$$\phi(t, x) \geq V(t, x) \text{ para todo } (t, x) \in [t_0, t_0 + \delta] \times A.$$

Seja $h \in (0, \delta)$ e $\omega \in \Omega$ um elemento qualquer. Escolha agora $u_1 \in U_{ad}[t_0, 1]$ com $u_1(t) = \omega$, $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Logo, existe $h_0 \in (0, \delta)$ com



$z^{u_1, x_0}(t_0 + h) \in A$, para todo $h \in (0, h_0)$. Para $h \in (0, h_0)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= h^{-1}(V(t_0, x_0) - \phi(t_0, x_0)) \\ &= h^{-1} \inf_{u \in U_{ad}[t_0, t_0+h]} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} L(r, z^{u, x_0}(r), u(r)) dr \right. \\ &\quad \left. + V(t_0 + h, z^{u, x_0}(t_0 + h)) - \phi(t_0, x_0) \right\} \\ &\leq h^{-1} \inf_{u \in U_{ad}[t_0, t_0+h]} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} L(r, z^{u, x_0}(r), u(r)) dr \right. \\ &\quad \left. + \phi(t_0 + h, z^{u, x_0}(t_0 + h)) - \phi(t_0, x_0) \right\} \\ &\leq h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} L(r, z^{u_1, x_0}(r), u_1(r)) dr \\ &\quad + h^{-1}(\phi(t_0 + h, z^{u_1, x_0}(t_0 + h)) - \phi(t_0, x_0)) \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$0 \leq \partial_t \phi(t_0, x_0) + \langle f(t_0, x_0, \omega), \partial_x \phi(t_0, x_0) \rangle + L(t_0, x_0, \omega).$$

Portanto,

$$\partial_t \phi(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, \partial_x \phi(t_0, x_0)) \geq 0.$$

Como $\omega \in \Omega$ é arbitrário, o item *b*) da Definição 220 fica provado. Seja agora $\phi \in C^1((0, 1) \times \mathbb{R}^n)$ uma função teste tal que $V - \phi$ possui um mínimo local em $(t_0, x_0) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n$. Novamente podemos supor sem perda de generalidade que $V(t_0, x_0) = \phi(t_0, x_0)$. Logo, existe uma vizinhança $[t_0, t_0 + \delta] \times A$ de (t_0, x_0) tal que

$$\phi(t, x) \leq V(t, x) \text{ para todo } (t, x) \in [t_0, t_0 + \delta] \times A.$$

Escolha agora para cada $n \in \mathbb{N}$ um controle $u^n \in U_{ad}[t_0, 1]$, tal que

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{T}_{t_0, t_0 + \frac{1}{n}} \phi(t_0 + \frac{1}{n}, \cdot) \right)(x_0) &\geq -\frac{1}{n^2} + \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} L(r, z^n(r), u^n(r)) dr \\ &\quad + \phi(t_0 + \frac{1}{n}, z^n(t_0 + \frac{1}{n})), \end{aligned}$$

onde $z^n := z^{u^n, x_0}$ é o estado (definido em $[t_0, 1]$) correspondente ao controle u^n . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $z^n(t_0 + \frac{1}{n}) \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos então

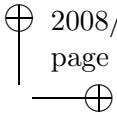
$$\begin{aligned}
 0 &= n \left[(\mathcal{T}_{t_0, t_0 + \frac{1}{n}} V(t_0 + \frac{1}{n}, \cdot))(x_0) - \phi(t_0, x_0) \right] \\
 &\geq n \left[(\mathcal{T}_{t_0, t_0 + \frac{1}{n}} \phi(t_0 + \frac{1}{n}, \cdot))(x_0) - \phi(t_0, x_0) \right] \\
 &\geq -\frac{1}{n} + n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} L(r, z^n(r), u^n(r)) dr \\
 &\quad + n \left(\phi(t_0 + \frac{1}{n}, z^n(t_0 + \frac{1}{n})) - \phi(t_0, x_0) \right) \\
 &= -\frac{1}{n} + n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} L(r, z^n(r), u^n(r)) dr \\
 &\quad + n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} \left[\partial_t \phi(r, z^n(r)) + \langle f(r, z^n(r), u^n(r)), \partial_x \phi(r, z^n(r)) \rangle \right] dr \\
 &= \partial_t \phi(t_0, x_0) + n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} L(t_0, x_0, u^n(r)) dr \\
 &\quad + n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} \langle f(t_0, x_0, u^n(r)), \partial_x \phi(t_0, x_0) \rangle dr + R_n,
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 R_n &= n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} [\partial_t \phi(r, z^n(r)) - \partial_t \phi(t_0, x_0)] dr \\
 &\quad + \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} [L(r, z^n(r), u^n(r)) - L(t_0, x_0, u^n(r))] dr - \frac{1}{n} \\
 &\quad + n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} [\langle f(r, z^n(r), u^n(r)), \partial_x \phi(r, z^n(r)) \rangle \\
 &\quad - \langle f(t_0, x_0, u^n(r)), \partial_x \phi(t_0, x_0) \rangle] dr.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 &n \left[(\mathcal{T}_{t_0, t_0 + \frac{1}{n}} \phi(t_0 + \frac{1}{n}, \cdot))(x_0) - \phi(t_0, x_0) \right] \\
 &\geq \partial_t \phi(t_0, x_0) + \langle f_n, \partial_x \phi(t_0, x_0) \rangle + l_n + R_n,
 \end{aligned}$$



onde

$$f_n := n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} f(t_0, x_0, u^n(r)) dr, \quad l_n := n \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} L(t_0, x_0, u^n(r)) dr.$$

Da hipótese (A3) segue agora que $\lim_{r \downarrow t_0} z^n(r) = x_0$ uniformemente em n . Da continuidade de L e f segue ainda que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. Defina

$$B := \{(f, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (f, l) = (f(t_0, x_0, \omega), L(t_0, x_0, \omega)) \text{ para algum } \omega \in \Omega\}.$$

Temos então da definição de f_n, l_n que

$$(f_n, l_n) \in \overline{\text{co}}(B) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Temos, portanto, que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left[(\mathcal{T}_{t_0, t_0 + \frac{1}{n}} \phi(t_0 + \frac{1}{n}, \cdot))(x_0) - \phi(t_0, x_0) \right] \\ &\geq \partial_t \phi(t_0, x_0) + \inf_{(f, l) \in \overline{\text{co}}B} \{ \langle f, \partial_x \phi(t_0, x_0) \rangle + l \} \\ &= \partial_t \phi(t_0, x_0) + \inf_{(f, l) \in B} \{ \langle f, \partial_x \phi(t_0, x_0) \rangle + l \} \\ &= \partial_t \phi(t_0, x_0) + \inf_{\omega \in \Omega} H(t_0, x_0, \omega, \partial_x \phi(t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Note que, para obter a penúltima linha acima, usamos a identidade

$$\inf_{(f, l) \in \overline{\text{co}}B} \{ \langle f, \partial_x \phi(t_0, x_0) \rangle + l \} = \inf_{(f, l) \in B} \{ \langle f, \partial_x \phi(t_0, x_0) \rangle + l \},$$

que é justificada pelo fato de estarmos lidando com uma função linear em (f, l) . ■

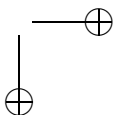
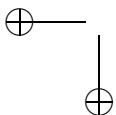
Exemplo 233. Considere o problema

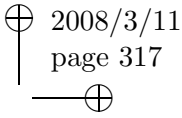
$$\partial_t v + \mathcal{H}(t, x, v) = 0, \text{ em } (0, 1) \times (-1, 1), \quad v(1, x) = 0, \text{ em } [-1, 1],$$

onde $\mathcal{H}(t, x, v) := -(\partial_x v)^2 + 1$. É de simples verificação o fato da função

$$v(t, x) := \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \geq t \\ 1 - t, & |x| < t \end{cases}$$

ser uma solução da equação HJB. □





13.4 Princípio do Máximo

Investigamos novamente o princípio do máximo apresentado no Capítulo 10. Para tanto, utilizamos a função de Hamilton correspondente ao problema $P(s, y)$

$$H(t, x, u, p) := \langle p, f(t, x, u) \rangle + L(t, x, u).$$

Como vimos na Secção 10.1, este teorema de condições necessárias para otimalidade nos garante que, dado um processo ótimo (\bar{u}, \bar{z}) para $P(s, y)$, então:

- Existe um multiplicador $\lambda : [s, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que o par (\bar{z}, λ) é uma solução do problema de valor de contorno (sistema Hamiltoniano)

$$\begin{aligned} z' &= f(t, z, \bar{u}(t)), \quad z(s) = y, \\ \lambda' &= -\frac{\partial f}{\partial x}(t, z, \bar{u}(t))^* \lambda - \frac{\partial L}{\partial x}(t, z, \bar{u}(t))^*, \quad \lambda(1) = -\nabla g(z(1))^*; \end{aligned}$$

- É satisfeita a condição de máximo (ou de otimalidade)

$$H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \lambda(t)) = \inf_{w \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), w, \lambda(t)).$$

A função λ é denominada *variável adjunta* e o conjunto de condições acima é denominado simplifcadamente por $MP(s, y)$. Nesta secção, consideramos a tarefa de obter estas condições utilizando uma abordagem na linha da programação dinâmica.

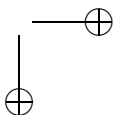
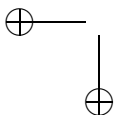
Lema 234. *Seja (\bar{u}, \bar{z}) um processo admissível para $P(0, y)$ e $\phi(\cdot, \cdot)$ a matriz de transição para a equação diferencial*

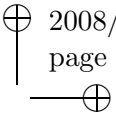
$$w' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t))w.$$

São verdadeiras as afirmativas:

- $\sup_{s \leq r \leq t \leq 1} |\phi(t, r)| < \infty$;
- $\phi'(\cdot, s) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t))\phi(\cdot, s)$ em $[0, 1]$, $\phi(s, s) = I$, $s \in [0, 1]$.
- Se λ é uma solução do problema de valor inicial

$$\lambda' = -\frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t))^* \lambda - \frac{\partial L}{\partial x}(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)), \quad \lambda(1) = -\nabla g(\bar{z}(1)),$$





então temos

$$\lambda(t) = \phi(1, t)^* \nabla g(\bar{z}(1)) + \int_t^1 \phi(r, t)^* \frac{\partial L}{\partial x}(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) dr, \quad t \in [s, 1].$$

Demonstração: Tais resultados são padrão na teoria de equações diferenciais ordinárias lineares, e podem ser obtidos diretamente dos resultados apresentados no Apêndice A. ■

Teorema 235. *Seja (\bar{u}, \bar{z}) um processo ótimo para $P(s, y)$ e seja λ a variável adjunta correspondente. Temos então, para todo $t \in (s, 1)$, que*

$$\partial_x^- V(t, \bar{z}(t)) \subset \{\lambda(t)\} \subset \partial_x^+ V(t, \bar{z}(t)).$$

Demonstração: Seja $t \in (s, 1)$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Denotamos por $z := z^{\bar{u}, x}$ a trajetória correspondente ao controle \bar{u} , satisfazendo a condição inicial $z(t) = x$, i.e.

$$z(q) = x + \int_t^q f(r, z(r), \bar{u}(r)) dr, \quad q \in [t, 1].$$

Temos então, para $q \in [t, 1]$, que

$$\begin{aligned} z(q) - \bar{z}(q) &= x - \bar{z}(t) + \int_t^q (f(r, z(r), \bar{u}(r)) - f(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r))) dr \\ &= x - \bar{z}(t) + \int_t^q \frac{\partial f}{\partial x}(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r))(z(r) - \bar{z}(r)) dr \\ &\quad + \int_t^q \varepsilon(r, x) dr, \end{aligned}$$

onde

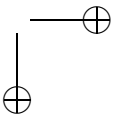
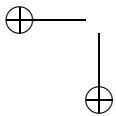
$$\varepsilon(r, x) := f(r, z(r), \bar{u}(r)) - f(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) - \frac{\partial f}{\partial x}(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r))(z(r) - \bar{z}(r)).$$

Da hipótese A2), segue que

$$\lim_{x \rightarrow \bar{z}(t)} \varepsilon(r, x) |z(r) - \bar{z}(r)|^{-1} = 0, \quad \forall r \in [t, 1], \quad \sup_{r \in [t, 1], x \in \mathbb{R}^n} |\varepsilon(r, x)| < \infty.$$

Utilizando agora a matriz de transição ϕ , podemos escrever

$$z(q) - \bar{z}(q) = \phi(q, t)(x - \bar{z}(t)) + \int_t^q \phi(q, r) \varepsilon(r, x) dr,$$



obtendo assim

$$\begin{aligned} V(t, x) - V(t, \bar{z}(t)) &\leq g(z(1)) - g(\bar{z}(1)) \\ &\quad + \int_t^1 (L(r, z(r), \bar{u}(r)) - L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r))) dr \\ &= \langle \nabla g(\bar{z}(1)), z(1) - \bar{z}(1) \rangle \\ &\quad + \varepsilon_0 \int_t^1 \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)), z(r) - \bar{z}(r) \right\rangle dr \\ &\quad + \int_t^1 \varepsilon_1(r, x) dr, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &:= g(z(1)) - g(\bar{z}(1)) - \langle \nabla g(\bar{z}(1)), z(1) - \bar{z}(1) \rangle, \\ \varepsilon_1(r, x) &:= L(r, z(r), \bar{u}(r)) - L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) \\ &\quad - \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)), z(r) - \bar{z}(r) \right\rangle. \end{aligned}$$

Podemos então concluir que

$$\begin{aligned} V(t, x) - V(t, \bar{z}(t)) &\leq \langle \nabla g(\bar{z}(1)), \phi(1, t)(x - \bar{z}(t)) \rangle \\ &\quad + \int_t^1 \phi(1, r) \varepsilon(r, x) dr + \varepsilon_0 \\ &\quad + \int_t^1 \varepsilon_1(r, x) dr \\ &\quad + \int_t^1 \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)), \phi(r, t)(x - \bar{z}(t)) \right\rangle dr \\ &\quad + \int_t^1 \int_t^r \phi(r, r') \varepsilon(r', x) dr' dr \\ &= \langle \lambda(t), x - \bar{z}(t) \rangle + \varepsilon_2(t, x), \end{aligned}$$

onde $\lim_{x \rightarrow \bar{z}(t)} \varepsilon_2(r, x) |x - \bar{z}(t)|^{-1} = 0$. Portanto, $\lambda(t) \in \partial_x^+ V(t, \bar{z}(t))$. Por outro lado, se $p \in \partial_x^- V(t, \bar{z}(t))$, então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{x \rightarrow \bar{z}(t)} \{ (V(t, x) - V(t, \bar{z}(t)) - \langle p, x - \bar{z}(t) \rangle) |x - \bar{z}(t)|^{-1} \} \\ &\leq \liminf_{x \rightarrow \bar{z}(t)} \{ \langle \lambda(t) - p, x - \bar{z}(t) \rangle |x - \bar{z}(t)|^{-1} \}, \end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \bar{z}(t)} \{ \langle \lambda(t) - p, x - \bar{z}(t) \rangle |x - \bar{z}(t)|^{-1} \} \\ = \limsup_{x \rightarrow \bar{z}(t)} \{ \langle \lambda(t) - p, x - \bar{z}(t) \rangle |x - \bar{z}(t)|^{-1} \}. \end{aligned}$$

Logo, $p = \lambda(t)$ e o teorema fica provado. ■

Lema 236. *Seja (\bar{u}, \bar{z}) um processo ótimo para $P(s, y)$. Então, a menos de um conjunto de medida nula de $(s, 1)$, temos que, se $(q, p) \in \partial^+ V(t, \bar{z}(t)) \cap \partial^- V(t, \bar{z}(t))$,³ então*

$$p = \lambda(t), \quad q = H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), p) = \inf_{\omega \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \omega, p).$$

Demonstração: Note que

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} \int_t^{t+h} f(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) dr = f(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)),$$

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} \int_t^{t+h} L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) dr = L(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t))$$

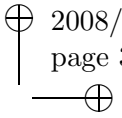
quase sempre em $[s, 1]$, pois a aplicação $r \mapsto (f(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)), L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)))$ é integrável. Seja $t \in (s, 1)$ tal que os limites acima existam. Tome agora $(q, p) \in \partial^+ V(t, \bar{z}(t)) \cap \partial^- V(t, \bar{z}(t))$. Da definição do subdiferencial $\partial^+ V(t, \bar{z}(t))$, temos que

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(t+h, \bar{z}(t+h)) - V(t, \bar{z}(t)) - qh - \langle p, \bar{z}(t+h) - \bar{z}(t) \rangle}{h + |\bar{z}(t+h) - \bar{z}(t)|} \leq 0.$$

Logo, segue da equação de otimalidade (13.6)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} -L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) dr - qh \right. \\ &\quad \left. - \int_t^{t+h} \langle p, f(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) \rangle dr \right) \\ &= -L(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)) - q - \langle p, f(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)) \rangle. \end{aligned}$$

³Como vimos no Lema 226, esta condição é equivalente a exigir a diferenciabilidade de V no ponto $(t, \bar{z}(t))$.



De onde obtemos que

$$q + H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), p) \leq 0.$$

De forma análoga, provamos que $-q \leq H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), p)$. Como, em particular, $p \in \partial_x^- V(t, \bar{z}(t))$, segue do Teorema 235 que $p = \lambda(t)$, onde λ é a variável adjunta. Note ainda que $(q, p) \in \partial^+ V(t, \bar{z}(t)) \cap \partial^- V(t, \bar{z}(t))$, o que juntamente com o Lema 225 nos permite concluir que

$$H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \lambda(t)) = \inf_{\omega \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \omega, \lambda(t)) = \mathcal{H}(t, \bar{z}(t), \lambda(t)).$$

Fica assim provado o lema. ■

Exemplo 237. Considere o problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & -z(1) \\ \text{sujeito a} & \\ z' = zu, & z(0) = 0, \\ u(t) \in [0, 1] & \text{q.s. em } [0, 1]. \end{cases}$$

É imediato verificar que $\bar{u} \equiv 1$, $\bar{z} \equiv 0$ formam um processo ótimo, e que a função valor é dada por

$$V(s, y) = \begin{cases} -ye^{1-s}, & y > 0 \\ -y & , y \leq 0 \end{cases}$$

Para $(s, y) = (0, 0)$, temos $\partial_x^- V(0, 0) = \emptyset$, $\partial_x^+ V(0, 0) = [-e, 1]$, $\lambda(0) = -1$. □

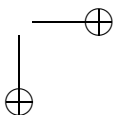
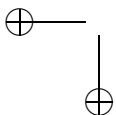
Teorema 238. *Seja (\bar{u}, \bar{z}) um processo ótimo para $P(s, y)$. Então, a menos de um conjunto de medida nula de $(s, 1)$, temos que*

$$\partial^- V(t, \bar{z}(t)) \subset \{(-H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \lambda(t)), \lambda(t))\} \subset \partial^+ V(t, \bar{z}(t)).$$

Demonstração: A primeira inclusão é consequência direta dos Lemas 234 e 236. A fim de provar a segunda inclusão, tome $t \in (s, 1)$ com

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} \int_t^{t+h} f(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) dr = f(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)),$$

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} \int_t^{t+h} L(r, \bar{z}(r), \bar{u}(r)) dr = L(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)).$$



Seja $\tau > t$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Considere a restrição $u := \bar{u}|_{[\tau,1]}$ e defina a trajetória correspondente $z := z^{u,x}$ (i.e. $z(\tau) = x$, $z' = f(\cdot, z, u)$, q.s.). Para $r \in [\tau, 1]$, temos

$$\begin{aligned} z(r) - \bar{z}(r) &= x - y + \int_{\tau}^r f(r', z(r'), u(r')) dr' - \int_t^r f(r', \bar{z}(r'), \bar{u}(r')) dr' \\ &= x - y - \int_t^{\tau} f(r', \bar{z}(r'), \bar{u}(r')) dr' \\ &\quad + \int_{\tau}^r f(r', z(r'), \bar{u}(r')) - f(r', \bar{z}(r'), \bar{u}(r')) dr' \\ &= x - y - \int_t^{\tau} f(r', \bar{z}(r'), \bar{u}(r')) dr' \\ &\quad + \int_{\tau}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r', \bar{z}(r'), \bar{u}(r')) + \varepsilon(r'; \tau, x) \right) (z(r') - \bar{z}(r')) dr', \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow t \\ x \rightarrow \bar{z}(t)}} \varepsilon(\cdot; \tau, x) = 0,$$

uniformemente. Utilizando agora o método de variação de constantes, obtemos

$$\begin{aligned} z(r) - \bar{z}(r) &= \phi(r, \tau) \left\{ x - y - \int_t^{\tau} f(r', \bar{z}(r'), \bar{u}(r')) dr' \right\} \\ &\quad + \int_{\tau}^r \phi(r, 0) \int_{\tau}^0 \varepsilon(r'; \tau, x) (z(r') - \bar{z}(r')) dr \end{aligned}$$

e o teorema fica provado. ■

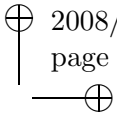
Do Teorema 238, concluímos que a função valor V satisfaz a equação diferencial HJB no sentido clássico, caso ela seja diferenciável.

Teorema 239. *Seja (\bar{u}, \bar{z}) um processo ótimo para $P(s, y)$. Então são válidas as condições MP(s, y) do princípio do máximo.*

Demonstração: Como $(-H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \lambda(t)), \lambda(t)) \in \partial^+ V(t, \bar{z}(t))$ q.s. em $(s, 1)$, temos que

$$H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \lambda(t)) \leq \inf_{\omega \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \omega, \lambda(t)).$$

O teorema segue agora desta desigualdade. ■



13.5 Unicidade de Soluções Viscosas

Considere os seguintes problemas de valor inicial:

$$(13.8) \quad \begin{aligned} \partial_t u + \mathcal{H}(t, x, \partial_x u) &= f(t, x), \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$(13.9) \quad \begin{aligned} \partial_t v + \mathcal{H}(t, x, \partial_x v) &= g(t, x), \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ v(0, x) &= v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

(Em comparação com o problema (13.1), (13.2), trocamos a condição final por uma inicial e consideramos um intervalo de tempo $[0, T]$ genérico.) Consideramos a seguir as seguintes hipóteses:

B1) $\mathcal{H} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0, v_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas;

B2) $|f(t, x)| + |g(t, x)| + |u_0(x)| + |v_0(x)| \leq K(1 + |x|)$, para $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 240. *Suponha que as hipóteses B1) e B2) são satisfeitas. Sejam u_0, v_0 funções uniformemente contínuas e u, v soluções viscosas de (13.8) e (13.9), respectivamente. Então, temos para todo $t \in [0, T]$:*

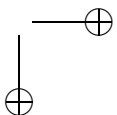
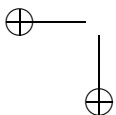
$$(13.10) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x)) + \int_0^t \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (f(s, x) - g(s, x)) ds.$$

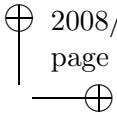
Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que o lado direito de (13.10) é finito, i.e.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x)) < \infty, \quad \int_0^t \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (f(s, x) - g(s, x)) ds < \infty \quad \forall t \in [0, T].$$

Das hipóteses B1) e B2), concluímos que:

1. $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x)) < \infty$, para todo $t \in [0, T]$;
2. $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (f(t, x) - g(t, x)) < \infty$, q.s. em $[0, T]$;
3. $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (f(t, x) - g(t, x)) < \infty$, para todo $t \in [0, T]$;
4. $[0, T] \ni t \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x))$ é contínua;





5. $[0, T] \ni t \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (f(t, x) - g(t, x))$ é contínua;
6. Existe $c > 0$ com $|u(t, x) - v(s, y)| \leq c(1 + |x - y|)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n, t, s \in [0, T]$.

