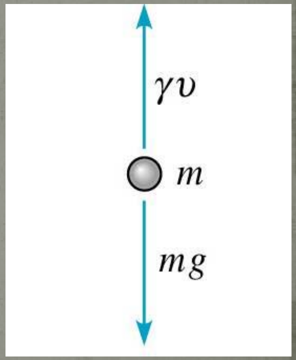
Seção 1.1:
Modelos Matemáticos Básicos; Campos de Direções

- **Equações diferencias** são equações que contém derivadas.
- Os seguintes problemas são exemplos de fenômenos físicos que envolvem taxas de variação de alguma quantidade:
  - Escoamento de fluidos
  - Deslocamento de sistemas mecânicos
  - Fluxo de corrente em circuitos elétricos
  - Dissipação e transferência de de calor
  - Deslocamento de ondas
  - Dinâmica Populacional
  - Uma equação diferencial que descreve um processo físico é chamada de **modelo matemático**.

Exemplo 1: Queda livre (1 de 4)

- Formular a equação diferencial que descreve o movimento de um objeto de massa m em queda livre.
- Variáveis: tempo, velocidade v
- 2ª Lei de Newton: $F = ma = m(dv/dt)$ ← força resultante
- Força gravitacional: $F = mg$ ← força
- Força de atrito: $F = \gamma v$ ← força
- Temos que

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$



- Com $g = 9.8$ m/sec², $m = 10$ kg, $\gamma = 2$ kg/sec, obtemos

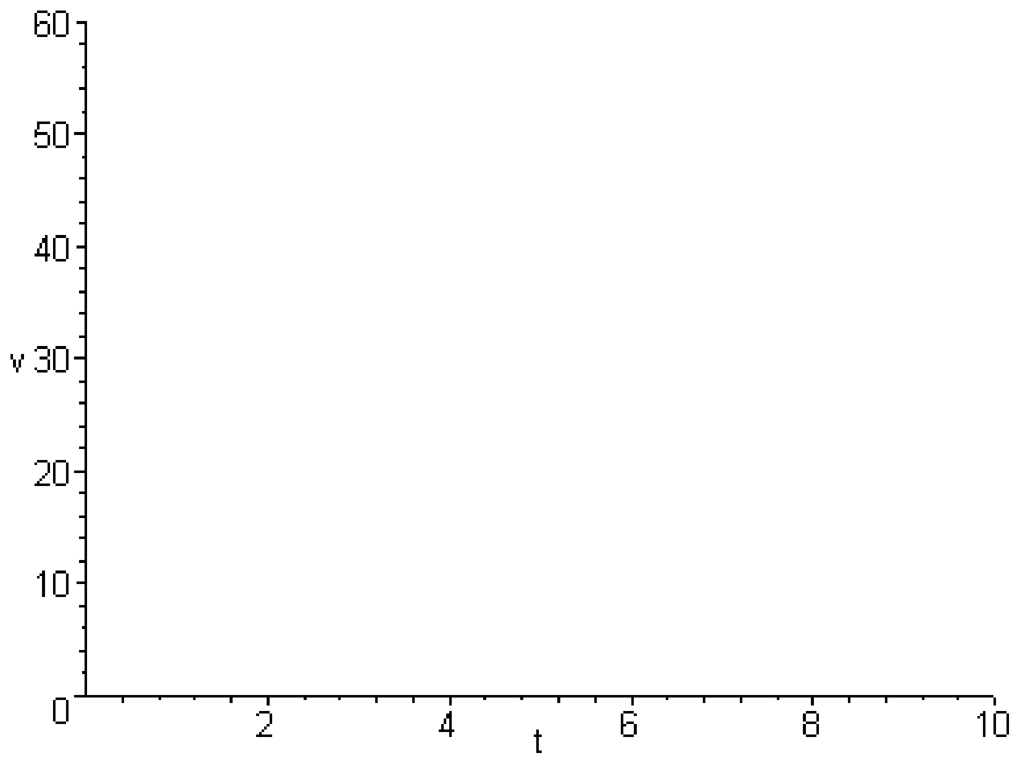
$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.2v$$

$$v' = 9.8 - 0.2v$$

Exemplo 1: Esboço do campo de direções (2 de 4)

- Usando a equação diferencial construa uma tabela, desenhe as tangentes (aproximadamente). O gráfico resultante é chamado de ***campo de direções*** (Observe que os valores de v não dependem de t.)

