Polinômio de Taylor

A - Exercícios (uma variável)

1. Desenvolva as funções abaixo em Série de MacLaurin, n=3:

   a) f(x) = sen x

   b) f(x) = cos x

   c) $f(x) = e^x$

2. Desenvolva f(x) = ln x em Série de Taylor em torno de a = 1 .

   Calcule ln 1,2 com 2 casas decimais exatas.

3. Desenvolva $f(x) = 1/e^x$ em serie de Taylor em torno do ponto a = 1.

   Calcule $1/e^{1,3}$ com 3 casas decimais exatas.

4. Prove que $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$ usando o polinômio de Taylor de ambas funções.

5. Prove que
   $\int 1/(x + 1)dx = \log(x + 1)$ usando a série de Taylor.
   (A série de Taylor de $1/(x + 1)$ é
   $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.)

B - Exercícios (uma variável)

Decidir se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

1. Se $f(x)$ e $g(x)$ têm o mesmo polinômio de Taylor de grau 2 no ponto $x = 0$, então $f(x) = g(x)$.

2. Usando $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/3!$ com $\theta = 1°$, temos que $\sin(1°) \approx 1 - 1^3/6 = 5/6$.

3. O polinômio de Taylor de grau 2 de e^x centrado en $x = 5$ é $1 + (x - 5) + (x - 5)^2/2$.

4. Se o polinômio de Taylor de grau 2 de $f(x)$ centrado em $x = 0$ é $P_2(x) = 1 + x - x^2$,então $f(x)$ é

cóncava para baixo em $x = 0$.

5. Uma série de Taylorno ponto $x = \pi$ é

$$(x-\pi) - \frac{(x-\pi)^3}{3!} + \frac{(x-\pi)^5}{5!} - \cdots.$$

6. Se f é uma função par então o polinômio de Taylor em $x = 0$ tem apenas potências pares.

7. O polinômio de Taylor de $x^3 \cos x$ em $x = 0$ tem apenas potências ímpares.

8. Se f tem polinômio de Taylor a seguir em $x = 0$, então $f^{(7)}(0) = -8$:

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 + \cdots.$$

(Assumir que o padrão dos coeficientes continua)

9. O polinômio de Taylor de $f(x)g(x)$ centrado em $x = 0$ é

$$f(0)g(0) + f'(0)g'(0)x + \frac{f''(0)g''(0)}{2!}x^2 + \cdots.$$

10. Para achar o polinômio de Taylor de sen x + cos x centrado em um ponto x=a, é suficiente somar os respectivos polinômios de sen x e cos x.

11. A aproximação quadrática para $f(x)$ em $x = 0$ é melhor que a aproximação linear para qualquer valor de x.

C - Exercícios (várias variáveis)

1. Calcule o polinômio de Taylor de grau 2 para

$$\mathbf{f}(x, y) = x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^2 + 3x - 5y,$$

centrado no ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

2. Idem para $Q(K, L) = 10K^{2/3}L^{1/3}$, centrado no ponto $(K_0, L_0) = (1, 8)$. Use o polinômio obtido para calcular o valor aproximado de $Q(1.5, 8.4)$.

3. Idem para $g(u, v) = (2u + 3v)e^{u^2+v^2}$, centrado no ponto $(u_0, v_0) = (0, 0)$.

4. Idem $z(x, y) = \sqrt{2x + 5y}$, no ponto $(x_0, y_0) = (3, 2)$.

   Calcular em forma aproximadao valor de $z(3.25, 2.1)$.

5. Idem para

$$g(x, y, z) = 2\ln x + 4\ln y - z(5x + 8y - 60),$$

no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (4, 5, 0.1)$.

6. Idem

$$h(u, v, w) = u^2(v - 2)e^{u+vw},$$

no ponto $(u_0, v_0, w_0) = (4, 2, -2)$.