Suponha por contradição que (13.10) não é válida. Logo, existe $\sigma_0 > 0$ com

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x)) - \int_0^t \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (f(s, x) - g(s, x)) ds \right\} \\ > \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x)) + \sigma_0. \end{aligned}$$

Dados $\alpha, \beta > 0$, defina

$$\begin{aligned} \phi(t, x, s, y) &:= u(t, x) - v(s, y) - \frac{1}{2\alpha}|x - y|^2 - \frac{1}{2\beta}|t - s|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (f(\tau, x) - g(\tau, x)) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^s \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (f(\tau, x) - g(\tau, x)) d\tau. \end{aligned}$$

Por conta do crescimento linear de u, v, f, g (hipótese B2)), temos

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \phi(t, x, s, y) = -\infty.$$

Portanto, ϕ é limitada superiormente e existe (t_0, x_0, y_0, s_0) tal que

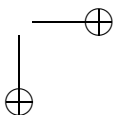
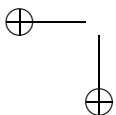
$$\phi(t_0, x_0, s_0, y_0) + \sigma_0 > \sup\{\phi(t, x, s, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, t, s \in [0, T]\}.$$

Temos então que

$$\phi(t_0, x_0, t_0, x_0) + \phi(s_0, y_0, s_0, y_0) < 2\phi(t_0, x_0, s_0, y_0) + 2\sigma_0.$$

De onde segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}|x_0 - y_0|^2 + \frac{1}{\beta}|t_0 - s_0|^2 &< u(t_0, x_0) - u(s_0, y_0) \\ &\quad + v(t_0, x_0) - v(s_0, y_0) + 2\sigma_0 \\ &\leq c(1 + |x_0 - y_0|) + 2\sigma_0, \end{aligned}$$



onde $c > 0$. Temos então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}|x_0 - y_0|^2 + \frac{1}{\beta}|t_0 - s_0|^2 &\leq c + \frac{c^2}{2}\alpha + \frac{1}{2\alpha}|x_0 - y_0|^2 + 2\sigma_0, \\ \frac{1}{2\alpha}|x_0 - y_0|^2 + \frac{1}{\beta}|t_0 - s_0|^2 &\leq c + \frac{c^2}{2}\alpha + 2\sigma_0. \end{aligned}$$

Daí obtemos que

$$|x_0 - y_0| \leq c_\alpha \text{ com } \lim_{\alpha \downarrow 0} c_\alpha = 0, \quad |t_0 - s_0| \leq c_\beta \text{ com } \lim_{\beta \downarrow 0} c_\beta = 0.$$

Portanto, existe $\varepsilon_0 > 0$ e $\tau_0 > 0$ com $t_0 \geq \tau_0$, $s_0 \geq \tau_0$ independentes de $\alpha, \beta \in (0, \varepsilon_0)$. De fato, se assim não fosse, existiriam seqüências $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\lim_n \alpha_n = \lim_n \beta_n = 0, \quad \lim_n t_n = 0 \text{ ou } \lim_n s_n = 0,$$

e ainda

$$\phi(t_n, x_n, s_n, y_n) + \sigma_0 > \sup\{\phi(t, x, s, y) \mid t, s \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Teríamos então $\lim_n (x_n - y_n) = 0$, $\lim_n t_n = \lim_n s_n = 0$. Isso implicaria, para cada $n \in \mathbb{N}$, que

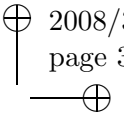
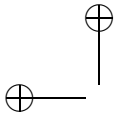
$$\begin{aligned} \sup\{\phi(t, x, t, x) \mid t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n\} &\leq \sup\{\phi(t, x, s, y) \mid t, s \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n\} \\ &< \phi(t_n, x_n, s_n, y_n) + \sigma_0 \\ &\leq u(t_n, x_n) - v(s_n, y_n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{t_n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (f(\tau, x) - g(\tau, x)) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{s_n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (f(\tau, x) - g(\tau, x)) d\tau + \sigma_0. \end{aligned}$$

Tomando o limite $n \rightarrow \infty$ e observando a continuidade uniforme de u e v , obteríamos a contradição

$$\sup\{\phi(t, x, t, x) \mid t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n\} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x)) + \sigma_0.$$

Sejam, portanto, $\alpha, \beta \in (0, \varepsilon_0)$, e $\delta \in (0, \frac{1}{2}\sigma_0)$. Temos que

$$\phi(t_0, x_0, s_0, y_0) + \delta > \sup\{\phi(t, x, s, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, t, s \in [0, T]\}.$$



Tome $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ com

$$\xi(x_0, y_0) = 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad |\nabla \xi| \leq 1.$$

Para $\sigma \in (0, \frac{\sigma_0}{2T})$ fixo, defina

$$\psi(t, x, s, y) := \phi(t, x, s, y) + \delta \xi(x, y) - \sigma t, \quad t, s \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Da definição de ψ e do fato de ξ possuir suporte compacto, podemos garantir a existência de (t_1, x_1, s_1, y_1) tal que

$$\psi(t_1, x_1, s_1, y_1) = \sup\{\phi(t, x, s, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, t, s \in [0, T]\}.$$

Como $\delta \in (0, \frac{1}{2}\sigma_0)$ e $0 \leq \xi \leq 1$, segue daí que

$$\phi(t_1, x_1, s_1, y_1) + \sigma_0 > \sup\{\phi(t, x, s, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, t, s \in [0, T]\}.$$

Portanto, (veja acima)

$$|x_1 - y_1| \leq c_\alpha, \quad |t_1 - s_1| \leq c_\beta.$$

Defina agora

$$\begin{aligned} \phi^1(t, x) &:= u(t, x) - \phi(t, x, s, y) - \delta \xi(x, y) + \sigma t, \\ \phi^2(t, x) &:= -v(t, x) - \phi(t, x, s, y) + \delta \xi(x, y) - \sigma t. \end{aligned}$$

Temos então

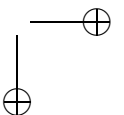
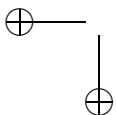
$$u - \phi^1 \text{ possui um máximo em } (t_1, x_1),$$

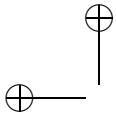
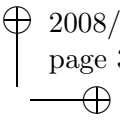
$$v - \phi^2 \text{ possui um máximo em } (s_1, y_1).$$

Como u, v são soluções de viscosidade, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}(t_1 - s_1) + \frac{1}{2} \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (f(t_1, x') - g(t_1, x')) + \sigma \\ + \mathcal{H}(t_1, x_1, \frac{1}{\alpha}(x_1 - y_1) - \delta \nabla_x \xi(x_1, y_1)) \leq f(t_1, x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}(t_1 - s_1) - \frac{1}{2} \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (f(s_1, x') - g(s_1, x')) + \sigma \\ + \mathcal{H}(s_1, y_1, \frac{1}{\alpha}(x_1 - y_1) + \delta \nabla_y \xi(x_1, y_1)) \geq g(s_1, y_1). \end{aligned}$$





Subtraindo as desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} f(t_1, x_1) - g(s_1, y_1) &\geq \sigma + \frac{1}{2} \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (f(t_1, x') - g(t_1, x')) \\ &\quad + \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (f(s_1, x') - g(s_1, x')) \\ &\quad + \mathcal{H}(t_1, x_1, \frac{1}{\alpha}(x_1 - y_1) - \delta \nabla_x \xi(x_1, y_1)) \\ &\quad - \mathcal{H}(s_1, y_1, \frac{1}{\alpha}(x_1 - y_1) + \delta \nabla_y \xi(x_1, y_1)). \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} &f(t_1, x_1) - g(s_1, y_1) + \omega_{H,R}(|t_1 - s_1| + \delta) \\ &\geq \sigma + \frac{1}{2} \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (f(t_1, x') - g(t_1, x')) + \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (f(s_1, x') - g(s_1, x')), \end{aligned}$$

onde

$$\omega_{H,R}(r) := \sup\{|H(t, p) - H(s, q)| \mid |t - s| + |p - q| \leq r, |p|, |q| \leq R\}$$

e $R = R_\alpha = \frac{c_\alpha}{\alpha} + \sigma_0$, pois

$$\frac{1}{\alpha}|x_1 - y_1| + \delta|\nabla_x \xi(x_1, y_1)| \leq \frac{1}{\alpha}|x_1 - y_1| + \delta \leq \frac{c_\alpha}{\alpha} + \sigma_0.$$

Temos assim que

$$\sigma \leq \omega_{f,g}(|t_1 - s_1| + |x_1 - y_1|) + \omega_{H,R}(|t_1 - s_1| + \delta),$$

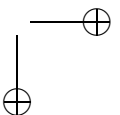
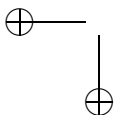
onde

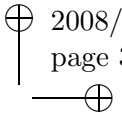
$$\omega_{f,g}(r) := \frac{1}{2} \sup\{|f(t, x) - f(s, y)| + |g(t, x) - g(s, y)| \mid |t - s| + |x - y| \leq r\}.$$

Tomando o limite $\beta \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, obtemos

$$\sigma \leq \omega_{f,g}(|t_1 - s_1| + |x_1 - y_1|).$$

Tomando agora o limite $\alpha \rightarrow 0$, obtemos finalmente a contradição $\sigma \leq 0$. ■





Exercícios

13.1. Seja $H : (0, 1) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e sejam v_k , $k \in \mathbb{N}$, soluções viscosas de

$$\partial_t v + H(t, x, \partial_x v) = 0, \quad (t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^n.$$

Mostre que se v_k converge uniformemente para v , então v também é solução viscosa da equação diferencial.

13.2. Considere a equação

$$|v'(x)| = 1, \quad x \in (-1, 1). \quad (\dagger)$$

a) Verifique que $v_1(x) := 1 - |x|$, $x \in [-1, 1]$ é uma solução viscosa de (\dagger) , enquanto $v_2(x) := |x| - 1$, $x \in [-1, 1]$ não o é.

b) Encontre uma solução viscosa de

$$-|v'(x)| = -1, \quad x \in (-1, 1), \quad v(-1) = v(1) = 0. \quad (\ddagger)$$

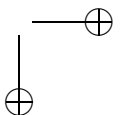
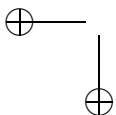
13.3. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Defina

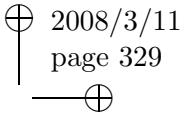
$$v(x) := \text{dist}(x, \partial U), \quad x \in U.$$

a) Mostre que v é lipschitz contínua em U .

b) Verifique que v é uma solução viscosa de $|\nabla v(x)| = 1$, $x \in U$.

c) Analise os itens a) e b), caso U seja apenas aberto.





Apêndice A

Equações Diferenciais Ordinárias

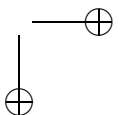
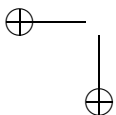
Neste capítulo são discutidos resultados relacionados com a teoria de resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO's). Tal análise é fundamental para a teoria de controle, pois os sistemas de controle podem ser interpretados como problemas de evolução nos quais temos a liberdade de escolher determinados parâmetros que influenciam sua dinâmica.

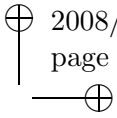
Os tópicos aqui abordados dizem respeito à representação de soluções, assim como à análise de resultados sobre existência, unicidade e dependência contínua em relação às condições iniciais. As três primeiras secções tratam de sistemas lineares de EDO's, sendo problemas autônomos e não autônomos tratados separadamente. Nas Secções A.4 e A.5 são estudados resultados relacionados com a teoria geral de equações ordinárias. A Secção A.6 se destina a analisar um método iterativo para aproximar soluções de sistemas de EDO's com condições de contorno especiais.

A.1 Exponencial de uma Matriz

Ao resolver a equação diferencial ordinária escalar

$$z'(t) = az,$$





onde $a \in \mathbb{R}$, obtemos a seguinte fórmula para a solução do problema com condição inicial $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}$:

$$z(t) = z_0 e^{at}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad z_0 \text{ constante.}$$

Nesta e na próxima secção discutimos a equação análoga quando a é uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais e $z : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$.

Adotamos no texto as seguintes notações:

Representamos uma norma qualquer nos espaços \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n por $\|\cdot\|$.¹ Normas especiais nestes espaços são as normas- p , $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, definidas por

$$\|x\|_p := \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| & , p = \infty, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nos espaços $\mathbb{R}^{m,n}$ ($\mathbb{C}^{m,n}$) dos operadores lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m (de \mathbb{C}^n em \mathbb{C}^m) são de particular interesse as normas definidas por

$$\|A\| := \max\{\|Ax\|_a \mid \|x\|_b \leq 1\} = \max\{\|Ax\|_a / \|x\|_b \mid x \neq 0\},$$

onde $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ são duas normas quaisquer para os espaços \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente.

Observação 241. Com essas definições, \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , $\mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbb{C}^{m,n}$ são espaços vetoriais normados completos (espaços de Banach) e podemos falar em convergência de seqüências, seqüências de Cauchy, séries de elementos, ... Podemos, enfim, dispor de todos os resultados associados à estrutura dos espaços de Banach. \square

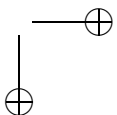
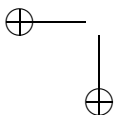
Definição 242. Seja a matriz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. A matriz definida formalmente pela série

$$(A.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

é denominada exponencial da matriz A . Para representá-la usamos a notação e^A ou ainda $\exp(A)$. \square

¹Em espaços euclidianos de dimensão finita todas as normas são equivalentes. (veja e.g. [Kre, Capítulo 2] ou [Ru1])

Dois normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ são ditas equivalentes quando existem constantes c_1 e c_2 tais que $c_1\|x\|_a < \|x\|_b < c_2\|x\|_a$, $\forall x$.



Note que, para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, a série na Definição 242 converge. De fato, da desigualdade

$$\|e^A\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \|A\|^i \leq e^{\|A\|},$$

que é obtida da propriedade $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$,² concluímos que a série em (A.1) converge absolutamente e, portanto, é uma série convergente.

Lema 243. *Seja 0 a matriz identicamente nula, I a matriz identidade e M uma matriz inversível qualquer. As seguintes propriedades da exponencial de matrizes são válidas:*

- a) $e^0 = I$;
- b) $e^{A+B} = e^A e^B$, quando $AB = BA$;
- c) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$;
- d) $e^{MAM^{-1}} = M e^A M^{-1}$;
- e) $A e^A = e^A A$.

Demonstração: Tais propriedades são consequência imediata da Definição 242. ■

É importante observar que a condição $AB = BA$ no item b) do Lema 243 não pode ser negligenciada, conforme nos mostra o simples exemplo a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.2 Sistemas Lineares Autônomos

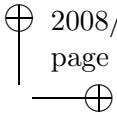
Nesta secção consideramos equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes

$$(A.2) \quad z'(t) = Az(t),$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Como na Secção A.1, procuramos soluções do tipo exponencial para esta equação diferencial. Observe que a identidade

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = e^{tA} \frac{e^{hA} - I}{h}$$

²Esta propriedade é satisfeita pela norma $\|\cdot\|$ do espaço $\mathbb{C}^{n,n}$.



nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (e^{(t+h)A} - e^{tA}) &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (e^{hA} - I) \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} A^k - I \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2A^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e^{tA} A. \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

é diferenciável e sua derivada é dada por

$$(A.3) \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto A e^{tA} = e^{tA} A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

O teorema a seguir fornece uma resposta ao questionamento feito no início da secção sobre a forma da solução do sistema (A.2).

Teorema 244. *O problema de valor inicial*

$$(A.4) \quad z' = Az, \quad z(0) = z_0$$

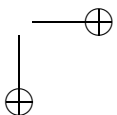
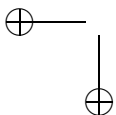
possui como única solução a aplicação

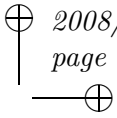
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} z_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: De (A.3) temos que a aplicação $t \mapsto e^{tA} z_0$ é uma solução da equação diferencial. Note que a condição inicial também é satisfeita por esta aplicação. Para verificar a unicidade, suponha que $t \mapsto v(t)$ é uma outra solução do problema de valor inicial. Logo, a função $w(t) := e^{-tA} v(t)$ satisfaz

$$w'(t) = -A e^{-tA} v(t) + e^{-tA} v'(t) = -A e^{-tA} v(t) + e^{-tA} A v(t) = 0.$$

Isto é, w é uma função constante. Temos assim $w(t) = e^{-0A} v(0) = z_0$. Portanto, $v(t) = e^{tA} w(0) = e^{tA} z_0$. ■





Corolário 245. *As colunas da matriz $Z(t) := e^{tA}$ geram n soluções linearmente independentes para o sistema de equações diferenciais (A.2).*

Demonstração: Para cada $z_0 \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $t \mapsto Z(t)z_0$ é uma solução de (A.2) com condição inicial $z(0) = z_0$. Denotando por $\{e^1, \dots, e^n\}$ a base canônica do \mathbb{R}^n , obtemos da escolha $z_0 = e^j$, que as colunas de $Z(t)$ são soluções de (A.2). A independência linear (no espaço das funções contínuas de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n) é consequência do fato dos vetores unitários e^1, \dots, e^n serem linearmente independentes. ■

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ fixo. A função matricial

$$\Phi_A(t, t_0) := e^{(t-t_0)A}, \quad t \in \mathbb{R}$$

é denominada *matriz de transição* do sistema, pois ela descreve a transição do estado z_0 no tempo t_0 para o estado $z(t)$ no tempo t através da dinâmica do sistema (A.2). Note ainda que a aplicação

$$t \mapsto \Phi_A(t, t_0) z_0$$

é solução do problema de valor inicial (ou problema de Cauchy)

$$z' = Az, \quad z(t_0) = z_0.$$

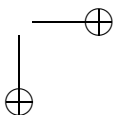
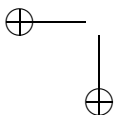
Resta-nos, portanto, resolver o problema de como calcular a função e^{tA} . Da álgebra linear sabemos que toda matriz pode ser transformada em uma forma canônica chamada *forma canônica de Jordan*. Importante nesse fato é que se trata de uma transformação de semelhança. Esse resultado é formulado no lema a seguir.

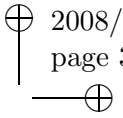
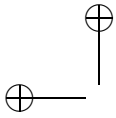
Lema 246. *Dada uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, existem matrizes $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ e J_1, \dots, J_p que satisfazem:*

$$\begin{aligned} A &= MJM^{-1}, \\ J &= \text{diag}(J_1, \dots, J_p), \\ J_i &= \lambda_i I + N_i, \quad 1 \leq i \leq p, \end{aligned}$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ são os autovalores de A ,

$$\text{diag}(J_1, \dots, J_p) := \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$$





e

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [Gan]. ■

Esse resultado é também conhecido na literatura como teorema da decomposição espectral, uma vez que as colunas da matriz M correspondem aos autovetores da matriz A . O Lema 246 permite-nos reescrever a exponencial e^{tA} na forma

$$e^{tA} = e^{tMJM^{-1}} = M e^{tJ} M^{-1} = M \operatorname{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_p}) M^{-1}.$$

Note ainda que

$$e^{tJ_i} = e^{t(\lambda_i I + N_i)} = e^{t\lambda_i} e^{tN_i}.$$

Portanto, para calcular-mos e^{tA} basta que saibamos calcular e^{tN_i} , $1 \leq i \leq p$. Como as matrizes N_i são idempotentes, i.e. $N_i^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$ (verifique!), as séries que definem e^{tN_i} são na verdade somas finitas, o que permite o cálculo da exponencial e^{tN_i} de forma direta.

Exemplo 247. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando as potências de A , temos

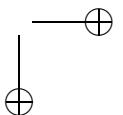
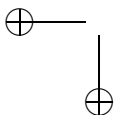
$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, \quad A^{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

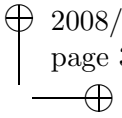
Portanto, a exponencial de tA é dada formalmente pela expressão

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}.$$

Recordando a definição das funções analíticas $\sin t$ e $\cos t$ (veja [Ru2]), concluímos que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$





Calculemos agora e^{tA} a partir da forma canônica de Jordan. Os autovalores de A são $\pm i$ e os respectivos autovetores são $(-i, 1)$, $(i, 1)$. Podemos então calcular a matriz de transformação M e sua inversa M^{-1}

$$M = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos assim

$$J = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Usando as identidades: $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$, $\sin(t) = (e^{it} - e^{-it})/2i$, segue que

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Note que as colunas de e^{tA} nos fornecem duas soluções linearmente independentes da equação $z' = Az$. □

Teorema 248. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ definido por*

$$\gamma := \max\{Re(\lambda) \mid \lambda \text{ autovalor de } A\}.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante c (dependendo de ε e A) tal que

$$\|e^{tA}\| \leq c e^{(\gamma+\varepsilon)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

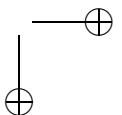
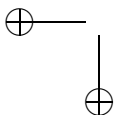
Demonstração: Utilizando a forma canônica de Jordan temos:

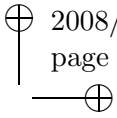
$$\begin{aligned} \|e^{tA}\|^2 &= \|M e^{tM^{-1}AM} M^{-1}\|^2 \leq c_1 \|e^{tM^{-1}AM}\|^2 = c_1 \|e^{tJ}\|^2 \\ &\leq c_2 \sum_{i=1}^p \|e^{tJ_i}\|^2 = c_3 \sum_{i=1}^p |e^{\lambda_i t}|^2 \|e^{tN_i}\|^2 \leq c_4 e^{2\gamma t} \sum_{i=1}^p \|e^{tN_i}\|^2. \end{aligned}$$

Como as expressões $\|e^{tN_i}\|$ são apenas polinomiais em t , podemos limitar seu crescimento por $\hat{c}e^{t\varepsilon}$, onde $\hat{c} > 0$ é uma constante adequada, e o resultado segue. ■

Concluimos a seção obtendo soluções para problemas de valor inicial não homogêneos, isto é problemas do tipo

$$(A.5) \quad z' = Az + f(t), \quad z(t_0) = z_0,$$





onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $f \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$.³ Aceitamos como solução para (A.5) as soluções $z \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ da equação integral

$$(A.6) \quad z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t [Az(s) + f(s)] ds, \quad t \in [t_0, t_1].$$

A relação entre as soluções de (A.5) e (A.6), assim como a garantia de existência de solução para tais problemas é analisada no teorema a seguir.

Teorema 249. *O problema de valor inicial não homogêneo (A.5) possui exatamente uma solução, a qual é expressa por*

$$(A.7) \quad z(t) = e^{(t-t_0)A} z_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} f(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Demonstração: A função z definida em (A.7) satisfaz tanto a equação diferencial quanto a condição inicial em (A.5), resolvendo assim a questão da existência.

Quanto à unicidade, caso v seja uma outra solução de (A.5), então $w = z - v$ é solução do problema homogêneo: $w' = Aw$ com condição inicial $w(t_0) = 0$. Como esse problema possui apenas a solução trivial, temos que $0 = w(t) = (z - v)(t)$, para $t \in [t_0, t_1]$, concluindo a demonstração. ■

A.3 Sistemas Lineares não Autônomos

Consideramos a seguir sistemas homogêneos do tipo

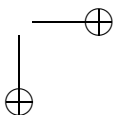
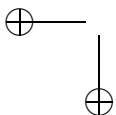
$$(A.8) \quad z' = A(t)z.$$

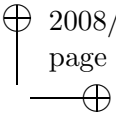
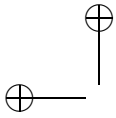
A existência de soluções é conhecida quando $A : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^{n,n}$ é uma aplicação contínua, conforme nos revela o seguinte teorema:

Teorema 250. *Seja $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$, então o problema de valor inicial*

$$(A.9) \quad z' = A(t)z, \quad z(t_0) = z_0$$

³Representamos por $L_p([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, o espaço das funções p -Lebesgue integráveis em $[t_0, t_1]$ assumindo valores em \mathbb{R}^n .





possui exatamente uma solução $z \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Uma condição necessária para existência de soluções do problema (A.9) é que a equação integral

$$(A.10) \quad z(t) = (Fz)(t) := z_0 + \int_{t_0}^t A(s) z(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1]$$

possua uma solução $z \in X := C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. Note que $F : X \mapsto X$ está bem definida. Observe que, para toda constante real r , a norma definida por

$$\|z\|_r := \max\{|z(t)| e^{-r(t-t_0)} \mid t \in [t_0, t_1]\}$$

é equivalente à norma usual do espaço X : $\|z\|_X = \|z\|_\infty = \max\{|z(t)| \mid t \in [t_0, t_1]\}$.

Definindo agora $c(A) = \max\{\|A(t)\| \mid t \in [t_0, t_1]\}$ e tomando $r > 2c(A)$, temos para todo $z, x \in X$ e $t \in [t_0, t_1]$ que:

$$\begin{aligned} |Fz(t) - Fx(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s) (z(s) - x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| |z(s) - x(s)| ds \\ &\leq c(A) \int_{t_0}^t e^{r(s-t_0)} e^{-r(s-t_0)} |z(s) - x(s)| ds \\ &\leq c(A) \|z - x\|_r \int_{t_0}^t e^{r(s-t_0)} ds \\ &\leq c(A) r^{-1} e^{r(t-t_0)} \|z - x\|_r. \end{aligned}$$

Logo,

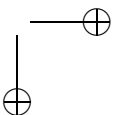
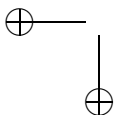
$$\|Fz - Fx\|_r \leq 1/2 \|z - x\|_r,$$

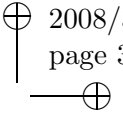
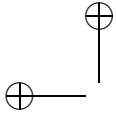
provando que a aplicação F é Lipschitz contínua em $(X, \|\cdot\|_r)$. Mais que isso, provamos que F é uma contração (i.e. $\|F\| < 1$) no espaço normado completo X .⁴ O teorema do ponto fixo de Banach⁵ garante que F possui um ponto fixo $\bar{z} \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$.

Da definição de F e da identidade $\bar{z} = F\bar{z}$, podemos ainda concluir que a função \bar{z} está em $C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. Portanto, é uma solução de (A.9).

⁴Como $(X; \|\cdot\|_\infty)$ é completo e as normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_r$ são equivalentes, então $(X; \|\cdot\|_r)$ também é completo.

⁵Uma demonstração pode ser encontrada em [Kre], Capítulo 4.





A unicidade de solução para (A.9), equivalentemente para equação $Fz = z$, é garantida novamente pelo teorema do ponto fixo de Banach. ■

Observação 251. O resultado de existência e unicidade do teorema anterior pode ser também obtido da idéia de *congelamento do tempo*. Para tanto, reescrevemos o problema a fim de obter um sistema próximo de ser autônomo e não homogêneo.

$$z' = A(t_0)z + (A(t) - A(t_0))z, \quad z(t_0) = z_0.$$

Para todo $z \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, a aplicação $t \mapsto [A(t) - A(t_0)]z(t)$ é obviamente L_1 -integrável. O Teorema 249 nos garante que a solução da equação acima pode ser procurada entre as soluções da equação integral

$$(A.11) \quad \begin{aligned} z(t) = (Fz)(t) := & e^{(t-t_0)A(t_0)} z_0 \\ & + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A(t_0)} (A(s) - A(t_0)) z(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

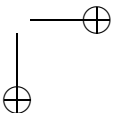
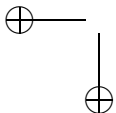
Equipando novamente o espaço $X := C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ com a norma $\|z\|_r$ podemos concluir que F é Lipschitz-contínua em $(X; \|\cdot\|_r)$, se escolhermos r de forma adequada. De fato, definindo $c(A) = \max\{\|A(t) - A(t_0)\| \mid t \in [t_0, t_1]\}$, temos para todo $z, x \in X$ e $t \in [t_0, t_1]$

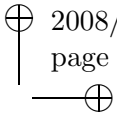
$$\begin{aligned} |Fz(t) - Fx(t)| &= \left| \int_{t_0}^t e^{(t-s)A(t_0)} (A(t) - A(t_0)) (z(s) - x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|e^{(t-s)A(t_0)}\| \|A(t) - A(t_0)\| |z(s) - x(s)| ds \\ &\leq c(A) \int_{t_0}^t e^{(t-s)\|A(t_0)\|} e^{r(s-t_0)} e^{-r(s-t_0)} |z(s) - x(s)| ds \\ &\leq c(A) e^{(t-t_0)\|A(t_0)\|} \|z - x\|_r \int_{t_0}^t e^{r(s-t_0)} ds \\ &\leq c(A) e^{(t_1-t_0)\|A(t_0)\|} \|z - x\|_r r^{-1} e^{r(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Escolhendo $r > 2c(A) e^{(t_1-t_0)\|A(t_0)\|}$, temos

$$\|Fz - Fx\|_r \leq 1/2 \|z - x\|_r.$$

A partir deste ponto procedemos como na demonstração do Teorema 249. □





Observação 252. Sem o artifício de redefinir a norma do espaço $X := C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ usando uma norma equivalente à norma usual de $(X, \|\cdot\|_\infty)$, as hipóteses do Teorema 249 nos permitiriam garantir apenas a existência de uma solução z em um intervalo de tempo $[t_0, \tau]$, onde τ depende de A e não necessariamente $\tau = t_1$. Este problema pode porém ser reparado prolongando esta solução local, a fim de obter uma solução global. \square

Observação 253. É possível concluir da demonstração do Teorema 250 que a hipótese $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ pode ser enfraquecida para $A \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, desde que o conceito de solução da EDO seja modificado de forma adequada. \square

No teorema a seguir discutimos uma importante propriedade do conjunto das soluções de um sistema linear não autônomo.

Teorema 254. *Seja $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$. Então o espaço \mathcal{E} das soluções do sistema*

$$(A.12) \quad z' = A(t) z$$

é um subespaço n -dimensional de $C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$.

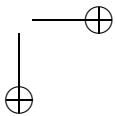
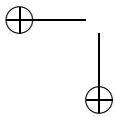
Demonstração: Escolhendo em (A.9) $z_0 = e^i$, obtemos uma solução correspondente que denominamos z^i . Deste modo, conseguimos obter n soluções z^1, \dots, z^n , as quais são linearmente independentes (LI), uma vez que os vetores canônicos e^1, \dots, e^n são LI. Portanto, $\text{Dim}(\mathcal{E}) \geq n$. Sejam agora z^1, \dots, z^{n+1} soluções distintas. Como os vetores $z^1(0), \dots, z^{n+1}(0)$ estão em \mathbb{R}^n , então são necessariamente linearmente dependentes (LD). Logo, existem constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ tais que

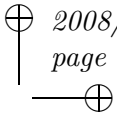
$$\sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_k| \neq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k z^k(0) = 0.$$

Então a função $\bar{z}(t) := \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k z_k(t)$ satisfaz

$$\bar{z}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{z}' = A \bar{z}.$$

Como $\bar{z} \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, o Teorema 250 garante a unicidade de solução para este problema e temos $\bar{z} \equiv 0$. \blacksquare





Definição 255. Seja $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^{n,n})$. Denominamos por *sistema fundamental* toda base $\{z^1, \dots, z^n\}$ para espaço de soluções do sistema

$$(A.13) \quad z' = A(t)z.$$

A matriz correspondente

$$Z(t) := (z^1(t) | \dots | z^n(t)), \quad t \in [t_0, t_1]$$

é denominada *matriz fundamental* do sistema (A.13). □

Uma vez conhecida a matriz fundamental Z do sistema (A.13), podemos escrever

$$Z' = A(t)Z.$$

Usando argumentos de unicidade é possível concluir que

$$\det Z(t) \neq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Fica, portanto, claro que a única solução do problema de valor inicial

$$(A.14) \quad z' = A(t)z, \quad z(s) = z_0,$$

para qualquer $s \in [t_0, t_1]$, é dada por

$$z(t) = Z(t)Z(s)^{-1}z_0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Novamente usando argumentos de unicidade, concluimos que a função matricial

$$[t_0, t_1] \ni t \mapsto Z(t)Z(s)^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

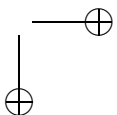
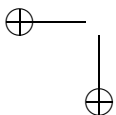
não pode depender da matriz fundamental Z . Portanto, duas matrizes fundamentais diferem somente por uma matriz constante não singular (verifique!). Sendo assim, se torna importante a seguinte definição:

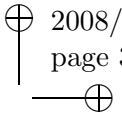
Definição 256. Seja Z uma matriz fundamental para (A.13). A função matricial definida pela aplicação $\Phi(\cdot, s) : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^{n,n}$

$$\Phi_A(t, s) := Z(t)Z(s)^{-1}$$

é denominada *matriz de transição* do sistema (A.13).⁶ □

⁶Note que para sistemas autônomos a matriz de transição é $\Phi_A(t, s) = e^{A(t-s)} = e^{tA}e^{-sA}$, conforme definido na Secção A.2.





Lema 257. *As seguintes operações são válidas:*

$$(A.15) \quad \Phi_A(t, t) = I;$$

$$(A.16) \quad \Phi_A(t, s) = \Phi_A(t, r) \Phi_A(r, s) \quad (\text{propriedade de semigrupo});$$

$$(A.17) \quad \Phi_A(t, s)^{-1} = \Phi_A(s, t);$$

$$(A.18) \quad \frac{\partial \Phi_A}{\partial t}(t, s) = A(t) \Phi_A(t, s), \quad \forall t \in [t_0, t_1];$$

Demonstração: É deixada como exercício para o leitor. ■

Consideremos agora o seguinte problema de valor inicial não homogêneo

$$(A.19) \quad z' = A(t)z + f(t), \quad z(t_0) = z_0,$$

onde $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ e $f \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$. Se consideramos como soluções as funções $z \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, que satisfazem a equação integral

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t [A(s)z(s) + f(s)] ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

então temos ao nosso dispor o seguinte teorema:

Teorema 258. *Dados $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $f \in L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$, o problema de valor inicial*

$$(A.20) \quad z' = A(t)z + f(t), \quad z(t_0) = z_0$$

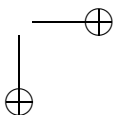
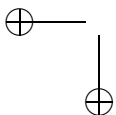
possui uma única solução $C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, que é dada por

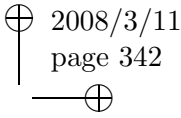
$$(A.21) \quad z(t) = \Phi_A(t, t_0) z_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, s) f(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Demonstração: Seja z a função definida em (A.21). De (A.15), temos $z(t_0) = z_0$ e de (A.18), temos

$$\begin{aligned} z'(t) &= A(t) \Phi_A(t, t_0) z_0 + \int_{t_0}^t A(t) \Phi_A(t, s) f(s) ds + \Phi_A(t, t) f(t) \\ &= A(t) z + f(t), \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned}$$

verificando assim a existência. A unicidade segue do fato do sistema (A.19) possuir apenas solução trivial quando $z_0 = 0$. ■





Outro problema abordado neste manuscrito é o associado com o sistema adjunto ao sistema (A.13). Dada uma função matricial $A : [t_0, t_1] \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$, considere o sistema

$$(A.22) \quad w' = -A(t)^* w,$$

onde a matriz $A(t)^*$ é a transposta de $A(t)$ para $t \in [t_0, t_1]$. Seja Z uma matriz fundamental para a equação (A.13). De (A.15) obtemos a identidade

$$I = Z(t) Z(t)^{-1}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Derivando a identidade acima em relação a t temos

$$0 = \frac{dZ(\cdot)}{dt}(t) Z(t)^{-1} + Z(t) \frac{dZ(\cdot)^{-1}}{dt}(t) = A(t) \Phi_A(t, t) + Z(t) \frac{dZ(\cdot)^{-1}}{dt}(t),$$

que implica em

$$0 = Z(t)^{-1} A(t) + \Phi_A(t, t)^{-1} \frac{dZ(\cdot)^{-1}}{dt}(t) = Z(t)^{-1} A(t) + \frac{dZ(\cdot)^{-1}}{dt}(t),$$

de onde finalmente obtemos

$$\frac{dZ(\cdot)^{-1}}{dt}(t) = -Z(t)^{-1} A(t) \text{ ou ainda } \frac{d}{dt}(Z(t)^{-1})^* = -A(t)^* (Z(t)^{-1})^*.$$

Portanto, $(Z(t)^{-1})^*$ é uma matriz fundamental do sistema adjunto (A.22) e a matriz de transição deste sistema é dada por

$$\Psi_A(t, s) := (\Phi_A(t, s)^{-1})^* = \Phi_A(s, t)^*.$$

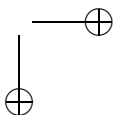
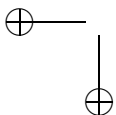
A.4 Sistemas não Lineares: existência e unicidade

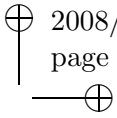
Discutimos nesta secção resultados relativos à teoria de existência e unicidade de soluções para sistemas dinâmicos não lineares e não autônomos. Iniciamos a discussão introduzindo um conceito de regularidade de funções, que é fundamental para a análise subsequente.

Definição 259. Seja D um subconjunto do \mathbb{R}^n . Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada *Lipschitz contínua* em D quando existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|,$$

para todos $x, y \in D$. □





Na seqüência analisamos um teorema que garante existência local de soluções para sistemas de equações de primeira ordem. O leitor atento nota que a demonstração, baseada no denominado *método de aproximações sucessivas*, se assemelha a do Teorema 250.

Teorema 260. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : [T_0, T_1] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz contínua com respeito a segunda variável (com constante de Lipschitz L) e $(t_0, z_0) \in (T_0, T_1) \times D$. Existe $\delta > 0$ tal que o problema de valor inicial (ou problema de Cauchy)*

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad t \in (T_0, T_1), \quad z(t_0) = z_0$$

possui uma solução (local) $z \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta); \mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Por hipótese, existem $a, b > 0$ tais que o retângulo R de lados $[-a, a] \times [-b, b]^n$ e centrado em (t_0, z_0) está contido em $(T_0, T_1) \times D$. Defina

$$M := \|f\|_{\infty; R} \quad \text{e} \quad \delta := \max\{a, b/M\}.$$

Se z é solução do problema de valor inicial, então

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(t, z(t)) dt.$$

Argumentando como na demonstração do Teorema 250, a existência fica provada se encontrarmos uma solução $z \in C^1[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ da equação de ponto fixo $Tz = z$, onde o operador $T : C^1 \rightarrow C^1$ é definido por

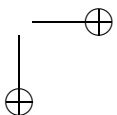
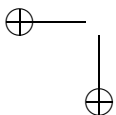
$$(Tz)(t) := z_0 + \int_{t_0}^t f(t, z(t)) dt, \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

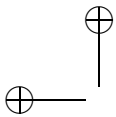
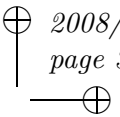
O método das aproximações sucessivas nos fornece um modo construtivo para determinar tal solução. Para $k = 0$, defina $z^{(0)}(t) \equiv z_0$ e para $k \geq 1$, defina

$$z^{(k)}(t) = (Tz^{(k-1)})(t), \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Dado $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, podemos estimar

$$|z^{(1)} - z_0| \leq \int_{t_0}^t |f(t, z_0)| dt \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b.$$





Aplicando o argumento acima sucessivamente, obtemos $|z^{(k)}(t) - z_0| \leq b$. Provamos a seguir que a seqüência $\{z^{(k)}\}$ converge uniformemente e que o seu limite z é uma solução de $Tz = z$. Inicialmente reescrevemos

$$z^{(k)} = z^{(0)} + [z^{(1)} - z^{(0)}] + \dots + [z^{(k)} - z^{(k-1)}].$$

Concentremo-nos por um momento nos termos da soma acima. Recorde que $|z^{(1)} - z_0| \leq M|t - t_0|$. Usando um argumento indutivo provamos que (verifique!)

$$|z^{(k)} - z^{(k-1)}| \leq L^{k-1} M \frac{|t - t_0|^k}{k!}.$$

Temos assim a estimativa

$$|z^{(k)}(t)| \leq |y_0| + \sum_{j=1}^k \frac{M (L\delta)^j}{L j!}.$$

Isto é, reescrevemos $z^{(k)}$ como soma parcial de uma série que é limitada pela série exponencial. Portanto, a seqüência $\{z^{(k)}\}$ converge uniformemente em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e seu limite $z := \lim_k z^{(k)}$ é uma função $C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$. A convergência uniforme de $z^{(k)}$ e a continuidade de f implicam em

$$f(t, z^{(k)}(t)) \xrightarrow{\text{unif}} f(t, z(t)).$$

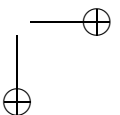
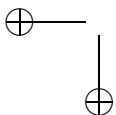
De fato, esta afirmação segue da desigualdade $|f(t, z^{(k)}(t)) - f(t, z(t))| \leq L|z^{(k)}(t) - z(t)|$. Portanto, temos que

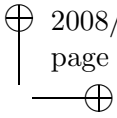
$$\begin{aligned} (Tz)(t) &= z_0 + \int_{t_0}^t \lim_k f(t, z^{(k)}(t)) dt \\ &= \lim_k (Tz^{(k)})(t) = \lim_k (z^{(k+1)})(t) = z(t), \end{aligned}$$

provando o teorema. ■

Note que o método das aproximações sucessivas na demonstração acima substitui o teorema de ponto fixo de Banach usado na demonstração do Teorema 250. Com esse método construímos uma seqüência de Cauchy especial no espaço de Banach $(C^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta); \|\cdot\|_{1,\infty})$ e utilizamos argumentos clássicos da análise real para demonstrar que o limite dessa seqüência é uma solução do problema de valor inicial.

No teorema a seguir verificamos que a solução encontrada no Teorema 260 é a única solução do problema de valor inicial.





Teorema 261. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : [T_0, T_1] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz contínua com respeito a segunda variável (com constante de Lipschitz L) e $(t_0, z_0) \in (T_0, T_1) \times D$. Sejam ainda $\delta > 0$ e $z \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta); \mathbb{R}^n)$ definidos como na demonstração do Teorema 260. Então a função z é a única solução do problema de valor inicial*

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad t \in (T_0, T_1), \quad z(t_0) = z_0.$$

Demonstração: Suponha que \tilde{z} é outra solução do problema de valor inicial em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Para provar a unicidade de solução, basta provar que a seqüência $\{z^{(k)}\}$ definida na demonstração do Teorema 260 converge uniformemente para \tilde{z} em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Para $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, temos

$$\tilde{z}(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(t, \tilde{z}(t)) dt,$$

de onde obtemos $|\tilde{z}(t) - z^{(0)}(t)| \leq M|t - t_0|$. Da definição de $z^{(k)}$ segue que

$$\begin{aligned} |\tilde{z}(t) - z^{(1)}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(t, \tilde{z}(t)) - f(t, z^{(0)}(t))| dt \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\tilde{z}(t) - z^{(0)}(t)| dt \leq LM \frac{|t - t_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

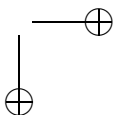
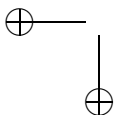
Utilizando um argumento indutivo (verifique!) provamos que, para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e $k \geq 1$,

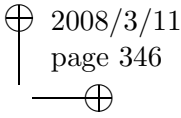
$$|\tilde{z}(t) - z^{(k)}(t)| \leq \frac{M (A|t - t_0|)^{k+1}}{A (k+1)!} \leq \frac{M (A\delta)^{k+1}}{A (k+1)!}.$$

Como o lado direito da expressão acima converge para zero quando $k \rightarrow \infty$, fica provada a convergência uniforme de $z^{(k)}$ para \tilde{z} em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. ■

Observação 262. Existe uma forma alternativa de se provar unicidade sem utilizar o Teorema de existência 260. Suponha que $z_1, z_2 \in C^1$ são duas soluções locais do problema de valor inicial

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \quad z(t_0) = z_0.$$





Integrando a equação diferencial, temos que

$$(A.23) \quad \begin{aligned} |z_1(t) - z_2(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |z_1(s) - z_2(s)| ds, \end{aligned}$$

onde L é a constante de Lipschitz de f . Note que a função escalar ψ definida por

$$\psi(t) := \max\{|z_1(t) - z_2(t)|; t \in (t_0 - \varepsilon, t)\}$$

é não negativa, não decrescente e $\psi(t_0) = 0$. Para provar o teorema, basta verificar que $\psi \equiv 0$. Suponha por contradição que existe $t_1 \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$ tal que

$$\psi(t) = 0, t \in [t_0, t_1] \quad \text{e} \quad \psi(t) > 0, t \in (t_1, t_1 + \delta)$$

para $\delta > 0$ pequeno. De (A.23) segue que

$$|\psi(t)| \leq L \int_{t_1}^t |\psi(s)| ds \leq L\psi(t)|t - t_1|, t \in (t_1, t_1 + \delta),$$

o que é claramente um absurdo. Fica assim provado que $\psi \equiv 0$ em $[t_0, t_0 + \varepsilon)$. Um argumento análogo nos permite concluir que $\psi \equiv 0$ em $(t_0 - \varepsilon, t_0]$, completando a demonstração. \square

A demonstração alternativa do Teorema 260, descrita na observação acima, fica em muito simplificada quando utilizamos o lema de Gronwall (veja Lema 264) para provar que $\psi \equiv 0$ em $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

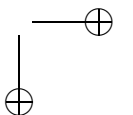
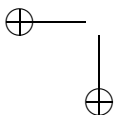
Observação 263. Note que, sem a hipótese de f ser Lipschitz contínua, o resultado acima não é necessariamente válido. De fato, a função $f(t, z) = z^{1/3}$ é contínua na origem, mas o problema

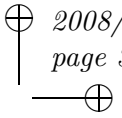
$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z), t \in (-h, h) \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

admite as soluções

$$z_1 \equiv 0 \quad \text{e} \quad z_2(t) = \begin{cases} (\frac{2}{3}t)^{3/2}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases},$$

como o leitor pode facilmente verificar. \square





A.5 Sistemas não Lineares: dependência contínua

Iniciamos esta seção demonstrando a estimativa conhecida na literatura como *lema de Gronwall*, a qual é utilizada na demonstração do Teorema 65.

Lema 264. *Dadas as constantes $\alpha, \beta > 0$, se uma função contínua $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz*

$$w(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t w(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

podemos estimar o crescimento de w por

$$w(t) \leq \alpha e^{\beta t}, \quad t \in [0, T].$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ e defina $v(t) := (\alpha + \varepsilon)e^{\beta t}$ para $t \in [0, T]$. A função v satisfaz a equação diferencial $v' = \beta v$. Logo, v também satisfaz a equação integral

$$v(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t v(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Defina $S := \{t \in [0, T] \mid w(s) < v(s) \text{ para } s \in [0, t]\}$. Por construção, temos $0 \in S$. Defina agora $t_0 := \inf\{t; t \in [0, T] \setminus S\}$. Suponha que $t_0 < T$. Como w e v são contínuas, segue da definição de S e t_0 que $w(t_0) = v(t_0)$. Porém, da desigualdade

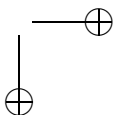
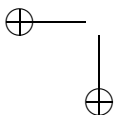
$$w(t_0) \leq \alpha + \beta \int_0^{t_0} w(s) ds < \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^{t_0} v(s) ds = v(t_0)$$

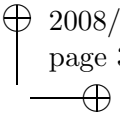
obtemos uma contradição à hipótese $t_0 < T$. Temos, portanto, que $t_0 = T$. De onde concluímos que

$$w(t) \leq (\alpha + \varepsilon) e^{\beta t}, \quad t \in [0, T].$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, o lema fica provado. ■

Existem diversas variantes do Lema 264. No lema a seguir apresentamos uma delas, que é utilizada neste manuscrito.





Lema 265. Dadas a constante $\alpha > 0$ e funções contínuas $w, u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $u(t) \geq 0$ e

$$w(t) \leq \alpha + \int_0^t u(s)w(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

então podemos estimar o crescimento de w por

$$w(t) \leq \alpha e^{\int_0^t u(s)ds}, \quad t \in [0, T].$$

Demonstração: Para $\varepsilon \geq 0$ dado, definimos a função

$$w_\varepsilon(t) := \alpha + \varepsilon + \int_0^t u(s)w(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Temos assim que $w_\varepsilon'(s) = u(s)w(s)$. Usando as hipóteses, segue que $w_\varepsilon'(s) \leq u(s)w_\varepsilon(s)$, o que pode ser reescrito na forma $w_\varepsilon'(s)(w_\varepsilon(s))^{-1} \leq u(s)$. Integrando esta última expressão obtemos

$$\ln w_\varepsilon(t) - \ln w_\varepsilon(0) \leq \int_0^t u(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Tomando a exponencial dos dois lados, obtemos

$$w_\varepsilon(t)(w_\varepsilon(0))^{-1} \leq e^{\int_0^t u(s)ds}, \quad t \in [0, T].$$

Utilizando agora a desigualdade $w(t) \leq w_\varepsilon(t)$ e a identidade $w_\varepsilon(0) = \alpha + \varepsilon$, obtemos

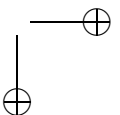
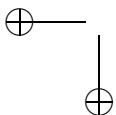
$$w(t) \leq (\alpha + \varepsilon)e^{\int_0^t u(s)ds}, \quad t \in [0, T].$$

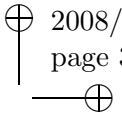
Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, o lema fica provado. ■

Provamos agora o resultado principal da secção, o qual garante que, sob hipóteses apropriadas, a solução de um problema de valor inicial depende continuamente das condições iniciais.

Lema 266. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \rightarrow D$ Lipschitz contínua em D com constante de Lipschitz L . Seja ainda $z : D \rightarrow D$ uma solução de $z' = f(z)$, $z(0) = z_0$ e $y \in C^1(D; D)$ continuamente diferenciável satisfazendo

$$|y(0) - z(0)| \leq a, \quad |y'(t) - f(y(t))| \leq b, \quad t \in [0, T].$$





Então vale a estimativa

$$|y(t) - z(t)| \leq (a + bT) e^{Lt}, \quad t \in [0, T].$$

Demonstração: Para $t \in [0, T]$, temos

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= |y(0) - z(0) + \int_0^t (y'(s) - z'(s)) ds| \\ &\leq a + \int_0^t (|y'(s) - f(y(s))| + |f(y(s)) - f(z(s))|) ds \\ &\leq a + bt + \int_0^t L|y(s) - z(s)| ds \\ &\leq a + bT + \int_0^t L|y(s) - z(s)| ds. \end{aligned}$$

Definindo $w(t) := |y(t) - z(t)|$, obtemos da desigualdade acima que

$$w(t) \leq a + bT + L \int_0^t w(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

A estimativa desejada segue agora do lema de Gronwall (Lema 264) aplicado à função w com $\alpha = a + bT$ e $\beta = L$. ■

Corolário 267. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \rightarrow D$ Lipschitz contínua em D com constante de Lipschitz L . Sejam ainda $z, y : D \rightarrow D$ soluções de $z' = f(z)$, satisfazendo $z(0) = z_0$ e $y(0) = y_0$, com*

$$|y(0) - z(0)| \leq a.$$

Então vale a estimativa

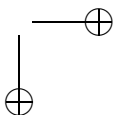
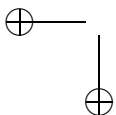
$$|y(t) - z(t)| \leq a e^{Lt}, \quad t \in [0, T].$$

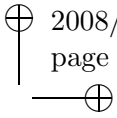
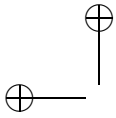
Demonstração: Tome $b = 0$ na demonstração do Lema 266 ■

Observação 268. Na verdade, é possível obter uma estimativa melhor do que a apresentada no Lema 266. De fato, é possível provar que

$$|y(t) - z(t)| \leq a e^{Lt} + bL^{-1}(e^{Lt} - 1), \quad t \in [0, T].$$

Para detalhes consulte [Sot]. □





A.6 Método de Shooting

Analisamos nesta secção um método iterativo para solucionar uma família especial de problemas de valor de contorno, a saber: aqueles em que parte das condições de contorno é dada no tempo inicial e parte no tempo final. Estudamos inicialmente o caso linear, que corresponde aos sistemas da forma

$$(A.24) \quad \begin{cases} z' = A(t)z + f(t), & t \in (t_0, t_1) \\ z_i(t_0) = c_i, & i = 1, \dots, r \\ z_i(t_1) = d_i, & i = r + 1, \dots, n, \end{cases}$$

onde as constantes $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ e $0 < r < n$ são dadas, assim como as funções $A \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $f \in L([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$.

O objetivo é identificar as condições iniciais $z_i(t_0)$, $i = r + 1, \dots, n$, para então tratar o problema (A.24) como um problema de valor inicial. Para tanto, considere o sistema adjunto ao sistema $z' = Az$, i.e. o sistema

$$w' = -A^*w, \quad w(t_0) = w_0.$$

Como vimos na Secção A.3, as soluções dos problemas de valor inicial para sistemas adjuntos satisfazem

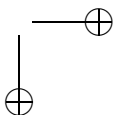
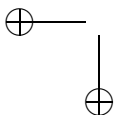
$$\begin{aligned} z(t_1) &= \Phi_A(t_1, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)f(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1], \\ w(t_1) &= \Phi_A(t_0, t_1)^*w_0. \end{aligned}$$

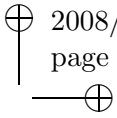
Logo,

$$\begin{aligned} (A.25) \quad w(t_1)^*z(t_1) &= w(t_1)^*\Phi_A(t_1, t_0)z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} w(t_1)^*\Phi_A(t_1, s)f(s) ds \\ &= w(t_0)^*z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} w(t_1)^*\Phi_A(t_1, s)f(s) ds \\ &= w(t_0)^*z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} w(s)^*f(s) ds. \end{aligned}$$

Defina agora as soluções $w^{(i)}$, $i = 1, \dots, n - r$ dos seguintes problemas de valor inicial (com condição final em $t = t_1$):

$$w' = -A^*w, \quad w(t_1) = e_{r+i},$$





onde e_i é o i -ésimo vetor canônico do \mathbb{R}^n . Por construção, temos que $w^{(i)}(t_1)^* z(t_1) = z_{r+i}(t_1) = d_{r+i}$, para $i = 1, \dots, n - r$. Substituindo em (A.25), obtemos para cada $i = 1, \dots, n - r$ que

$$d_{r+i} = w(t_0)^* z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} w(s)^* f(s) ds.$$

Desta identidade concluímos que

$$(A.26) \quad \sum_{j=r+1}^n w_j^{(i)}(t_0) z_j(t_0) = d_{r+i} - \sum_{j=1}^r w_j^{(i)}(t_0) c_j - \int_{t_0}^{t_1} w^{(i)}(s)^* f(s) ds, \quad i = 1, \dots, n - r.$$

Note que (A.26) é um sistema linear com $n - r$ equações para as incógnitas $z_{r+1}(t_0), \dots, z_n(t_0)$. Resolvendo-o, obtemos todas as condições iniciais em $t = t_0$ para o problema (A.24) e podemos solucioná-lo como um problema de valor inicial usual. A inversibilidade da matriz $[w_j^{(i)}(t_0)]$ do sistema (A.26) se deve ao fato de $w^{(1)}, \dots, w^{(n-r)}$ serem soluções linearmente independentes do sistema adjunto.

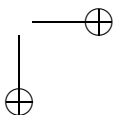
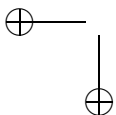
Caso $r \leq n/2$, podemos minimizar os cálculos a serem realizados se obtivermos um sistema análogo ao (A.26) para reconstruir as condições finais $z_1(t_1), \dots, z_r(t_1)$, bastando para isso trocar os papéis das condições iniciais e finais no desenvolvimento acima. O método descrito acima é denominado *método de equações adjuntas*.

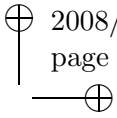
Analisamos a seguir o denominado *método de shooting*, que fornece aproximações para a solução do seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} z' = f(z), & t \in (t_0, t_1) \\ z_i(t_0) = c_i, & i = 1, \dots, r \\ z_i(t_1) = d_i, & i = r + 1, \dots, n \end{cases}$$

Como no método de equações adjuntas, o objetivo é determinar as condições iniciais $z_{r+1}(t_0), \dots, z_n(t_0)$, a fim de obter um problema de valor inicial e resolvê-lo por um método de integração adequado.

O método iterativo é iniciado escolhendo-se arbitrariamente valores $z_{r+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$. Estes são utilizados juntamente com as condições iniciais fornecidas $c_i, i = 1, \dots, r$ para resolver o problema de valor inicial (PVI) correspondente. A solução deste PVI é denominada $z^{(0)}$. O próximo





passo é escolher para $k \geq 0$, funções $\gamma^{(k)} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que $z^{(k+1)}$ definida por

$$z^{(k+1)}(t) := z^{(k)}(t) + \gamma^{(k)}(t),$$

satisfaça $\dot{z}^{(k+1)}(t) = f(z^{(k+1)})$ e ainda

$$(A.27) \quad z_i^{(k+1)}(t_0) = c_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad z_i^{(k+1)}(t_1) = d_i, \quad i = r + 1, \dots, n.$$

Se $\gamma^{(k)}$ é escolhida desta forma, temos

$$(A.28) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}^{(k)}(t) &= \dot{z}^{(k+1)}(t) - \dot{z}^{(k)}(t) = f(z^{(k+1)}) - f(z^{(k)}) \\ &\approx \left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z^{(k)}) \right] (z^{(k+1)}(t) - z^{(k)}(t)) = J(z^{(k)}) \gamma^{(k)}(t), \end{aligned}$$

onde J é o jacobiano de f . Das condições de contorno (A.27), temos ainda que

$$\gamma_i^{(k)}(t_0) = 0, \quad i = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad \gamma_i^{(k)}(t_1) = d_i - z_i^{(k)}(t_1), \quad i = r + 1, \dots, n.$$

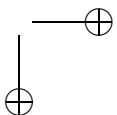
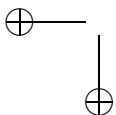
Portanto, cada $\gamma^{(k)}$ é solução de um problema de valor de contorno linear, a saber:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^{(k)} = J(z^{(k)}) \gamma^{(k)}, & t \in [t_0, t_1] \\ \gamma_i^{(k)}(t_0) = 0, & i = 1, \dots, r \\ \gamma_i^{(k)}(t_1) = d_i - z_i^{(k)}(t_1), & i = r + 1, \dots, n, \end{cases}$$

o qual pode ser resolvido pelo método de equações adjuntas, discutido no início da secção. O método iterativo fica assim bem definido. Um critério de parada usualmente utilizado é calcular o erro $\|z^{(k+1)}(t_1) - z^{(k)}(t_1)\| = \|\gamma^{(k)}(t_1)\|$ e terminar o algoritmo quando este for pequeno o bastante.

É possível demonstrar que o método de *shooting* descrito acima é uma aplicação particular do método de Newton–Raphson. Portanto, se a aproximação inicial estiver próxima o bastante da solução, se $J(z^{(k)})$ for não singular e se o intervalo $[t_0, t_1]$ não for muito grande, é possível obter convergência do método. O método de *shooting* pode ser resumido na forma do algoritmo apresentado na Tabela A.1

Variantes do método de *shooting* (não linear; com condições de contorno implícitas; *shooting* múltiplo) são discutidas em [Know].



<p>1. $k := 0$; Escolha $z_{r+1}^{(0)}(t_0), \dots, z_n^{(0)}(t_0) \in \mathbb{R}$;</p> <p>2. Resolva o PVI</p> $\begin{cases} z' = f(z), & t \in [t_0, t_1] \\ z(t_0) = (c_1, \dots, c_r, z_{r+1}^{(k)}(t_0), \dots, z_n^{(k)}(t_0)) \end{cases}$ <p>e obtenha a solução $z^{(k)}(t)$;</p> <p>3. Resolva pelo método de equações adjuntas o PVC linear</p> $\begin{cases} \dot{\gamma} = J(z^{(k)}) \gamma, & t \in [t_0, t_1] \\ \gamma_i(t_0) = 0, & i = 1, \dots, r \\ \gamma_i(t_1) = d_i - z_i^{(k)}(t_1), & i = r + 1, \dots, n \end{cases}$ <p>e obtenha a solução $\gamma^{(k)}(t)$.⁷ Na verdade nos interessa apenas calcular as últimas $n - r$ componentes do vetor $\gamma^{(k)}(t_0)$;</p> <p>4. Calcule $z^{(k+1)}(t_0) := z^{(k)}(t_0) + \gamma^{(k)}(t_0)$;</p> <p>5. Se $\ \gamma^{(k)}(t_1)\$ é pequeno o bastante PARE; Senão $k := k + 1$; volte ao Passo 2.</p>

Tabela A.1: Algoritmo para o método de *shooting*

Exercícios

A.1. Escreva a EDO $z'' - 3z' + 2z = 0$ na forma de sistema e calcule a matriz de transição.

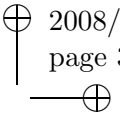
A.2. Dado $\alpha > 0$, resolva o PVI $z'' - 3z' + 2z = f(t)$, $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$, onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -1/\alpha, & t \in [2, 2 + \alpha) \\ 0, & t \geq 2 + \alpha \end{cases} .$$

A.3. Dada $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, defina formalmente a matriz

$$\sin A := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k-1)!} A^{2k-1} .$$

⁷Note que o sistema adjunto ao sistema (A.28) é $\dot{w}^{(k)} = -J(z^{(k)})^* w^{(k)}$.



Para quais matrizes A a série acima converge? Calcule $\sin A$ para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A.4. Considere o problema de valor de contorno

$$z' = A(t)z + f(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad Rz = g,$$

onde $Rz := Cz(t_0) + Dz(t_1)$, $g \in \mathbb{R}^n$, $C, D \in \mathbb{R}^{n,n}$. Seja $Z(t)$ a matriz fundamental do sistema $z' = A(t)z$. Prove a equivalência das afirmações abaixo:

- a) O problema homogêneo $z' = Az$, $Rz = 0$ possui apenas solução trivial;
- b) A matriz $CZ(t_0) + DZ(t_1)$ é regular;
- c) Dadas $f \in C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathbb{R}^n$ o PVC possui exatamente uma solução.

A.5. Para quais matrizes $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ existe uma matriz correspondente $R \in \mathbb{C}^{n,n}$, tal que $e^R = A$? (A matriz R é denominada logaritmo de A .) (Dica: Construa R para blocos de Jordan, de forma análoga à série

$$\ln(1 + \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \alpha^{k+1},$$

definida para $|\alpha| < 1$.)

A.6. Reescreva a demonstração sugerida na Observação 262 utilizando o lema de Gronwall para provar que $\psi \equiv 0$.

A.7. Resolva pelo método de equações adjuntas o problema de valor de contorno

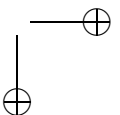
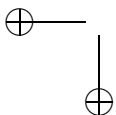
$$z'' = z + t, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = \alpha.$$

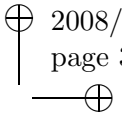
A.8. Prove que a equação diferencial

$$x'' + x + b(t) = 0,$$

com $b(t + 2\pi) = b(t)$, $t \in \mathbb{R}$, possui uma solução periódica com período 2π , se e somente se

$$\int_0^{2\pi} b(T) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} b(T) \sin(t) dt = 0.$$





EXERCÍCIOS

A.9. Considere o sistema não linear $z' = f(z)$, onde $z = (z_1, z_2, z_3)$,

$$f(z) := \begin{pmatrix} 1 - z_1 - z_1 z_2 (a_1 + z_1)^{-1} \\ a_2 (1 - z_3^{-1}) z_2 - z_2 \\ a_3 z_1 (a_1 + z_1)^{-1} - a_2 (z_3 - 1) \end{pmatrix}$$

e a_1, a_2, a_3 são constantes positivas.

a) Prove que o conjunto aberto $M := \{z \in \mathbb{R}^3 \mid z_i > 0, i = 1, 2, 3\}$ é positivo invariante, i.e. uma trajetória com condição inicial em M , permanece neste conjunto durante todo seu intervalo de existência.

b) Qual equação diferencial é satisfeita pela função $v := z_1 + a_3^{-1} z_2 z_3$?

c) Calcule para $a_2 a_3 - a_2 - a_3 - a_1 a_2 > 0$ os pontos de equilíbrio do sistema e discuta sua estabilidade.

A.10. Considere o sistema $z' = Az - b$, $z(0) = z_0$, onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é uma matriz estável, $b, z_0 \in \mathbb{R}^n$.

a) Mostre que uma solução z do sistema existe para todo $t \geq 0$.

b) Prove que $x := \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$ existe e ainda que satisfaz $Ax = b$.

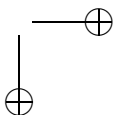
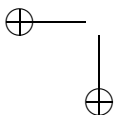
A.11. Seja $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e p_A o polinômio característico correspondente, i.e.

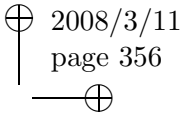
$$p_A(z) := \det(zI - A) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0.$$

Verifique que a exponencial $\Phi(t) := e^{At}$, $t \in \mathbb{R}$ é solução de

$$\Phi^{(n)} + c_{n-1}\Phi^{(n-1)} + \dots + c_1\Phi' + c_0\Phi = 0.$$

$$\Phi(0) = I, \Phi'(0) = A, \dots, \Phi^{(n-1)}(0) = A^{n-1}.$$





Apêndice B

Demonstração do Princípio do Máximo

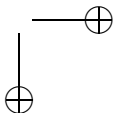
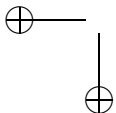
Neste apêndice apresentamos uma demonstração do princípio de Pontryagin para problemas com horizonte finito (tempo final livre), a qual se baseia nas notas de aula de M. Brokate (veja [Br]). A demonstração se divide em três partes principais:

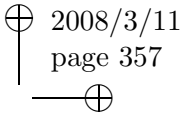
- Na Secção B.1 obtemos um conjunto de condições necessárias para otimalidade de soluções de um problema abstrato de otimização em espaços de dimensão infinita;
- Na Secção B.2 aplicamos o resultado do item anterior a um problema auxiliar, construído a partir do problema de controle ótimo através de uma reparametrização da variável de tempo;
- Na Secção B.3 invertemos a parametrização do item anterior, a fim de reescrever as condições necessárias para o problema auxiliar e obter as desejadas condições necessárias para o problema de controle ótimo.

Outras demonstrações do princípio do máximo para os problemas aqui tratados (horizonte finito) podem ser encontradas em [LiYo] e [Tr].

B.1 Otimização Infinita

Investigamos nesta secção condições necessárias para otimalidade de problemas de minimização em espaços de dimensão infinita envolvendo





funções continuamente diferenciáveis.

B.1.1 Um Problema Abstrato de Otimização

A título de motivação, suponha que $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável. Se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é tal que

$$J(\bar{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x),$$

então o gradiente de J se anula em \bar{x} , i.e. $\nabla J(\bar{x}) = 0$. A recíproca é verdadeira se J for convexo.

Considere agora o problema de otimização restrito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(x) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \\ h_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq l \end{array} \right.$$

onde $J : U \rightarrow \mathbb{R}$, $G = (g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $H = (h_1, \dots, h_l) : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ são aplicações diferenciáveis no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Representamos as restrições de forma simplificada por $G(x) \leq 0$, $H(x) = 0$.

As condições necessárias para otimalidade deste problema são fornecidas pelo teorema dos *multiplicadores de Lagrange*.

Teorema 269. *Sejam J, G, H funções satisfazendo as condições acima. Se a função J sujeita às restrições $G(x) \leq 0$, $H(x) = 0$ possui um extremo local (max/min) em \bar{x} , então existem $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l) \in \mathbb{R}^l$ tais que:*

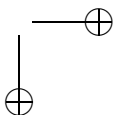
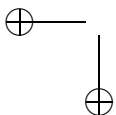
$$(i) \quad \eta \nabla J(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0;$$

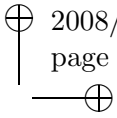
$$(ii) \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$(iii) \quad \eta \geq 0, \quad |\eta| + |\lambda| + |\mu| \neq 0.$$

■

Nesta secção obtemos, em espaços de Banach, um resultado análogo ao Teorema 269 (de preferência com $\eta \neq 0$). Tal resultado é usado mais adiante para demonstrar o princípio do máximo (ver Secção B.2).





Antes de prosseguir com a formulação do problema de otimização em espaços de Banach, necessitamos de alguns conceitos topológicos básicos. Sejam X, Y espaços normados, $M \subset X$, $z \in X$. Adotamos a seguinte notação: $B_r(z) := \{x \mid \|x - z\| \leq r\}$, $B_r := B_r(0)$, $r > 0$. $int(M) := \{x \in X \mid \exists r > 0 \text{ com } B_r(x) \subset M\}$, $cl(M) := X \setminus int(X \setminus M)$. $B(X, Y) := \{T \mid T : X \rightarrow Y \text{ linear, contínua}\}$, $X^* := B(X, \mathbb{R})$.

Note que $B(X, Y)$ é também um espaço normado e será completo quando Y for completo. O espaço X^* é denominado dual topológico de X . O último conceito de que necessitamos diz respeito à diferenciabilidade de aplicações definidas em espaços de Banach.

Definição 270. Sejam X, Y Espaços de Banach e $O \subset X$ aberto.

- i) $F : O \rightarrow Y$ é (Fréchet-)diferenciável em $x \in O$, quando existe $T \in B(X, Y)$ satisfazendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Th\|}{\|h\|} = 0.$$

$dF(x) := T$ é denominada *derivada de F em x* . (É unicamente determinada!)

- ii) $F : O \rightarrow Y$ é continuamente (Fréchet-)diferenciável em O , quando F é diferenciável em todo $x \in O$ e a aplicação $dF : O \rightarrow B(X, Y)$ é contínua.

□

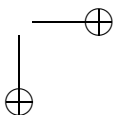
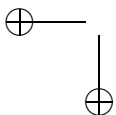
Podemos enfim formular o problema abstrato de otimização mencionado no início da secção.

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } J(x) \\ \text{sujeito a } x \in C, F(x) \in K \end{cases}$$

onde X, Y são espaços de Banach; $O \subset X$ aberto; $C \subset X$, $K \subset Y$ são fechados e convexos; $J : O \rightarrow \mathbb{R}$, $F : O \rightarrow Y$ são continuamente diferenciáveis.

Na teoria de controle ótimo a condição $x \in C$ está associada a uma limitação no controle (e.g. $u(t) \in \Omega$ q.s.) e a restrição $F(x) \in K$ representa a equação diferencial (ou integral) assim como outras equações envolvendo a variável de estado (e.g. $\psi(t_1, z(t_1)) = 0$).

A forma desejada do teorema de multiplicadores que procuramos é:



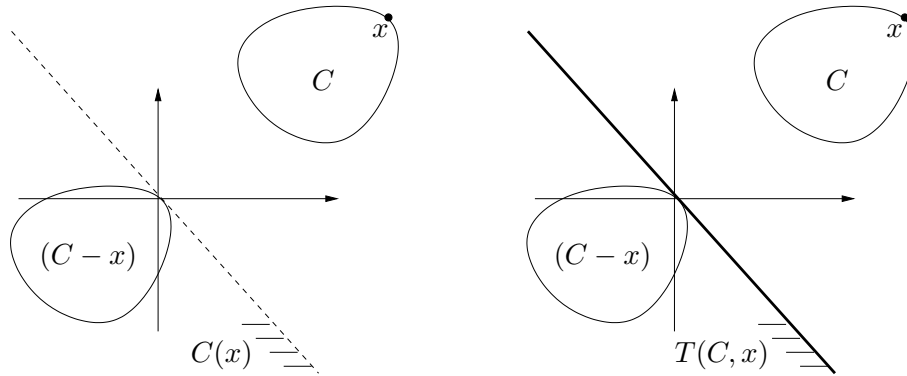
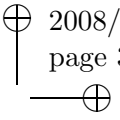
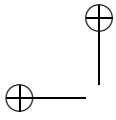


Figura B.1: Cones tangenciais $C(x)$ e $T(C, x)$.

Conjectura: [Lagrange generalizado] Se \bar{x} é mínimo local do problema (P) , então existem $\eta \in \mathbb{R}$, $\psi \in X^*$, $\phi \in Y^*$ tais que

- i) $\eta dJ(\bar{x}) - \psi \circ dF(\bar{x}) = \phi$;
- ii) $\eta \geq 0$, $\eta + \|\psi\| + \|\phi\| \neq 0$.

onde ψ e ϕ satisfazem ainda outras restrições com respeito a C e K (e preferencialmente $\eta \neq 0$).

Veremos a seguir que o resultado desejado é obtido aproximando-se localmente o conjunto dos pontos admissíveis $X_{ad} := C \cap F^{-1}(K) \cap O$ para (P) por conjuntos convexos apropriados e utilizando um teorema de separação para conjuntos convexos em espaços de Banach.

B.1.2 Linearização do Problema de Otimização

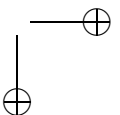
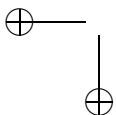
Definição 271. Seja X um espaço de Banach, $C \subset X$ convexo, $x \in C$. O conjunto

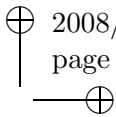
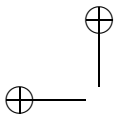
$$C(x) := \{a(c - x) \mid a \geq 0, c \in C\}$$

é denominado *cone tangencial em x por C* (veja Figura B.1). □

Definição 272. Seja X um espaço de Banach, $M \subset X$, $x \in M$. O conjunto

$$T(M, x) := \{h \in X \mid \exists t_0 > 0 \text{ e } r : [0, t_0] \rightarrow X \text{ tal que } x + th + r(t) \in M \text{ para } t \in [0, t_0], \lim_{t \downarrow 0} r(t)/t = 0\}$$





é denominado *cone tangencial a M por x* (veja Figura B.1). □

Lema 273. *Seja X um espaço de Banach, C ⊂ X fechado e convexo, x ∈ C. São verdadeiras as afirmações:*

(i) C − x, (C − x)₁, C(x) são convexos;

(ii) C − x, (C − x)₁ são fechados;

(iii) C(x) ⊂ T(C, x);

onde (M)₁ := M ∩ B₁, para todo subconjunto M de um espaço normado Z.

Demonstração: Segue imediatamente das Definições 271 e 272. ■

Teorema 274. *Se $\bar{x} \in X_{ad} = C \cap F^{-1}(K) \cap O$ é um mínimo local de (P), temos então para todo $h \in T(X_{ad}, \bar{x})$ que*

$$dJ(\bar{x})h \geq 0.$$

Demonstração: Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $r : [0, t_0] \rightarrow X$ escolhidos como na Definição 272 para o cone tangencial $T(X_{ad}, \bar{x})$. Logo, para todo $t \in (0, t_0]$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq t^{-1}(J(\bar{x} + th + r(t)) - J(\bar{x})) \\ &\leq t^{-1}(J(\bar{x} + th) - J(\bar{x})) + t^{-1}(J(\bar{x} + th + r(t)) - J(\bar{x} + th)) \\ &\leq t^{-1}(J(\bar{x} + th) - J(\bar{x})) + t^{-1}\|dJ(\xi_t)\| \|r(t)\|, \end{aligned}$$

onde a existência de $\xi_t \in X$ é garantida pelo teorema do valor médio. O teorema segue agora tomando o limite $t \downarrow 0$ (observe que $\lim_{t \downarrow 0} r(t)t^{-1} = 0$ e $\lim_{t \downarrow 0} \xi_t = \bar{x}$). ■

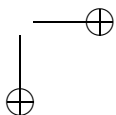
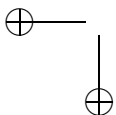
Definição 275. Dizemos que $x \in O$ é um *ponto regular* para (P) quando

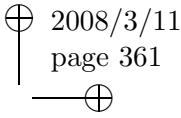
$$0 \in \text{int}[dF(x)(C - x) - (K - F(x))].$$

Caso $x \in O$ seja tal que

$$\text{int}[dF(X)(C - x) - (K - F(x))] \neq \emptyset,$$

x é denominado *ponto fracamente regular* para (P). □





O teorema a seguir representa um passo fundamental para a demonstração de nosso teorema de condições necessárias e pode também ser interpretado como uma generalização do teorema da aplicação aberta. Para detalhes veja [ZoKu].

Teorema 276. *Sejam X, Y espaços de Banach, $T \in B(X, Y)$ e $C \subset X$, $K \subset Y$ fechados e convexos. Para $x \in C$, $y \in K$ são equivalentes as afirmações:*

- a) $Y = T(C(x)) - K(y)$;
- b) Existe $r > 0$, tal que $B_r \subset T((C - x)_1) - (K - y)_1$.

Demonstração: (a) \Rightarrow (b)

(1) Provamos o seguinte, $C(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(C - x)_1$. A inclusão $C(x) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(C - x)_1$ segue diretamente da definição de $C(x)$. Seja agora $z = a(c - x) \in C(x)$. Escolha $b \in (0, 1)$ tal que $b(c - x) \in B_1$. Como B_1 e $C - x$ são conjuntos convexos, temos que

$$r(c - x) \in (C - x)_1, \text{ para todo } r \in [0, b].$$

Logo, $z = a(c - x) = \frac{na}{n}(c - x) \in n(C - x)_1$ para n suficientemente grande. Como $z \in C(x)$ é arbitrário, temos $C(x) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(C - x)_1$.

(2) Analogamente prova-se que $K(y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(K - y)_1$.

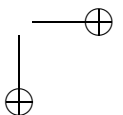
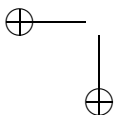
(3) Defina $A_s := s[T((C - x)_1) - (K - y)_1]$, $s \in \mathbb{R}$. Provamos que $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Basta observar que

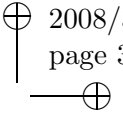
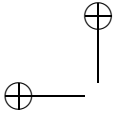
$$\begin{aligned} Y &= T(C(x)) - K(y) = T\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(C - x)_1\right) - \bigcup_{m \in \mathbb{N}} m(K - y)_1 \\ &= \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} [nT((C - x)_1) - m(K - y)_1] \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n[T((C - x)_1) - (K - y)_1]. \end{aligned}$$

(Na última igualdade usamos a inclusão $m(K - y)_1 \subset n(K - y)_1$, para $m \leq n$, a qual se deve a $0 \in (K - y)_1$ e a convexidade de $(K - y)_1$.)

(4) Do teorema de Baire segue que existe pelo menos um $m \in \mathbb{N}$ com $\text{int}(\text{cl}(A_m)) \neq \emptyset$.

(Teorema de Baire: Se um espaço métrico completo é escrito como união enumerável de subconjuntos, então pelo menos um destes contém um aberto; veja [Kre], [Ru1].)





(5) Provamos que $0 \in \text{int}(\text{cl}(A_1))$. De fato, (4) implica que $\exists a \in \text{int}(\text{cl}(A_m))$ e de (3) temos que $\exists k \in \mathbb{N}$ com $-a \in \text{cl}(A_k)$. Logo, pela definição de A_s , temos que $-mk^{-1}a \in \text{cl}(A_m)$. Como $a \in \text{int}(\text{cl}(A_m))$, então $\exists \delta > 0$ com $B_\delta(a) \subset \text{int}(\text{cl}(A_m))$. Mas $-mk^{-1}a \in \text{cl}(A_m)$ e $\text{cl}(A_m)$ é convexo, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que $0 \in B_\varepsilon \subset \text{cl}(A_m)$. Portanto, $B_{\varepsilon m^{-1}} \subset \text{cl}(A_1)$.

(6) Seja $r > 0$ com $B_{2r} \subset \text{cl}(A_1)$. Provamos que $B_r \subset A_1$, provando assim (b). Note que

$$B_r \subset \text{cl}(A_{1/2}) \subset \{\bar{y} \in Y \mid \text{dist}(\bar{y}, A_{1/2}) \leq \frac{r}{2}\} = A_{2^{-1}} + B_{2^{-1}r}.$$

Reduzindo o diâmetro dos conjuntos pelo fator 2^i temos

$$B_{2^{-i}r} \subset A_{2^{-(i+1)}} + B_{2^{-(i+1)}r}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dado $\bar{y} \in B_r$, definimos as seqüências $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ e $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{r_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ indutivamente

$$i = 1: \quad \bar{y} = T(2^{-1}x_1) - 2^{-1}y_1 + r_1 \\ \text{com } x_1 \in (C - x)_1, y_1 \in (K - y)_1, \|r_1\| \leq 2^{-1}r;$$

$$i > 1: \quad r_i = T(2^{-(i+1)}x_{i+1}) - 2^{-(i+1)}y_{i+1} + r_{i+1} \\ \text{com } x_{i+1} \in (C - x)_1, y_{i+1} \in (K - y)_1, \|r_{i+1}\| \leq 2^{-(i+1)}r.$$

Definindo agora $u_n := \sum_{i=1}^n 2^{-i}x_i$ e $v_n := \sum_{i=1}^n 2^{-i}y_i$, temos

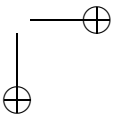
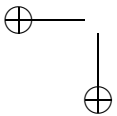
$$(B.1) \quad \bar{y} = Tu_n - v_n + r_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

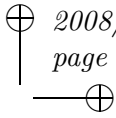
Note que $\lim r_n = 0$ e ainda que u_n é de Cauchy em X , pois $\|x_i\| \leq 1$, $i \in \mathbb{N}$ e

$$\|u_{n+m} - u_n\| \leq \left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} 2^{-i}x_i \right\| \leq 2^{-n}.$$

Como X é de Banach, então $\exists u \in X$ com $\lim u_n = u$ e como T é contínua, então $Tu = \lim Tu_n$. Logo, (B.1) garante que v_n converge para algum $v \in Y$ e temos $\bar{y} = Tu - v$. Verificamos por fim que $u \in (C - x)_1$ e $v \in (k - y)_1$.

Note que $u_n = \sum_{i=1}^n 2^{-i}x_i + 2^{-n}0$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, u_n é combinação linear convexa dos elementos $x_1, x_2, \dots, x_n, 0$ de $(C - x)_1$. Como $(C - x)_1$ é





convexo, temos $u \in (C - x)_1$. A inclusão $v \in (k - y)_1$ é demonstrada de forma análoga.

(b) \Rightarrow (a) Obviamente $0 \in T(C(x)) - K(y)$. Se $\bar{y} \in Y$, $\bar{y} \neq 0$, então $r\|\bar{y}\|^{-1}\bar{y} \in B_r$. Logo,

$$r\|\bar{y}\|^{-1}\bar{y} = T(a(c - x)) - b(k - y),$$

para $a, b \geq 0$, $c \in C$ e $k \in K$ apropriados. Isto prova que

$$\bar{y} = T(r^{-1}\|\bar{y}\|a(c - x)) - (r^{-1}\|\bar{y}\|b(k - y)) \in T(C(x)) - K(y),$$

completando a demonstração. ■

Corolário 277. *Seja x admissível para (P) , i.e. $x \in X_{ad} = C \cap F^{-1}(K) \cap O$. São equivalentes as afirmativas:*

- a) x é um ponto regular para (P) ;
- b) $Y = dF(x)C(x) - K(F(x))$.

Demonstração: (b) \Rightarrow (a)

Segue da aplicação do Teorema 276 com $T = dF(x)$, $y = F(x)$.

(a) \Rightarrow (b) Seja $\bar{y} \in Y$. Como x é regular, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\varepsilon\bar{y} \in B_\delta \subset dF(x)(C - x) - (K - F(x)).$$

Portanto, temos

$$\bar{y} \in dF(x)\varepsilon^{-1}(C - x) - \varepsilon^{-1}(K - F(x)) \subset dF(x)C(x) - (K(F(x))),$$

completando a demonstração. ■

Observação 278. Para $C = X$, $K = \{0\}$, obtemos como corolário do Teorema 276 o seguinte resultado:

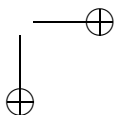
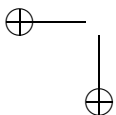
Se $T \in B(X, Y)$ é sobrejetiva, então existe $r > 0$ tq $B_r \subset T(B_1)$.

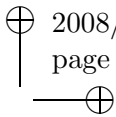
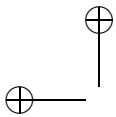
Na análise funcional este resultado é conhecido como *teorema da aplicação aberta* (veja, e.g., [Kre, Secção 4.12]). □

Definição 279. Seja $x \in X_{ad} = C \cap F^{-1}(K) \cap O$. O conjunto

$$L(X_{ad}, x) := \{h \in X \mid h \in C(x), dF(x)h \in K(F(x))\}$$

é denominado *cone linearizado em x para (P)* . □





O teorema a seguir permite-nos acoplar a desigualdade $dJ(x_0)h \geq 0$, $h \in T(X_{ad}, x_*)$, obtida no Teorema 274, com a derivada de F . Este resultado é exatamente o que nos fornece as condições necessárias de otimalidade para o problema (P) (veja Teoremas 283 e 284).

Teorema 280. *Se x é um ponto regular para (P), então*

$$L(X_{ad}, x) \subset T(X_{ad}, x).$$

*Demonstração:*¹ Seja $h \in C(x)$ com $h = a(c-x)$, $dF(x)h = b(k-F(x))$, onde $a, b \geq 0$, $c \in C$ e $k \in K$. Temos que provar que $\exists t_0 > 0$ e $r : [0, t_0] \rightarrow X$ satisfazendo para todo $t \in [0, t_0]$:

$$x + th + r(t) \in C, F(x + th + r(t)) \in K$$

e ainda que $\lim_{t \downarrow 0} r(t)/t = 0$.

Como x é ponto regular, então $x + 2th \in C$ e $F(x) + 2tdF(x)h \in K$ para t suficientemente pequeno. Como C e K são ambos convexos, basta provar que $\exists t_0 > 0$ e $r : [0, t_0] \rightarrow X$ satisfazendo

$$(B.2) \quad x + 2r(t) \in C, F(x) + 2z(t) \in K, \forall t \in [0, t_0] \quad \text{e} \quad \lim_{t \downarrow 0} r(t)/t = 0,$$

onde $z : [0, t_0] \rightarrow Y$ é definida por $z(t) := F(x + th + r(t)) - F(x) - tdF(x)h$.

Para cada $t \in [0, t_0]$ construímos os vetores $r(t) \in X$ e $z(t) \in Y$ tomando limites de seqüências que são obtidas por uma variante do método de Newton. Vamos à construção:

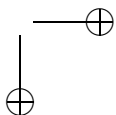
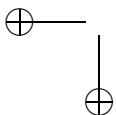
Se $h = 0$ tome simplesmente $r(t) \equiv 0$. Seja então $h \in X \setminus \{0\}$ com $h = a(c-x)$, $dF(x)h = b(k-F(x))$, onde $a, b \geq 0$, $c \in C$ e $k \in K$. O Teorema 276 e o Corolário 277 garantem a existência de $s > 0$ tal que

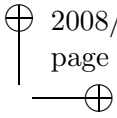
$$(B.3) \quad B_s \subset dF(x)(C-x)_1 - (K-F(x))_1.$$

Escolha $\delta \in [0, \frac{1}{4}]$ com $B_{4\delta} \subset O$ e $\|dF(\xi) - dF(x)\| \leq s/2$, para todo $\xi \in B_{4\delta}$. Defina agora $t_0 := 2\delta\|h\|^{-1}$ e tome $t \in [0, t_0]$ qualquer. Nos passos a seguir definimos os valores de $r(t)$ e $z(t)$ e provamos que satisfazem (B.2).

(1) Provamos inicialmente que $\|F(\bar{x}) - F(\hat{x}) - dF(x)(\bar{x} - \hat{x})\| \leq \frac{s}{2}\|\bar{x} - \hat{x}\|$, para todo $\bar{x}, \hat{x} \in B_{4\delta}$.

¹Conforme [Al].





De fato, definindo $g(\nu) := F(\nu\bar{x} + (1-\nu)\hat{x}) - \nu dF(x)(\bar{x} - \hat{x})$ para $\nu \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \|g(1) - g(0)\| &\leq \sup_{\nu \in [0,1]} \|g'(\nu)\| \\ &= \sup\{\|(dF(\xi) - dF(x))(\bar{x} - \hat{x})\| \mid \xi \text{ 'entre' } \bar{x} \text{ e } \hat{x}\} \\ &\leq \frac{s}{2}\|\bar{x} - \hat{x}\| \end{aligned}$$

(2) Definimos indutivamente sete seqüências que nos permitirão construir $r(t)$ e $z(t)$. Para que a construção faça sentido, definimos $r_{-1} = z_{-1} = x_{-1} = y_{-1} = 0$. Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tome

$$\begin{aligned} r_k &:= r_{k-1} + x_{k-1}, \\ z_k &:= z_{k-1} + y_{k-1}, \\ d_k &:= z_k - F(x + th + r_k) + F(x) + t dF(x)h, \\ u_k, v_k &: \begin{cases} \text{se } d_k = 0, & u_k = v_k = 0, \\ \text{se } d_k \neq 0, & u_k \in (C - x)_1, v_k \in (K - F(x))_1 \text{ com} \\ & dF(x)u_k - v_k = s\|d_k\|^{-1}d_k, \end{cases} \\ x_k &:= s^{-1}\|d_k\|u_k, \\ y_k &:= s^{-1}\|d_k\|v_k. \end{aligned}$$

(3) Provamos usando argumento indutivo que as seqüências em (2) estão bem definidas e que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned} r_k \in 2s^{-1}\|d_0\|(C - x)_1, \quad z_k \in 2s^{-1}\|d_0\|(K - F(x))_1, \\ \|d_k\| \leq 2^{-k}\|d_0\| \leq 2^{-k}s\delta. \end{aligned}$$

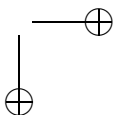
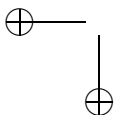
• Para $k = 0$, temos $r_0 = z_0 = 0$ e $\|x + th + r_0 - x\| \leq t\|h\| \leq 2\delta$. Logo, de (1) segue

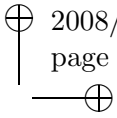
$$\|d_0\| = \|F(x + th) - F(x) - dF(x)th\| \leq \frac{s}{2}t\|h\| \leq s\delta.$$

Note ainda que u_0 e v_0 estão bem definidos por (B.3).

• Para $k \geq 1$, temos:

$$r_k = \sum_{i=0}^{k-1} x_i = \sum_{i=0}^{k-1} s^{-1}\|d_i\|u_i = 2s^{-1}\|d_0\| \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\|d_i\|}{2\|d_0\|}u_i,$$





com $u_i \in (C - x)_1$. Note que

$$0 \leq \|d_i\|(2\|d_0\|)^{-1} \leq 1, \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{k-1} \|d_i\|(2\|d_0\|)^{-1} \leq 1.$$

Logo, $s(2\|d_0\|)^{-1}r_k$ é combinação linear convexa de $u_0, \dots, u_{k-1}, 0 \in (C - x)_1$, i.e. $r_k \in 2s^{-1}\|d_0\|(C - x)_1$. A estimativa para $\|z_k\|$ é obtida de forma análoga.

Como $\|d_0\| \leq s\delta$, temos

$$\|x + th + r_k - x\| \leq t\|h\| + \|r_k\| \leq 4\delta, \quad \|x + th + r_{k-1} - x\| \leq 4\delta$$

e

$$\begin{aligned} -d_k &= F(x + th + r_k) - F(x) - t dF(x)h - z_k \\ &= F(x + th + r_k) - F(x) - t dF(x)h - z_{k-1} - y_{k-1} \\ &= F(x + th + r_k) - F(x) - t dF(x)h - z_{k-1} + d_{k-1} \\ &\quad - dF(x)x_{k-1} \\ &= F(x + th + r_k) - F(x + th + r_{k-1}) - dF(x)x_{k-1}. \end{aligned}$$

De (1) obtemos agora

$$\|d_k\| \leq \frac{s}{2}\|x_{k-1}\| \leq \frac{1}{2}\|d_{k-1}\|\|u_{k-1}\| \leq \frac{1}{2}\|d_{k-1}\| \leq 2^{-k}\|d_0\|,$$

completando assim a prova por indução.

(4) Sobre a convergência das seqüências r_k e z_k :

- $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \leq 2\delta < \infty$. Definindo $r(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} r_k$, temos que $r(t) \in 2s^{-1}\|d_0\|(C - x)_1$, pois $(C - x)_1$ é fechado.
- $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois $\sum_{k=0}^{\infty} \|y_k\| \leq 2\delta < \infty$. Definindo $z(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$, temos que $z(t) \in 2s^{-1}\|d_0\|(K - F(x))_1$, pois $(K - F(x))_1$ é fechado.

Como $t \in [0, t_0]$ é arbitrário, r e z estão bem definidas no intervalo $[0, t_0]$.

(5) Verificação de (B.2).

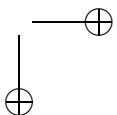
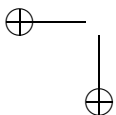
Em (3) vimos que $s^{-1}\|d_0\| \leq \delta \leq \frac{1}{4}$. Logo, $r(t) \in \frac{1}{2}(C - x)_1$ e $z(t) \in \frac{1}{2}(K - y)_1$, i.e.

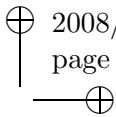
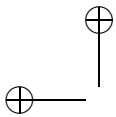
$$x + 2r(t) \in C, \quad F(x) + 2z(t) \in K, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Para completar a demonstração, note que

$$0 \leq t^{-1}\|r(t)\| \leq t^{-1}2s^{-1}\|d_0\| \leq 2s^{-1}t^{-1}\|F(x + th) - F(x) - t dF(x)(h)\|,$$

provando assim que $\lim_{t \downarrow 0} r(t)t^{-1} = 0$. ■





B.1.3 Condições Necessárias para o Problema Abstrato

Nesta secção é obtida uma versão do teorema de multiplicadores de Lagrange, que nos permite derivar condições necessárias para a otimalidade de uma solução do problema (P) .

Definição 281. Seja X um espaço de Banach e $M \subset X$. O conjunto

$$M^* := \{\lambda \in X^* \mid \langle \lambda, m \rangle \geq 0 \ \forall m \in M\}$$

é denominado *cone dual a M em X^** .²

□

Observação 282. Um subconjunto M de um espaço vetorial é denominado *cone*, quando $x \in M$ implica em $ax \in X$, para todo $a \in (0, \infty)$. É fácil ver que o conjunto M^* na Definição 281 satisfaz essa propriedade. Outra propriedade de simples verificação relacionada ao cone dual é que

$$(M - x)^* = M(x)^*,$$

para todo $x \in M \subset X$.

□

Teorema 283. *Seja x_* um mínimo local de (P) . Se x_* é um ponto regular para (P) , então existem $\psi \in C(x_*)^*$, $\phi \in K(F(x_*))^*$ tais que*

$$(B.4) \quad dJ(x_*) - \phi \circ dF(x_*) = \psi.$$

Demonstração: Dos Teoremas 274 e 280 temos $dJ(x_*)h \geq 0$, para todo $h \in L(X_{ad}, x_*)$, isto é

$$dJ(x_*)h \geq 0, \ \forall h \in C(x_*) \text{ com } dF(x_*)h \in K(F(x_*)).$$

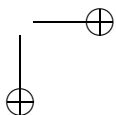
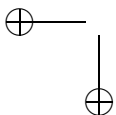
Fazemos agora uma construção que permite-nos utilizar um teorema de separação para conjuntos convexos a fim de provar o teorema.

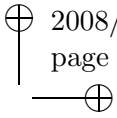
(1) Definimos o conjunto $A \subset Y \times \mathbb{R}$ por

$$A := \{(y - dF(x_*)x, dJ(x_*)x + a) \mid x \in C(x_*), y \in K(F(x_*)), a \geq 0\}.$$

A é obviamente convexo e ainda $(0, 0) \in A$ (tome $x = 0, y = 0, a = 0$). Note ainda que $(0, 0) \notin \text{int}(A)$, pois $(0, b) \notin A$ para $b < 0$.

²A aplicação de um funcional $\lambda \in X^*$ ao elemento $x \in X$ é aqui representada por $\langle \lambda, x \rangle$.





(2) Provamos que $\text{int}(A) \neq \emptyset$.

Como x_* é um ponto regular para (P) , o Corolário 277 e o Teorema 276 garantem que existe $r > 0$ tal que

$$B_r \subset -dF(x_*)(C - x_*)_1 + (K - F(x_*))_1.$$

Defina $\gamma := \sup\{dJ(x_*)x \mid x \in (C - x_*)_1\}$. Basta provarmos que $B_r \times \{b \in \mathbb{R} \mid b \geq \gamma\} \subset A$.

Sejam $\bar{y} \in B_r$ e $b \geq \gamma$, então existem $x \in (C - x_*)_1 \subset C(x_*)$, $y \in (K - F(x_*))_1 \subset K(F(x_*))$ com $\bar{y} = y - dF(x_*)x$. Tomando $a := b - dJ(x_*)x$, temos $a \geq b - \gamma \geq 0$ e $b = dJ(x_*)x + a$. Logo, $(\bar{y}, b) \in A$.

(3) Provamos que

$$\langle \rho, y - dF(x_*)x \rangle + \eta(dJ(x_*)x + a) \geq 0, \quad \forall x \in C(x_*), y \in K(F(x_*)), a \geq 0.$$

De (1) e (2) podemos aplicar um teorema de separação a $(0, 0) \in \partial A$ (veja [We]), o qual neste caso particular nos garante a existência de $\lambda \in (Y \times \mathbb{R})^*$, $\lambda \neq 0$ satisfazendo

$$\langle \lambda, z \rangle \geq \langle \lambda, (0, 0) \rangle, \quad \forall z \in A.$$

Podemos decompor λ em $\lambda = (\rho, \eta) \in Y^* \times \mathbb{R}$, onde $\|\rho\| + |\eta| \neq 0$. Temos então para $z = (\bar{y}, b) \in A$

$$0 \leq \langle \lambda, (\bar{y}, b) \rangle = \langle \rho, \bar{y} \rangle + \eta b.$$

A desigualdade desejada segue agora da definição de A .

(4) Provamos que $\eta > 0$.

Tomando $x = y = 0$ em (3), obtemos $\eta a \geq 0$, para todo $a \geq 0$; logo $\eta \geq 0$. Se $\eta = 0$, então

$$\langle \rho, dF(x_*)x - y \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C(x_*), y \in K(F(x_*)).$$

Entretanto, do Corolário 277 temos $dF(x_*)C(x_*) - K(F(x_*)) = Y$, o que implica em

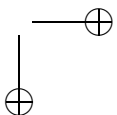
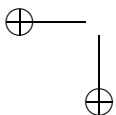
$$\langle \rho, \bar{y} \rangle \leq 0, \quad \forall \bar{y} \in Y.$$

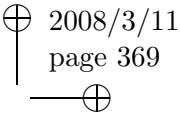
De onde concluímos que $\rho = 0$, o que contradiz o fato de $\|\rho\| + |\eta| \neq 0$.

(5) Construção de $\psi \in C(x_*)^*$, $\phi \in K(F(x_*))^*$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\eta = 1$. Tomando $x = 0$, $a = 0$ em (3), temos

$$\langle \rho, y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K(F(x_*)),$$





provando que $\rho \in K(F(x_*))^*$. Tomando agora $y = 0$, $a = 0$ em (3), obtemos

$$dJ(x_*)x - \langle \rho, dF(x_*)x \rangle \geq 0, \forall x \in C(x_*),$$

provando que $dJ(x_*) - \rho \circ dF(x_*) \in C(x_*)^*$.

A equação (B.4) segue agora tomando $\psi := dJ(x_*) - \rho \circ dF(x_*)$ e $\phi := \rho$. ■

A equação (B.4) é denominada *condição de Kuhn–Tucker*.

Teorema 284. *Seja x_* um mínimo local de (P) . Se x_* é um ponto regular fraco para (P) , então existem $\eta \in \mathbb{R}$, $\psi \in C(x_*)^*$, $\phi \in K(F(x_*))^*$ tais que*

$$(B.5) \quad \eta dJ(x_*) - \phi \circ dF(x_*) = \psi,$$

onde $|\eta| + \|\psi\| + \|\phi\| \neq 0$.

Demonstração: Se x_* for ponto regular para (P) , basta aplicar o Teorema 283 e obtemos (B.5) com $\eta = 1$.

Suponha agora que x_* é ponto fracamente regular para (P) , mas não é regular. Definindo o conjunto $A := dF(x_*)(C - x_*) - (K - F(x_*))$, temos que $\text{int}(A) \neq \emptyset$, A é convexo, $0 \notin \text{int}(A)$. Portanto, o mesmo teorema de separação usado na demonstração do Teorema 283 (veja [We]) nos garante a existência de $\phi \in Y^*$, $\phi \neq 0$ satisfazendo

$$\langle \phi, a \rangle \leq 0 \quad \forall a \in A.$$

Da definição de A segue

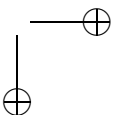
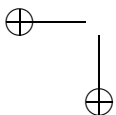
$$\langle \phi, dF(x_*)x - y \rangle \leq 0, \quad \forall x \in (C - x_*), \quad y \in (K - F(x_*)).$$

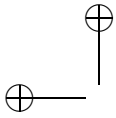
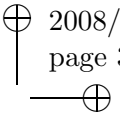
Tomando $x = 0$, temos $\phi \in (K - F(x_*))^*$ e tomando $y = 0$, temos $-\phi \circ dF(x_*) \in (C - x_*)^*$. Definindo $\psi := -\phi \circ dF(x_*)$, temos da Observação 282 que $\psi \in C(x_*)^*$, $\phi \in K(F(x_*))^*$. A equação (B.5) segue agora com $\eta = 0$. ■

A equação (B.5) é denominada *condição de Fritz–John*.

Observação 285. Para problemas de otimização da forma especial

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(x) \\ \text{s.a. } x \in \mathbb{R}^n \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l \end{cases}$$





é possível obter uma condição suficiente (condição de Slater) para que um mínimo local seja sempre regular (veja [We]). Neste caso, obtemos um teorema de multiplicadores com $\eta \neq 0$ (veja a Conjectura na página 359). \square

B.2 Um Problema Auxiliar

Consideramos novamente o problema $P(0, z_0)$ (ver Secção 10.1) e, a fim de simplificar a notação, substituímos o tempo final (livre) t_1 por T . As funções L, f, L_1, ψ e H são definidas como na Secção 10.1. No texto a seguir representamos por $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{T})$ uma solução do problema $P(0, z_0)$.

Através de uma mudança de variáveis (transformação no tempo) é criado um problema auxiliar que nos permite investigar $P(0, z_0)$ à luz do princípio do máximo. Seja

$$V_+ := \{w \in L_\infty(0, 1) \mid w(\tau) \geq 0 \text{ q.s.}\}.$$

Dada $v \in V_+$, podemos definir $t \in C[0, 1]$ e $T \geq 0$ através de

$$(B.6) \quad t(\tau) := \int_0^\tau v(s) ds, \quad \tau \in [0, 1], \quad T := t(1).$$

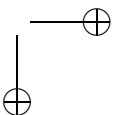
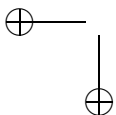
A cada estado $z \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ corresponde uma função $x \in C([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ definida pela correspondência

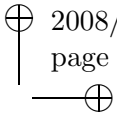
$$(B.7) \quad x(\tau) := z(t(\tau)), \quad \tau \in [0, 1].$$

Fixada a função $\bar{w} \in L_{loc}^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^m)$ com $\bar{w}(t) \in \Omega$ q.s., corresponde para cada controle $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ o controle $w \in L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ da forma

$$(B.8) \quad w(\tau) := \begin{cases} u(t(\tau)) & , \text{ se } \tau \in \{s \in [0, 1] \mid v(s) > 0\} \\ \bar{w}(t(\tau)) & , \text{ se } \tau \in \{s \in [0, 1] \mid v(s) = 0\} \end{cases} .$$

Formulamos agora o problema de otimização auxiliar nas variáveis τ, v, x . A forma exata do controle ótimo \bar{u} e de seu correspondente w_* é esclarecida oportunamente no decorrer do texto.





$$PA(w_*) \begin{cases} \text{Minimizar } I(t, x, v) := L_1(t(1), x(1)) \\ + \int_0^1 v(\tau) L(t(\tau), x(\tau), w_*(\tau)) d\tau \\ \text{sujeito a} \\ x \in C([0, 1]; \mathbb{R}^n), t \in C([0, 1]; \mathbb{R}), v \in V_+, \psi(t(1), x(1)) = 0, \\ x(\tau) = z_0 + \int_0^\tau v(s) f(t(s), x(s), w_*(s)) ds, \tau \in [0, 1], \\ t(\tau) = \int_0^\tau v(s) ds, \tau \in [0, 1]. \end{cases}$$

Verificamos inicialmente que toda solução $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{T})$ do problema $P(0, z_0)$ induz uma solução (t_*, x_*, v_*) do problema $PA(w_*)$.

Lema 286. *Seja $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{T})$ uma solução de $P(0, z_0)$. Sejam ainda $v_* \in V_+$, t_* , x_* satisfazendo (B.6), (B.7) e a função w_* , correspondente a \bar{u} , satisfazendo (B.8). Então (t_*, x_*, v_*) é mínimo local de $PA(w_*)$.*

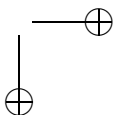
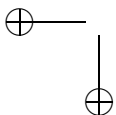
Demonstração: Verificamos inicialmente que t_* , x_* , v_* satisfazem as restrições de $PA(w_*)$ e ainda que $I(t_*, x_*, v_*) = J(\bar{z}, \bar{u}, \bar{T})$.

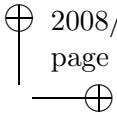
- $$\begin{aligned} x_*(\tau) &= \bar{z}(t(\tau)) = z_0 + \int_0^{t_*(\tau)} f(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds \\ &= z_0 + \int_0^\tau f(t_*(r), \bar{z}(t_*(r)), \bar{u}(t_*(r))) v_*(r) dr \\ &= z_0 + \int_0^\tau v_*(r) f(t_*(r), x_*(r), w_*(r)) dr \end{aligned}$$
- $$\psi(t_*(1), x_*(1)) = \psi(\bar{T}, \bar{z}(\bar{T}))$$
- $$\begin{aligned} I(t_*, x_*, v_*) &= L_1(t_*(1), x_*(1)) + \int_0^1 v_*(\tau) L(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau)) d\tau \\ &= L_1(\bar{T}, \bar{z}(\bar{T})) + \int_0^{\bar{T}} L(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds \\ &= J(\bar{z}, \bar{u}, \bar{T}) \end{aligned}$$

Defina a vizinhança O de (t_*, x_*) por

$$O := \{(t, x) \in C([0, 1]; \mathbb{R}) \times C([0, 1]; \mathbb{R}^n) \mid \|t - t_*\|_\infty < 1, \|x - x_*\|_\infty < 1\}.$$

Seja $(t, x) \in O$ satisfazendo as restrições de $PA(w_*)$. Defina o seguinte





$z \in L^\infty([0, t(1)]; \mathbb{R}^n)$ e $u \in L^\infty([0, t(1)]; \mathbb{R}^m)$ por

$$z(s) := x(\tau(s)), \quad u(s) := w_*(\tau(s)),$$

onde $\tau(s) := \inf\{\tau \in [0, 1] \mid t(\tau) = s\}$.³ Logo,

$$z(t(\tau)) = x(\tau), \quad \forall \tau \in [0, 1], \quad u(t(\tau)) = w_*(\tau), \quad \forall \tau \text{ com } v(\tau) > 0.$$

Com uma simples mudança de variáveis nas integrais que surgem em (B.6) – (B.8), verificamos que $(z, u, t(1))$ satisfaz as restrições do problema $P(0, z_0)$. Daí obtemos a continuidade de z , que por sua vez implica em

$$J(z, u, t(1)) = I(t, x, v).$$

A otimalidade de $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{T})$ implica agora em

$$I(t, x, v) = J(z, u, t(1)) \geq J(\bar{z}, \bar{u}, \bar{T}) = I(t_*, x_*, v_*)$$

e o lema fica provado. (Usamos tacitamente na demonstração o fato de que, caso Ω seja ilimitado, então L e f satisfazem

$$\sup\{|L(t, x, w_*(\cdot))|; t \in [0, t^* + 1], x \in \mathbb{R}^n\} \leq m(\cdot),$$

$$\sup\{|f(t, x, w_*(\cdot))|; t \in [0, t^* + 1], x \in \mathbb{R}^n\} \leq m(\cdot),$$

para algum $m \in L^1[0, 1]$. ■

Verificamos a seguir que a equação integral para x em $PA(w_*)$ define um operador continuamente diferenciável. Isto é feito no lema a seguir, onde abrimos mão da forma especial do operador integral.

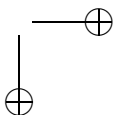
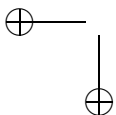
Lema 287. *Seja $g : [0, 1] \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ mensurável no primeiro argumento e duas vezes continuamente diferenciável no segundo. Seja ainda $\hat{x} \in C([0, 1]; \mathbb{R}^l)$. Suponha que existe $m \in L^1[0, 1]$ tal que, para todo $\tau \in [0, 1]$ e $y \in \mathbb{R}^n$ com $|y| \leq \|\hat{x}\|_\infty + 1$, tenhamos*

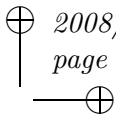
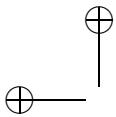
$$\max\{|g(\tau, y)|, |D_x g(\tau, y)|, |D_{xx} g(\tau, y)|\} \leq m(\tau).$$

Então a aplicação $G : O \subset L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^l) \rightarrow C([0, 1]; \mathbb{R}^l)$, onde O é uma vizinhança aberta de \hat{x} , definida por

$$(B.9) \quad (Gx)(\tau) := \int_0^\tau g(s, x(s)) ds$$

³O conjunto $\{\tau \in [0, 1] \mid t(\tau) = s\}$ é um intervalo fechado para todo $s \in [0, 1]$.





é continuamente diferenciável em O e sua derivada (de Fréchet) em $x \in O$ é dada por

$$(B.10) \quad (DG(x)(h))(\tau) = \int_0^\tau D_x g(s, x(s))h(s) ds, \quad \tau \in [0, 1].$$

Demonstração: As hipóteses do lema garantem que o operador G definido em (B.9) está bem definido em uma vizinhança $O \subset L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^l)$ de \hat{x} . Temos ainda que o operador em (B.10):

$$L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^l) \ni h \mapsto \int_0^\cdot D_x g(s, x(s))h(s) ds \in C([0, 1]; \mathbb{R}^l)$$

é linear e contínuo se $x \in O$. Portanto, para provar o lema basta verificar (B.10) em um único ponto $x \in O$, por exemplo em $x = \hat{x}$.

Seja $h \in L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^l)$ com $\|h\|_\infty < 1$. Então, para todo $\tau \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} |G(\hat{x} + h)(\tau) - G(\hat{x})(\tau) - \int_0^\tau D_x g(s, \hat{x}(s))h(s) ds| & \\ & \leq \int_0^1 |g(s, \hat{x}(s) + h(s)) - g(s, \hat{x}(s)) - D_x g(s, \hat{x}(s))h(s)| ds \\ & \leq \int_0^1 |h(s)|^2 \sup\{|D_{xx}g(s, \xi)|; |\xi - \hat{x}(s)| \leq |h(s)|\} ds \\ & \leq \|h\|_\infty^2 \|m\|_1. \end{aligned}$$

Portanto,

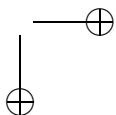
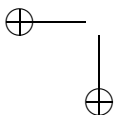
$$\lim_{\|h\|_\infty \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|G(\hat{x} + h) - G(\hat{x}) - \int_0^\cdot D_x g(s, \hat{x}(s))h(s) ds\|_\infty}{\|h\|_\infty} \right\} = 0,$$

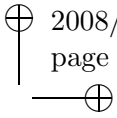
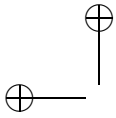
provando assim que $(DG(\hat{x})(h))(\tau) = \int_0^\tau D_x g(s, \hat{x}(s))h(s) ds$. ■

Na seqüência aplicamos o teorema de multiplicadores 283 ao problema $PA(w_*)$, definido no início desta secção.

Lema 288. *Suponha que, para $t \in [0, \bar{T} + 1]$ e $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| \leq \|x_*\|_\infty + 1$, tenhamos*

$$(B.11) \quad \begin{aligned} |L(t, x, w_*(\cdot))|, |D_t L(t, x, w_*(\cdot))|, |D_x L(t, x, w_*(\cdot))| & \leq m(\cdot), \\ |D_{tt} L(t, x, w_*(\cdot))|, |D_{tx} L(t, x, w_*(\cdot))|, |D_{xx} L(t, x, w_*(\cdot))| & \leq m(\cdot), \\ |f(t, x, w_*(\cdot))|, |D_t f(t, x, w_*(\cdot))|, |D_x f(t, x, w_*(\cdot))| & \leq m(\cdot), \\ |D_{tt} f(t, x, w_*(\cdot))|, |D_{tx} f(t, x, w_*(\cdot))|, |D_{xx} f(t, x, w_*(\cdot))| & \leq m(\cdot), \end{aligned}$$





onde $m \in L^1[0, 1]$. Então existem $\lambda \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ e funções absolutamente contínuas $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $(\lambda, \mu, r, q) \neq 0$,

$$(B.12) \quad \begin{cases} \frac{dr}{d\tau}(\tau) = -v_*(\tau)[D_t f(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau))^* q(\tau) \\ \quad + \lambda D_t L(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau))], \\ \frac{dq}{d\tau}(\tau) = -v_*(\tau)[D_x f(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau))^* q(\tau) \\ \quad + \lambda D_x L(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau))], \end{cases}$$

para todo $\tau \in [0, 1]$,

$$(B.13) \quad \begin{cases} r(1) = \lambda D_t L_1(t_*(1), x_*(1)) - D_t \psi(t_*(1), x_*(1))^* \mu, \\ q(1) = \lambda D_x L_1(t_*(1), x_*(1)) - D_x \psi(t_*(1), x_*(1))^* \mu, \end{cases}$$

e ainda

$$(B.14) \quad \int_0^1 [r(\tau) + f(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau))^* q(\tau) \\ + \lambda L(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau))](v(\tau) - v_*(\tau)) d\tau \geq 0,$$

para todo $v \in V_+$.

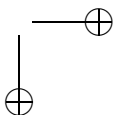
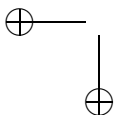
Demonstração: A fim de escrever o problema $PA(w_*)$ na forma do problema abstrato de otimização (P) na Secção B.1, definimos

$$\begin{aligned} X &:= C([0, 1]; \mathbb{R}) \times C([0, 1]; \mathbb{R}^n) \times L^\infty[0, 1], \quad J := I, \\ Y &:= C([0, 1]; \mathbb{R}) \times C([0, 1]; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^p, \quad K := \{(0, 0)\} \subset Y, \\ C &:= \{(t, x, v) \in X \mid v(t) \geq 0 \text{ q.s.}\}, \\ O &:= \{(t, x, v) \in X \mid \|t - t_*\|_\infty < 1, \|x - x_*\|_\infty < 1\}. \end{aligned}$$

A aplicação $F : O \rightarrow Y$ é definida por

$$F(t, x, v) := \begin{pmatrix} t(\cdot) - \int_0^\cdot v(s) ds \\ x(\cdot) - z_0 - \int_0^\cdot v(s) f(t(s), x(s), w_*(s)) ds \\ \psi(t(1), x(1)) \end{pmatrix}.$$

A hipótese sobre ψ garante que a aplicação $(t, x) \mapsto \psi(t(1), x(1))$ é continuamente diferenciável. Do Lema 287 temos que F é continuamente



(Fréchet-)diferenciável com derivada⁴

$$dF(t_*, x_*, v_*)(t, x, v) = \begin{pmatrix} t(\cdot) - \int_0^{\cdot} v(s) ds \\ x(\cdot) - \int_0^{\cdot} (v_*(s)[D_t f(s)t(s) + D_x f(s)x(s)] + v(s)f(s)) ds \\ D_t \psi(t_*(1), x_*(1))t(1) + D_x \psi(t_*(1), x_*(1))x(1) \end{pmatrix}.$$

A aplicação $J : O \rightarrow \mathbb{R}$ também é continuamente diferenciável (pelo mesmo argumento) e sua derivada é dada por⁵

$$dJ(t_*, x_*, v_*)(t, x, v) = \int_0^1 (v_*(s)[D_t L(s)t(s) + D_x L(s)^* x(s)] + v(s)L(s)) ds + D_x L_1(1)t(1) + D_x L_1(1)^* x(1).$$

(1) Provamos inicialmente o lema no caso em que $dF(t_*, x_*, v_*) : X \rightarrow Y$ não é sobrejetiva. Temos que provar que

$$(B.15) \quad \exists (\mu, q, r) \neq 0 \text{ com } r(\tau) + f(\tau)^* q(\tau) = 0 \text{ q.s.}$$

e que a equação adjunta (B.12) vale com $\lambda = 0$.

Considere o problema de valor inicial

$$(B.16) \quad \frac{dy}{d\tau} = A(\tau)y + b(\tau)v, \quad y(0) = 0, \quad y_1 = Cy(1),$$

onde

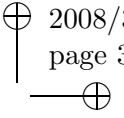
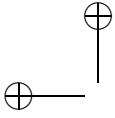
$$y = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_* D_t f & v_* D_x f \end{pmatrix}, \quad b(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, \quad C = (D_t \psi \quad D_x \psi).$$

Note que, se todo $y_1 \in \mathbb{R}^p$ pode ser alcançado como valor final em (B.16) por uma escolha conveniente de $v \in L^\infty[0, 1]$, então $dF(t_*, x_*, v_*)$ é sobrejetiva. De fato, seja $\Phi(\cdot, \cdot)$ a matriz de transição de (B.16), i.e. as colunas de $\Phi(\cdot, \cdot)$ geram soluções linearmente independentes de $\frac{dy}{d\tau} = A(\tau)y$. Seja $(\bar{y}, \bar{y}_1) \in Y$ qualquer. Logo, existe $\tilde{y} = (\tilde{t}, \tilde{x})$ tal que

$$\tilde{y}(\tau) - \int_0^\tau A(s)\tilde{y}(s) ds = \bar{y}(\tau), \quad \tau \in [0, 1].$$

⁴Notação simplificada: $f(s) := f(t_*(s), x_*(s), w_*(s))$.

⁵Notação simplificada: $L(s) := L(t_*(s), x_*(s), w_*(s))$ e $L_1(1) := L_1(1, x_*(1))$.



(Aplicação do teorema de ponto fixo de Banach para operadores integrais de Volterra; veja, e.g., [Kre, Secção 5.4].)

Escolha v de modo que (B.16) possua solução $y = (t, x)$ com $y(1) = \bar{y}_1 - C\tilde{y}(1)$. É fácil ver que $(\tilde{y} + y, v) = (\tilde{t} + t, \tilde{x} + x, v) \in X$ satisfaz

$$dF(t_*, x_*, v_*)(\tilde{y} + y, v) = (\bar{y}, \bar{y}_1),$$

ficando assim verificada a sobrejetividade de $dF(t_*, x_*, v_*)$.

Como supomos $dF(t_*, x_*, v_*)$ não sobrejetiva, existe necessariamente (ao menos um) $\mu \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ ortogonal ao subespaço

$$\{y_1 \in \mathbb{R}^p \mid y_1 \text{ é atingível por algum } v \in L^\infty[0, 1]\}.$$

Logo,

$$0 = \mu^* C y(1) = \int_0^1 \mu^* C \Phi(1, \tau) b(\tau) v(\tau) d\tau, \forall v \in L^\infty[0, 1].$$

Portanto, $-\mu^* C \Phi(1, \tau) b(\tau) = 0$ q.s. em $[0, 1]$. Defina $\bar{q} = (r, q) \in C([0, 1]; \mathbb{R}^{n+1})$ por $\bar{q}(\tau) := -\Phi(1, \tau)^* C^* \mu$. Logo,

$$\begin{cases} \frac{d\bar{q}}{d\tau}(\tau) = -A(\tau)^* \bar{q}(\tau), \tau \in [0, 1] & \text{(provando (B.12) com } \lambda = 0) \\ \bar{q}(1) = -C^* \mu & \text{(provando (B.13))} \end{cases}$$

e ainda

$$0 = b(\tau)^* \bar{q}(\tau) = r(\tau) + f(\tau)^* q(\tau), \text{ q.s. em } [0, 1],$$

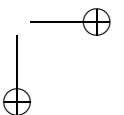
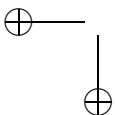
provando assim (B.15) e, por conseguinte, (B.14).

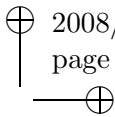
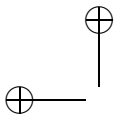
(2) Consideramos agora o caso em que $dF(t_*, x_*, v_*) : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva. Neste caso, (t_*, x_*, v_*) é um ponto fracamente regular para $PA(w_*)$. De fato, como $\text{int}(C) \neq \emptyset$, temos que o cone tangencial $C(t_*, x_*, v_*)$ também possui interior não vazio. O teorema da aplicação aberta (Teorema 276 e Observação 278) garante que

$$\text{int}\{dF(t_*, x_*, v_*) C(t_*, x_*, v_*)\} \neq \emptyset.$$

O Teorema 284 (veja também Observação 285) garante a existência de $\lambda \geq 0$, $\rho \in C(t_*, x_*, v_*)^*$ e $y \in Y^*$ com $\lambda + \|\rho\| + \|y\| \neq 0$ satisfazendo

$$(B.17) \quad \rho(t, x, v) = \lambda dJ(t_*, x_*, v_*)(t, x, v) - y(dF(t_*, x_*, v_*)(t, x, v)),$$





para todo $(t, x, v) \in X$. Note que $\rho(t, x, 0) \geq 0$ para todo par t, x . De fato, isto segue da identidade $\rho(t, x, 0) = \rho((t+t_*, x+x_*, v_*) - (t_*, x_*, v_*))$ e do fato $(t+t_*, x+x_*, v_*) \in C(t_*, x_*, v_*)^*$. Logo, como ρ é linear em todos seus argumentos, temos que $\rho(t, x, 0) = 0$ para todo par t, x . Daí concluímos que $\rho(t, x, v) = \rho(v)$. Segue agora da definição do cone tangencial $C(t_*, x_*, v_*)^*$ que

$$(B.18) \quad \rho(v - v_*) \geq 0, \quad \forall v \in V_+.$$

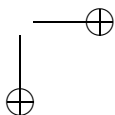
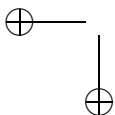
Escrevendo $y = (\zeta, \gamma, \mu)$, temos para todo par t, x

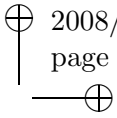
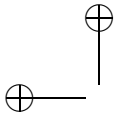
$$\begin{aligned} \rho(v) &= \lambda \int_0^1 [v_*(s)(D_t L(s)t(s) + D_x L(s)^* x(s)) + v(s)L(s)] ds \\ &\quad + \lambda [D_t L_1(1)t(1) + D_x L_1(1)^* x(1)] - \zeta \left(t(\cdot) - \int_0^\cdot v(s) ds \right) \\ &\quad - \gamma^* \left(x(\cdot) - \int_0^\cdot v_*(s)[D_t f(s)t(s) + D_x f(s)x(s)] + v(s)f(s) ds \right) \\ (B.19) \quad &- \mu^* (D_t \psi(1)t(1) + D_x \psi(1)x(1)), \end{aligned}$$

onde $(\lambda, \zeta, \gamma, \mu) \neq 0$.

Defina r e q como solução do problema de valor inicial (retrocedendo no tempo) definido em (B.12), (B.13). A fim de obter (B.14), escolha $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = y$ como solução de (B.16). Substituindo em (B.19) os termos $\zeta(\dots)$ e $\gamma(\dots)$ desaparecem. Para o termo em λ obtemos através de integração por partes:

$$\begin{aligned} &\lambda \int_0^1 v_*(s) D_x L(s)^* x(s) ds \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{dq}{d\tau}(s) - v_*(s) D_x f(s)^* q(s) \right)^* x(s) ds \\ &= \int_0^1 q(s)^* \frac{dx}{d\tau}(s) ds - [q(s)^* x(s)]_0^1 - \int_0^1 (v_*(s) D_x f(s)^* q(s))^* x(s) ds \\ &= \int_0^1 q(s)^* [v_*(s) D_t f(s)t(s) + v_*(s) D_x f(s)x(s) + v(s)f(s)] ds \\ &\quad - q(1)^* x(1) - \int_0^1 v_*(s) q(s)^* D_x f(s)x(s) ds \\ &= \int_0^1 q(s)^* [v_*(s) D_t f(s)t(s) + v(s)f(s)] ds - q(1)^* x(1) \end{aligned}$$





e ainda

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 v_*(s) D_t L(s) t(s) ds &= \int_0^1 \left[-\frac{dr}{d\tau}(s) - v_*(s) q(s)^* D_t f(s) \right] t(s) ds \\ &= \int_0^1 r(s) v(s) ds - r(1) t(1) \\ &\quad - \int_0^1 v_*(s) q(s)^* D_t f(s) t(s) ds. \end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas expressões em (B.19) e observando que

$$\begin{pmatrix} r(1)t(1) \\ q(1)^* x(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\lambda D_t L_1(1) - D_t \psi(1)^* \mu] t(1) \\ [\lambda D_x L_1(1) - D_x \psi(1)^* \mu] x(1) \end{pmatrix},$$

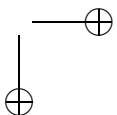
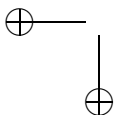
obtemos

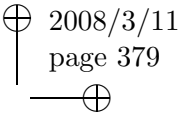
$$\begin{aligned} \rho(v) &= \lambda \int_0^1 v(s) L(s) ds + \int_0^1 v_*(s) q(s)^* f(s) ds \\ &\quad + \int_0^1 q(s)^* v_*(s) D_t f(s) t(s) ds \\ &\quad - q(1)^* x(1) + \int_0^1 v(s) r(s) ds \\ &\quad - \int_0^1 q(s)^* v_*(s) D_t f(s) t(s) ds - r(1) t(1) \\ &\quad + \lambda [D_t L_1(1) t(1) + D_x L_1(1)^* x(1)] \\ &\quad - (D_t \psi(1) t(1) + D_x \psi(1) x(1))^* \mu \\ &= \int_0^1 v(s) [r(s) + f(s)^* q(s) + \lambda L(s)] ds. \end{aligned}$$

De (B.18) obtemos agora

$$\int_0^1 [r(s) + f(s)^* q(s) + \lambda L(s)] (v(s) - v_*(s)) ds = \rho(v - v_*) \geq 0, \quad \forall v \in V_+,$$

provando (B.14). Se $(\lambda, \mu, r, q) = 0$, teríamos $\rho = 0$. Logo, como consequência de (B.17), $y = 0$ (supomos $dF(t_*, x_*, v_*)$ sobrejetora). Mas isso contradiz a desigualdade $\lambda + \|\rho\| + \|y\| \neq 0$, garantida pelo Teorema 284. Fica assim provado o lema. ■





B.3 Condições Necessárias para Otimalidade

Para demonstrar o princípio do máximo, basicamente transformamos as equações e inequações do Lema 288 ao intervalo $[0, \bar{T}]$. Através da escolha adequada de v_* e w_* é por fim obtida a condição de máximo. A demonstração está dividida em seis passos:

(1) Dedução da equação adjunta.

Usando a notação do Lema 288, definimos

$$\tau(s) := \inf\{\tau \mid t(\tau) = s\}, \quad o(s) := r(\tau(s)), \quad p(s) := q(\tau(s)).$$

Logo, $o(t(\tau)) = r(\tau)$, $p(t(\tau)) = q(\tau)$. Temos então de (B.12) que

$$\frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\tau}(\tau) = -v_*(\tau)[D_x f(t)^* q(\tau) - \lambda D_x L(t)]$$

e, como $\frac{dt}{d\tau}(\tau) = v_*(\tau)$, a equação adjunta⁶

$$\frac{dp}{dt}(t) = -D_x f(t)^* p(t) - \lambda D_x L(t) = -D_x H(t)$$

com a condição de contorno:

$$p(\bar{T}) = q(1) = \lambda D_x L_1(\bar{T}) - D_x \psi(\bar{T})^* \mu.$$

Analogamente, obtemos

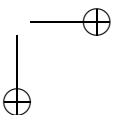
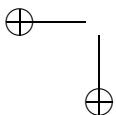
$$\begin{aligned} \frac{do}{dt}(t) &= -D_t H(t), \\ o(T^*) &= \lambda D_t L_1(\bar{T}) - D_t \psi(\bar{T})^* \mu. \end{aligned}$$

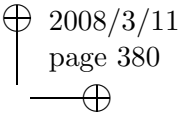
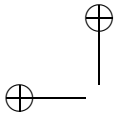
(2) Escolha de $v_* \in V_+$.

Definimos a seguir $v_* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\{\tau \in [0, 1] \mid v_*(\tau) = 0\}$ seja uma união enumerável de intervalos disjuntos B_k e que $\{t_*(B_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ seja um subconjunto denso de $[0, \bar{T}]$. Para tanto, tome $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ um subconjunto denso de $[0, \bar{T}]$ e $\beta_k > 0$ com $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = \frac{1}{2}$. Defina agora

$$\tau_k := \frac{t_k}{2\bar{T}} + \sum_{t_i < t_k} \beta_i, \quad B_k := [\tau_k, \tau_k + \beta_k], \quad B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k.$$

⁶Notação: $f(t) = f(t, z(t), u(t))$, $L(t) = L(t, z(t), u(t))$, $\psi(t) = \psi(t, z(t))$.





Defina finalmente a função v_* por

$$v_*(\tau) := \begin{cases} 0, & \tau \in B \\ 2\bar{T}, & \text{senão.} \end{cases}$$

Logo, $t_*(1) = \int_0^1 v_*(\tau) d\tau = 2\bar{T}$, pois $\mu([0, 1] \setminus B) = \frac{1}{2}$. Para $\tau \in B_k$, temos

$$t_*(\tau) = \int_0^\tau v_*(\tau) d\tau = 2\bar{T} \mu([0, \tau_k] \setminus \bigcup_{t_i < t_k} B_i) = 2\bar{T}(\tau_k - \sum_{t_i < t_k} \beta_i) = t_k.$$

Portanto $t_*(\tau) = t_k, \forall \tau \in B_k$.

(3) Provamos que

$$o(t) + H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), p(t), \lambda) = 0, \text{ q.s. em } [0, \bar{T}].$$

Suponha por contradição que $o(t) + f(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t))^* p(t) + \lambda L(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)) > 0$ em algum subconjunto com medida positiva de $[0, \bar{T}]$. Como t_* é absolutamente contínua, a mudança de variáveis $t = t_*(\tau)$ nos permite concluir que

$$r(\tau) + f(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau))^* q(\tau) + \lambda L(t_*(\tau), x_*(\tau), w_*(\tau)) > 0$$

em um subconjunto A de $\{\tau \mid v^*(\tau) > 0\}$ com $\mu(A) > 0$. Definindo agora

$$v(\tau) := \begin{cases} v_*(\tau), & \tau \notin A \\ 0, & \tau \in A \end{cases},$$

obtemos

$$\int_0^1 [r(\tau) + f(\tau)^* q(\tau) + \lambda L(\tau)] (v(\tau) - v_*(\tau)) d\tau < 0,$$

contradizendo (B.14).

(4) Dedução da equação de evolução da função de Hamilton.

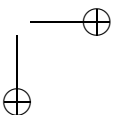
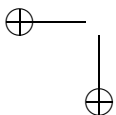
Note que de (1) e (3) segue

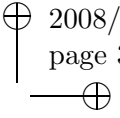
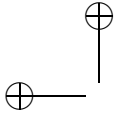
$$H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), p(t), \lambda) = o(t) = - \int_t^{\bar{T}} D_t H(s) ds - \lambda D_t L_1(\bar{T}) + D_t \psi(\bar{T})^* \mu.$$

(5) Escolha de w_* no conjunto $\{\tau \in [0, 1] \mid v_*(\tau) = 0\}$.

Sejam $c_j \in \mathbb{R}$ para $j \in \mathbb{N}$, tais que para todo $|t| \leq \bar{T} + 1, |x| \leq \|x_*\|_\infty + 1, |u| < j$, tenhamos

$$|L(t, x, u)|, |f(t, x, u)|, |D_x L(t, x, u)|, |D_x f(t, x, u)|,$$





$$\begin{aligned}
 &|D_t L(t, x, u)|, |D_t f(t, x, u)| \leq c_j, \\
 &|D_{xx} L(t, x, u)|, |D_{xx} f(t, x, u)|, |D_{xt} L(t, x, u)|, |D_{xt} f(t, x, u)| \leq c_j, \\
 &|D_{tt} L(t, x, u)|, |D_{tt} f(t, x, u)|, |D_{tx} L(t, x, u)|, |D_{tx} f(t, x, u)| \leq c_j.
 \end{aligned}$$

Escreva agora $B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{k,j}$, $k \in \mathbb{N}$, onde $\mu(B_{k,j}) \leq c_0/(2^k c_j)$ para alguma constante c_0 . (Este passo é desnecessário quando Ω é limitado.) Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $\{u_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}$ um subconjunto denso de $\Omega \cap \{u \in \mathbb{R}^m \mid j-1 \leq |u| < j\}$. Escreva $B_{k,j} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{k,j,i}$, onde $B_{k,j,i}$ são intervalos disjuntos. Defina agora

$$w_*(\tau) := u_i^j, \text{ se } \tau \in B_{k,j,i}.$$

Note que a condição (B.11) do Lema 288 é satisfeita para essa escolha de w_* . De fato, para todo $|t| \leq \bar{T} + 1$, $|x| \leq \|x_*\|_\infty + 1$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |L(t, x, w_*(\tau))| d\tau &= \int_{[0,1] \setminus B} |L(t, x, \bar{u}(t_*(\tau)))| d\tau \\
 &\quad + \int_B |L(t, x, \bar{u}(t_*(\tau)))| d\tau \\
 &\leq M + \int_{\bigcup B_{k,j,i}} |L(t, x, u_i^j)| d\tau \\
 &\leq M + \sum_{k,j} \mu(B_{k,j}) c_j \\
 &\leq M + \sum_{k,j} \frac{c_0}{2^k c_j} c_j \leq \infty.
 \end{aligned}$$

Provando assim que L , f e suas derivadas parciais de ordem ≤ 2 são majoradas por uma função L^1 .

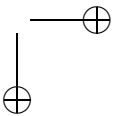
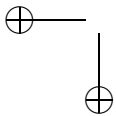
(6) Dedução da condição de máximo.

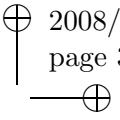
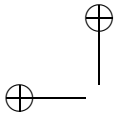
Tomando $v \in V_+$, $v = v_*$ q.s. fora de $B_{k,j,i}$, obtemos de (B.14)

$$\int_{B_{k,j,i}} [r(\tau) + f(t_k, \bar{z}(t_k), u_i^j)^* q(\tau) + \lambda L(t_k, \bar{z}(t_k), u_i^j)] v(\tau) d\tau \geq 0.$$

Como $t_*(\tau) = t_k$ para $\tau \in B_{k,j,i}$, temos $r(\tau) = p_t(t_k)$, $q(\tau) = p(t_k)$ em $B_{k,j,i}$. Daí segue

$$o(t_k) + f(t_k, \bar{z}(t_k), u_i^j)^* p(t_k) + \lambda L(t_k, \bar{z}(t_k), u_i^j) \geq 0,$$





isto é

$$o(t_k) + H(t_k, \bar{z}(t_k), u_i^j, p(t_k), \lambda) \geq 0.$$

Como $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é denso em $[0, \bar{T}]$, obtemos da continuidade de o e H

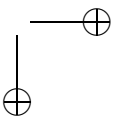
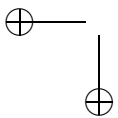
$$o(t) + H(t, \bar{z}(t), u_i^j, p(t), \lambda) \geq 0, \forall t \in [0, \bar{T}].$$

A densidade de $\{u_i^j\}_{i,j}$ em Ω nos permite concluir por argumento semelhante que

$$o(t) + H(t, \bar{z}(t), u, p(t), \lambda) \geq 0, \forall u \in \Omega,$$

que juntamente com (3) nos fornece para todo $u \in \Omega$

$$H(t, \bar{z}(t), u, p(t), \lambda) \geq H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), p(t), \lambda), \text{ q.s. em } [0, \bar{T}].$$



Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
x^*	transposto do vetor x
$\langle x, y \rangle$	produto interno dos vetores x e y
$\ x\ $	norma do vetor x
A^*	transposta da matriz A
$\det(A)$	determinante da matriz A
$\text{diag}(J_1, \dots, J_p)$	matriz diagonal com blocos J_1, \dots, J_p
I	matriz identidade
X^*	dual topológico do espaço normado X
$B_r(z)$	bola fechada de raio r e centro em z
$\text{int}(M)$	interior do conjunto M
$\text{cl}(M)$	fecho do conjunto M
$\text{co}(M)$	envoltório convexo do conjunto M
$\overline{\text{co}}(M)$	fecho do envoltório convexo do conjunto M
$B(X, Y)$	operadores lineares contínuos entre os espaços normados X e Y
$e^A, \exp(A)$	exponencial da matriz A
p_A	polinômio característico da matriz A
$\Phi_A(t, t_0)$	matriz de transição do sistema $x' = Ax$ (ou $x' = A(t)x$)
$C(a, b)$	funções contínuas em (a, b)
$C([a, b]; \mathbb{R}^n)$	funções contínuas em (a, b) tomando valores em \mathbb{R}^n
$C^k(a, b)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis em (a, b)
$C^\infty(a, b)$	funções infinitas vezes continuamente diferenciáveis em (a, b)

$L_p(a, b)$	funções p -integráveis em (a, b)
$L_p([a, b]; \mathbb{R}^n)$	funções p -integráveis em (a, b) tomando valores em \mathbb{R}^n
$\ \cdot\ _p$	norma do espaço L_p
$(f * g)$	convolução das funções f e g
\dot{x}, x'	derivada da função x
∇J	gradiente da função J
$D_x f, \partial_x f, \frac{\partial}{\partial x} f$	derivada parcial da função f em relação à variável x
dF	derivada de Fréchet da aplicação F
$\partial^+ F$	superdiferencial da função F
$\partial^- F$	subdiferencial da função F
$C(x)$	cone tangencial em x pelo conjunto (convexo) C
$T(M, x)$	cone tangencial ao conjunto M por x
$L(X_{ad}, x)$	cone linearizado em x para o problema abstrato de otimização
M^*	cone dual ao conjunto M

Bibliografia

- [Al] ALT, W., *Stabilität mengenwertiger Abbildungen mit Anwendungen auf nichtlineare Optimierungsprobleme*, Bayreuther Mathematische Schriften, 3, 1979
- [An] ANAND, D.K., *Introduction to Control Systems. 2nd ed.*, Pergamon Press, Oxford, 1984
- [AtFa] ATHANS, M. E FALB, P.L., *Optimal Control*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966
- [BaNe] BALAKRISHNAN, A.V. E NEUSTADT, L.W., EDS., *Computing Methods in Optimization Problems*, Proceedings of a conference held at University of California, Los Angeles, January 1964, Academic Press, London, 1964
- [BaCa] BARDI, M. E CAPUZZO-DOLCETTA, I., *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhäuser, Boston, 1997
- [Bar] BARNETT, S., *Matrices in Control Theory with Applications to Linear Programming*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971
- [BaLe] BAUMEISTER, J. E LEITÃO, A., *Optimal exploitation of renewable resource stocks: Necessary conditions*, Optimal Control Appl. Meth. **25** (2004), 19 – 50
- [BLS1] BAUMEISTER, J., LEITÃO, A. E SILVA, G.N., *Optimal control problems with infinite horizon whose control laws contain measures*, Nonlinear dynamics, chaos, control, and their applications to engineering sciences **4** (2002), 228 – 250

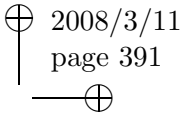
- [BLS2] BAUMEISTER, J., LEITÃO, A. E SILVA, G.N., *On the value function for nonautonomous optimal control problems with infinite horizon*, Systems and Control Letters **56** (2007), 188-196
- [Be] BELLMAN, R.E., *Introduction to the Mathematical Theory of Control Process, Vol I: Linear equations and quadratic criteria*, Academic Press, New York, 1967
- [BeDr] BELLMAN, R.E. E DREYFUS, S.E., *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1962
- [Ber] BERKOVITZ, L.D., *Optimal Control Theory*, Springer Verlag, New York, 1974
- [Bo] BOLTYANSKI, W.G., *Mathematische Methoden der optimalen Steuerung*, Carl Hanser Verlag, München, 1972
- [Br] BROKATE, M., *Kontrolltheorie*, Vorlesungskript, Universität Hamburg, 1984
- [BMS] BULIRSCH, R., MIELE, A., STOER, J. E WELL, K.H., EDS., *Optimal control: Calculus of Variations, Optimal Control Theory and Numerical Methods*, International Series of Numerical Mathematics, 111, Birkhäuser, Basel, 1993
- [CaHa] CARLSON, D.A. E HAURIE, A.B., *Infinite Horizon Optimal Control: Theory and Applications*, Springer Verlag, Heidelberg, 1987
- [Cl] CLARK, C.W., *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources. 2nd ed.*, John Wiley and Sons, New York, 1990
- [CCM] CLARK, C.W., CLARKE, F.H. E MUNRO, G.R. *The optimal exploitation of renewable resource stocks: Problems of irreversible investment*, Econometrica **47** (1979), 25 – 47
- [CLSW] CLARKE, F.H., LEDYAEV, YU.S., STERN, R.J. E WOLENSKI, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1998

- [CrLi] CRANDALL, M.G. E LIONS, P.L., *Viscosity solutions of Hamilton–Jakobi Equations*, Trans. of the American Mathematical Society **277** (1983), 1 – 42
- [FIRi] FLEMING, W.H. E RISHEL, R.W., *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer Verlag, Berlin, 1975
- [FlSo] FLEMING, W.H. E SONER, H.M., *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer Verlag, New York, 1993
- [Fö1] FÖLLINGER, O., *Nichtlineare Regelungen I: Grundlagen und harmonische Balance*, Oldenbourg Verlag, München, 1969
- [Fö2] FÖLLINGER, O., *Nichtlineare Regelungen II: Anwendung der Zustandsebene*, Oldenbourg Verlag, München, 1970
- [Fö3] FÖLLINGER, O., *Nichtlineare Regelungen III: Ljapunow-Theorie und Popow-Kriterium*, Oldenbourg Verlag, München, 1970
- [Gan] GANTMACHER, F.R., *Applications of the Theory of Matrices*, Intersciences Publishers, New York, 1959
- [GaKu] GAUTHIER, J.-P. E KUPKA, I. *Deterministic Observation Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001
- [GaKu1] GAUTHIER, J.-P. E KUPKA, I. *Observability for systems with more outputs than inputs and asymptotic observers*, Mathematische Zeitschrift **223** (1996), 47 – 78
- [GaKu2] GAUTHIER, J.-P. E KUPKA, I. *Observability and observers for nonlinear systems*, SIAM J. Control Optim. **32** (1994), 975 – 994
- [Gol] GOLDENSTINE, H., *A History of the Calculus of Variations, from 17th through the 19th Century*, Springer Verlag, New York, 1980
- [Gon] GONÇALVES, A., *Introdução à Álgebra*, Projeto Euclides, 7, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979

- [Gr] GROETSCH, C.W., *Generalized Inverses of Linear Operators*, Dekkeric, New York, 1977
- [Ha] HALKIN, H., *Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons*, *Econometrica* **42** (1974), 267 – 272
- [Hes] HESTENES, M.R., *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, London, 1966
- [Heu] HEUSER, H., *Funktionalanalysis. 3. Aufl.*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1992
- [HeLa] HERMES, H.R. E LASALLE, J.P., *Functional Analysis and Time-Optimal Control*, Academic Press, New York, 1969
- [Ho] HOCKING, L.M., *Optimal Control: An Introduction to the Theory with Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1991
- [Is] ISIDORI, A., *Nonlinear Control Systems: An Introduction. 2nd ed.*, Springer Verlag, Berlin, 1989
- [Je] JETSCHKE, G., *Mathematik der Selbstorganisation: Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1989
- [JoGa] JOUAN, P. E GAUTHIER, J.-P., *Finite singularities of nonlinear systems. Output stabilization, observability, and observers*, *J. Dynam. Control Systems* **2** (1996), 255 – 288
- [KIF] KNOBLOCH, H.W., ISIDORI, A. E FLOCKERZI, D., *Topics in Control Theory*, DMV Seminar, 22, Birkhäuser, Basel, 1993
- [KnKw] KNOBLOCH, H.W. E KWAKERNAAK, H., *Lineare Kontrolltheorie*, Springer Verlag, Berlin, 1985
- [Know] KNOWLES, G., *An Introduction to Applied Optimal Control*, Academic Press, San Francisco, 1981
- [Kra] KRABS, W., *Einführung in die Kontrolltheorie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978
- [Kre] KREYZIG, R., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978

- [LeMa] LEE, E.B. E MARKUS, L., *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, London, 1967
- [Leig] LEIGH, J.R., *Functional Analysis and Linear Control Theory*, Academic Press, London, 1980
- [Leit] LEITÃO, A., *On optimal control problems with infinite horizon*, Nonlinear dynamics, chaos, control, and their applications to engineering sciences **4** (2002), 251 – 263
- [Lei] LEITMANN, G., *The Calculus of Variations and Optimal Control: An Introduction*, Plenum Press, London, 1981
- [Li] LIONS, J.L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer Verlag, Heidelberg 1971
- [LiYo] LI, X. E YONG, J., *Optimal control theory for infinite dimensional systems*, Birkhäuser, Basel, 1994
- [MaSt] MACKI, J. E STRAUSS, A., *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer Verlag, Heidelberg, 1981
- [Mo] MORGAN, F., *Geometric Measure Theory: A Beginner's guide*, Academic Press, Boston, 1988
- [Mu] MURRAY, J.M., Existence theorems for optimal control and calculus of variations problems where the state can jump, SIAM J. Control and Optimization **24** (1986), 412 – 438
- [Pi] PIEHLER, J., *Einführung in die dynamische Optimierung*, B.G. Teubner, Leipzig, 1966
- [PBG] PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKIJ, V.G., GAMKRELIDZE, R.V. E MISHCHENKO, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, New York, 1962 (edição original em russo, 1961)
- [Ra] RAMSEY, F.P., *A mathematical theory of saving*, Economic Journal **38** (1928), 543 – 549
- [Ri] RISHEL, R.W., *An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures*, SIAM J. Control **3** (1965), 191 – 205

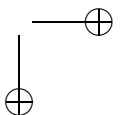
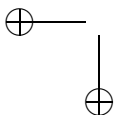
- [Ru1] RUDIN, W., *Functional Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1973
- [Ru2] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1966
- [Sc] SCHECK, F., *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos. 3rd ed.*, Springer Verlag, Berlin, 1999
- [SeSy] SEIERSTAD, A. E SYDSÆTER, K., *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1987
- [SeZh] SETHI, S.P. E THOMPSON, G.L., *Optimal Control Theory: Applications to Management Science*, Martinus Nijhoff Publishing, Boston, 1981
- [SHB] SCHMIDT, W.H., HEIER, K., BITTNER, L. E BULIRSCH, R., EDS., *Variational Calculus, Optimal Control and Applications*, Proceedings of the 12th International Conference in Honour of L. Bittner and R. Kloetzler, Trassenheide, Germany, September, 1996, International Series of Numerical Mathematics, 124, Birkhäuser, Basel, 1998
- [SFG] SKOWRONSKI, J.M., FLASHNER, H. E GUTTALU, R.S., EDS., *Mechanics and control*, Proceedings of the 3rd Workshop on Control Mechanics, in Honor of the 65th Birthday of George Leitmann, January, 1990, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 151, Springer Verlag, Berlin, 1991
- [SiVi] SILVA, G.N. E VINTER, R.B., *Necessary conditions for optimal impulsive control problems*, SIAM J. Control Optimization **35** (1997), 1829 – 1846
- [So] SONTAG, E.D., *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. 2nd ed.*, Springer Verlag, New York, 1998
- [Sot] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979
- [Sn] SNIEDOVICH, M., *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, New York, 1992

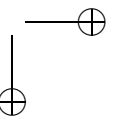
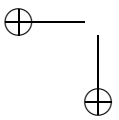
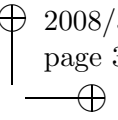
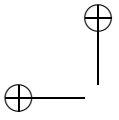


BIBLIOGRAFIA

391

- [Tr] TROUTMAN, J.L., *Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity. 2nd ed.*, Springer Verlag, New York, 1996
- [ViPe] VINTER, R.B. E PEREIRA, F.M.F.L., *A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories*, SIAM J. Control and Optimization **26** (1988), 205 – 229
- [Wa1] WALTER, W., *Analysis II. 2. Aufl.*, Springer Verlag, Berlin, 1991
- [Wa2] WALTER, W., *Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Aufl.*, Springer Verlag, Berlin, 1996
- [We] WERNER, J., *Optimization: Theory and Applications*, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1984
- [Za] ZABCZYK, J., *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 1992
- [ZoKu] ZOWE, J. E KURCYUSZ, S., *Regularity and stability for the mathematical programming problem in Banach spaces*, Appl. Math. Optimization **5** (1979), 49 – 62





Índice Remissivo

- ação, 180
 aceleração, 170

 Bellman, Richard, 281
 Bernoulli, Jakob, 18
 Bernoulli, Johann, 18, 20

 cálculo variacional, 139
 - condição (de contorno) natural, 149
 - condição necessária, 148, 162
 - condição suficiente, 145, 148
 - problemas de fronteira livre, 149, 196
 - problemas de horizonte livre, 197
 campo
 - central, 172
 - conservativo, 172
 - gradiente, 173
 centro de massa, 173, 177
 cicloide, 19
 co-estado, 22
 coercividade, 309
 colchete de Poisson, 186
 colocação de pólos, 105
 condição
 - de contorno natural, 149
 - de contorno natural, 195, 196, 206, 210, 219
 - de contorno transversal, 194
 - de crescimento linear, 272
 - de Fritz–John, 370
 - de Kuhn–Tucker, 8, 370
 - de mínimo, 23, 211, 219, 318
 - de não acoplamento, 218, 225
 - de otimalidade, 9, 23, 211, 218, 224, 318
 - de posto, 66
 - de Slater, 370, 371
 - de transversalidade, 196, 210
 - de Weierstraß–Erdmann, 163
 cone, 368
 - dual, 368
 - linearizado, 364
 - tangencial
 - a um conjunto por um ponto, 360
 - em um ponto por um conjunto, 360
 congelamento do tempo, 339
 conjunto atingível, 54
 conjunto de nível, 198
 contração, 338
 controlabilidade, 40
 - estratégia ótima, 51
 - sistema discreto, 65
 controlabilidade ao zero, 41
 - com respeito a $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, 57
 controle
 - ótimo, 24, 270

- condição de mínimo, 23,
 218, 224, 318
 condição necessária, 24, 218,
 224
 discreto, 66
 horizonte finito, 21
 tempo final variável, 63
 tempo mínimo, 63
 admissível, 54, 207
 automático, 120
 Bang–Bang, 4, 11, 60
 Bang–Singular–Bang, 13, 206
 com restrições, 54, 60
 de malha aberta, 3
 de malha fechada, 3, 102
 de realimentação, 3, 14, 15,
 102, 105, 282
 singular, 220
 variável de, 2
 convergência fraca, 55
 coordenada generalizada, 179
 critério de erro, 121
 critério de Kalman, 44
 critério de Lyapunov, 91
 critério de Routh–Hurwitz, 78,
 81
 d’Alembert, Jean, 178
 derivada de Fréchet, 359
 detectabilidade, 34, 111
 dinâmica, 179
 du Bois–Reymond, Paul, 145
 energia, 172, 177
 cinética, 174
 potencial, 174
 total, 174
 equação
 adjunta, 9, 23, 218, 224, 283
 canônica de movimento, 184
 de diferenças, 7
 de estado, 22, 218, 224
 de Euler–Lagrange, 6, 20, 145,
 148, 163, 221, 285
 primeira integral, 151
 de evolução, 9, 21
 de Hamilton–Jacobi, 189
 de Hamilton–Jakobi–Bellman,
 279, 281
 de observação, 40
 de otimalidade, 250, 252, 254,
 257, 259–261
 de Riccati, 292
 matricial de Lyapunov, 95
 discreta, 98
 espaço
 $C[a, b]$, 139, 140
 $C^1[a, b]$, 139, 140
 $C_0^1[a, b]$, 146
 $\hat{C}[a, b]$, 156
 $\hat{C}^1[a, b]$, 156
 de Banach, 331
 de funções teste, 146, 302
 euclidiano, 331
 homogêneo, 169
 isotrópico, 169
 estabilidade exponencial, 77
 Euler, Leonhard, 145
 exemplo
 alunissagem, 231
 aquecimento de um quarto,
 3, 5
 atrator de Lorenz, 73, 83
 Braquistócrona, 18, 154
 caixeiro viajante, 253
 caminho simples, 246
 circuito RLC, 80, 91

- concentração de chumbo, 16
 consumo \times investimento, 239
 controle ótimo, 21
 controle discreto, 7
 controle singular, 238
 decisões consecutivas, 260
 deslocamento de um corpo,
 1
 equilíbrio de um bastão, 13,
 104
 geodésicas na esfera, 153
 geodésicas no plano, 152
 investimento de capital, 261
 lançamento de um foguete,
 12
 oscilador harmônico, 44, 77
 oscilador não linear amorte-
 cido, 83
 pêndulo não linear, 73
 piloto automático, 69
 reservatório d'água, 4
 satélite (controlabilidade), 45
 satélite (observabilidade), 31
 sistema linear-quadrático
 contínuo, 286
 discreto, 256
 substituição de equipamento,
 251
 tempo mínimo, 11, 226, 228
 exponencial de matriz, 331
 extremal, 8, 151
 singular, 203

 fórmula de Hopf–Lax, 308
 força
 de Coulomb, 171
 gravitacional, 171
 forma canônica de Jordan, 334
 forma normal de Kalman, 47, 108

 função
 adjunta, 283
 admissível, 140
 de ação, 189
 de Hamilton, 8, 23, 184, 208,
 217, 283, 293, 313
 de identificação, 204
 de Lyapunov, 89
 estrita, 89
 quadrática, 97
 de transferência, 4
 estacionária, 151
 Lagrangeana, 179
 objetivo, 6, 7
 teste, 146, 302
 valor ótimo, 249, 252, 254,
 257, 259–261, 270, 313
 funcional
 convexo, 142
 estendido, 22
 estritamente convexo, 142
 objetivo, 21

 Galilee, Galileo, 18
 grau de liberdade, 179, 221
 grupo ortócrono, 178

 Hamilton, William, 281

 impulso, 171, 177
 integral de ação, 180
 inversa de Moore–Penrose, 66

 Jakobi, Carl, 281

 Lagrange, Joseph Louis, 145
 Legendre, Adrien-Marie, 178
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 18
 lema
 du Bois–Reymond, 145, 146

- Gronwall, 347, 348
Lagrange, 146
Lipschitz–continuidade, 343
Luenberger, David G., 111
- método
da viscosidade esvanescente, 308
de aproximações sucessivas, 344, 345
de equações adjuntas, 352
de identificação iterativo, 128
gradiente, 128
gradiente linearizado, 128
resíduo, 128
de Newton–Raphson, 353
de shooting, 351
algoritmo, 353
descrição, 352
problema linear-quadrático, 295
- mínimo
global, 140
local, 22
forte, 140
fraco, 140, 160
- massa reduzida, 173
- matriz
de ganho, 105
de observação, 29
de realimentação, 102
de transição, 334, 341
estável, 78
fundamental, 341
negativa definida, 92
positiva definida, 92
positiva semi-definida, 92
simplética, 188
- Maupertuis, Pierre Louis, 178
- mecânica
ação, 180
aceleração, 170
campo
central, 172
conservativo, 172
gradiente, 173
centro de massa, 173, 177
colchete de Poisson, 186
coordenada generalizada, 179
dinâmica, 179
energia, 172, 177
cinética, 174
potencial, 174
total, 174
equação
canônica de movimento, 184
de Hamilton–Jacobi, 189
espaço
homogêneo, 169
isotrópico, 169
força
de Coulomb, 171
gravitacional, 171
função
de ação, 189
de Hamilton, 184
Lagrangeana, 179
grau de liberdade, 179
grupo ortócrono, 178
impulso, 171, 177
integral de ação, 180
massa reduzida, 173
matriz simplética, 188
momento angular, 174, 177
momento conjugado, 183
potencial do campo, 173
primeira integral, 185

- princípio
 - da ação mínima, 179
 - Hamiltoniano, 179
- sistema
 - fechado, 177
 - referencial inercial, 170
- trabalho, 172
- trajetória, 170
- transformação de Galilei, 178
- transformada de Legendre, 187
- velocidade, 170
- velocidade generalizada, 179
- modelo de compartimentos, 16, 38
- momento angular, 174, 177
- momento conjugado, 183
- núcleo de reconstrução, 36
- Newton, Isaac, 18
 - lei de, 2, 14, 168
- norma
 - equivalente, 331
 - norma-p, 331
- observabilidade, 27
- observador dinâmico, 111, 114, 117
- operador de reconstrução, 36
- operador linear, 331
 - contrativo, 96
 - não expansivo, 97
- parâmetro de Markov, 126
- Pareto otimalidade, 165
- ponto de equilíbrio, 72
 - assintoticamente estável, 73
 - atrativo, 73, 96
 - estável, 73, 96
- ponto de operação, 116
- ponto fracamente regular, 361
- ponto regular, 361
- potencial do campo, 173
- primeira integral, 185
- princípio
 - da ação mínima, 179
 - de Bellman, 245, 277, 314
 - de Fermat, 20
 - de Pontryagin, 24
 - do Bang–Bang, 61
 - do máximo, 24
 - hamiltoniana convexa, 212
 - horizonte finito, 218
 - horizonte infinito, 224
 - problema linear-quadrático, 293
 - soluções viscosas, 318
 - Hamiltoniano, 179
- problema
 - de Cauchy, 344
 - de valor inicial, 331
 - homogêneo, 333, 337
 - não homogêneo, 337, 342
- processo
 - ótimo, 270
 - admissível, 207
 - estacionário, 261
- programação dinâmica, 245
- pseudo inversa, 66
- realimentação
 - de estado, 102, 109
 - de saída, 102, 110
- reconstrução de estado, 111
- reconstrução de parâmetros, 16
- regulagem, 3
- ressonância, 78
- restrição
 - isoperimétrica, 139, 197

- lagrangeana, 139, 198
- saída, 26, 39
- sistema
- adjunto, 343
 - BIBO-estável, 77
 - Bounded-Input Bounded-Output, 77
 - completamente controlável, 44
 - controlável, 5, 40
 - de referência, 121
 - adaptativo, 127
 - detectável, 34
 - discreto, 65
 - completamente controlável, 65
 - entrada, 2
 - estável, 75
 - estabilizável, 102
 - fechado, 177
 - fundamental, 341
 - Hamiltoniano, 23, 223, 283, 285, 318
 - identificável, 122
 - através de um experimento, 122
 - linear, 2, 26
 - autônomo, 27, 44, 332
 - discreto, 96
 - não autônomo, 27, 337
 - modelo de referência adaptativa, 121
 - MRAS, 121
 - não linear, 343
 - observável, 5, 27
 - referencial inercial, 170
 - saída, 2
 - Single-Input Single-Output, 4
- solução viscosa, 302
 - origem do termo, 308
 - sub-solução, 302
 - super-solução, 302
- subdiferencial, 304
 - parcial, 305
- subespaço não observável, 33
- superdiferencial, 304
 - parcial, 305
- teorema
- Banach–Alaoglu, 55
 - Caley–Hamilton, 30
 - da aplicação aberta, 364
 - de verificação, 280
 - decomposição espectral, 335
 - fundamental da álgebra, 79
 - fundamental do cálculo, 157
 - Heine–Borel, 56
 - Krein–Milman, 62
 - Lyapunov, 91
 - multiplicadores de Lagrange, 8, 197, 358
 - Picard–Lindelöf, 72
 - ponto fixo de Banach, 338, 345
 - Rademacher, 275
 - Routh–Hurwitz, 81
- topologia fraca*, 61
- tour mais curto, 254
- trabalho, 172
- trajetória
 - ótima, 270
 - admissível, 207
 - mecânica, 170
- transformação de Galilei, 178
- transformação de semelhança, 334
- transformada
 - de Legendre, 187

ÍNDICE REMISSIVO

399

variável

adjunta, 22, 318

de controle, 2, 26, 39

de estado, 1, 26, 39

variação de Gâteaux, 141

velocidade, 170

velocidade generalizada, 179

Weierstraß, Karl, 145