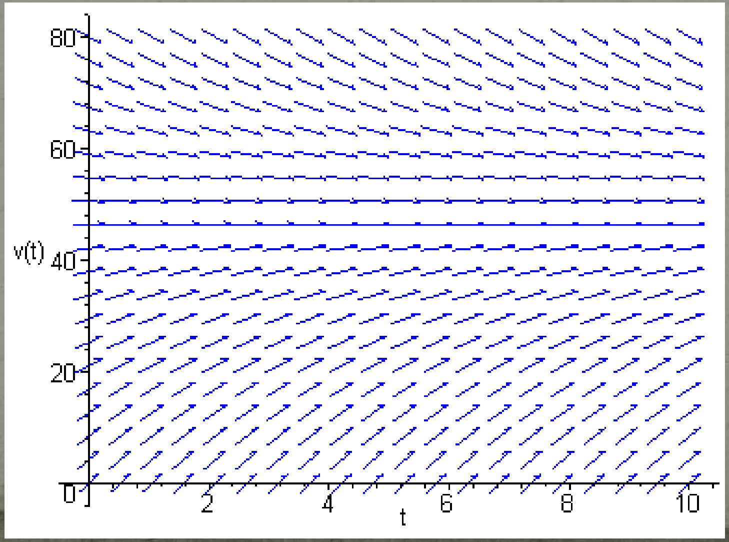
v	v'
0	9.8
5	8.8
10	7.8
15	6.8
20	5.8
25	4.8
30	3.8
35	2.8
40	1.8
45	0.8
50	-0.2
55	-1.2
60	-2.2



Exemplo 1:
Campo de Direções usando Maple (3 de 4)

$$v' = 9.8 - 0.2v$$

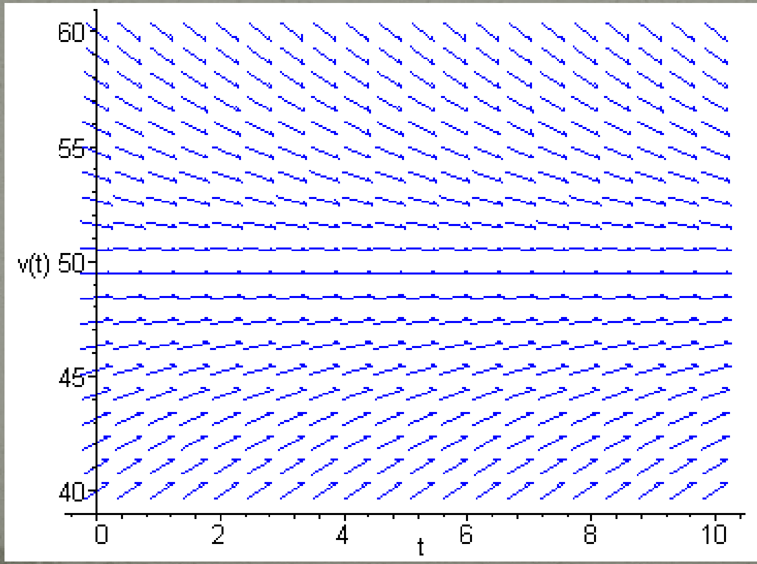
- Comandos de Maple para graficar o campo de direções:
  - `with(DEtools):`
  - `DEplot(diff(v(t),t)=9.8-v(t)/5,v(t), t=0..10,v=0..80,stepsize=.1,color=blue);`
- Quando esboce campo de direções, garanta que está usando uma janela apropriada, com o objeto de mostrar todas as soluções de equilíbrio.



$$v' = 9.8 - 0.2v$$

Exemplo 1:
Campo de Direções & Solução de equilíbrio (4 de 4)

- As setas são segmentos das retas tangentes ás curvas solução, e o sinal indica quando as soluções crescem ou decrescem (e quanto).
- As curvas solução horizontais são chamadas ***soluções de equilíbrio***.
- Usando o gráfico abaixo e fazendo $v' = 0$, obtemos a solução de equilíbrio.



$$\text{Seja } v' = 0:$$

$$\Leftrightarrow 9.8 - 0.2v = 0$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{9.8}{0.2}$$

$$\Leftrightarrow v = 49$$

Soluções de equilíbrio

- Em geral, para uma equação diferencial do tipo

$$y' = ay - b,$$

achamos a solução de equilíbrio fazendo $y' = 0$ e resolvemos para y:

$$y(t) = \frac{b}{a}$$

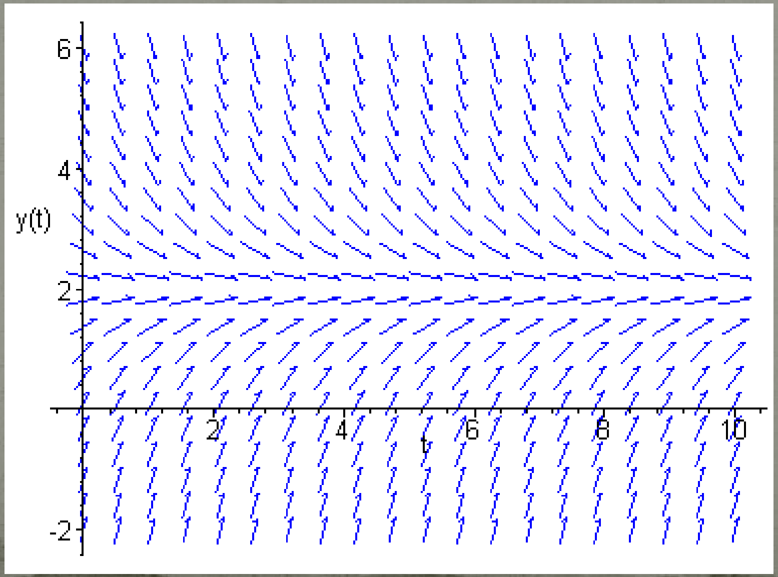
- Exemplo: Achar as soluções de equilíbrio para.

$$y' = 2 - y \qquad y' = 5y + 3 \qquad y' = y(y+2)$$

Exemplo 2: Análise gráfico

- Analise o comportamento da solução em relação ao valor inicial $y(0)$ para a seguinte equação diferencial usando o campo de direções.

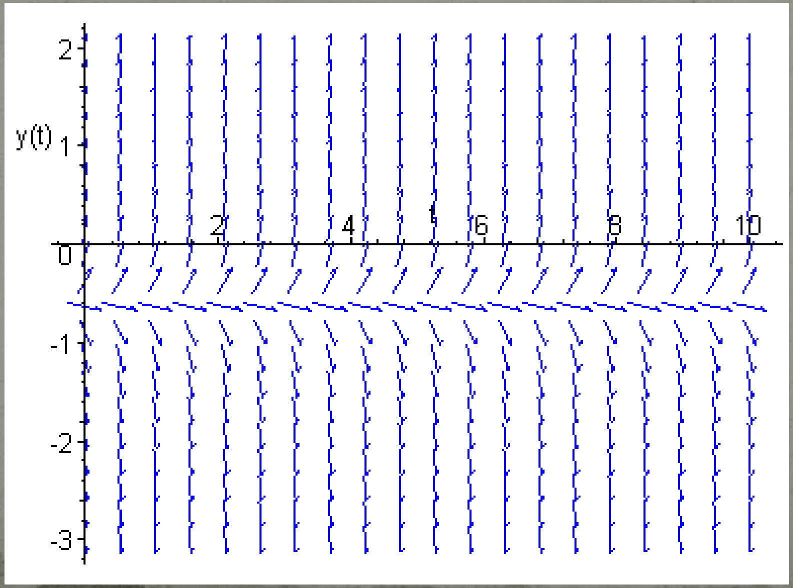
$$y' = 2 - y$$



Exemplo 3: Análise gráfico

- Analise o comportamento e a dependência com o valor inicial $y(0)$ para a seguinte equação diferencial, usando o campo de direções.

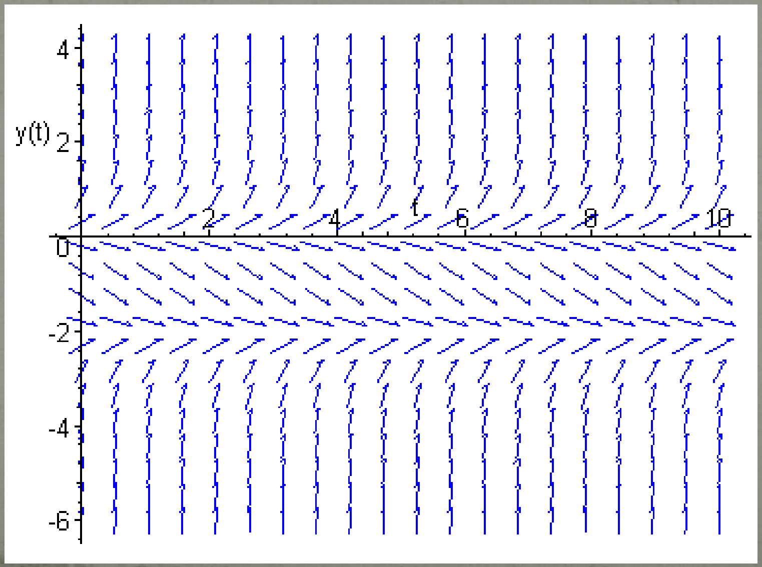
$$y' = 5y + 3$$



Exemplo 4:
Análise gráfico para uma equação não linear

- Analise o comportamento da solução em relação ao valor inicial $y(0)$ para a seguinte equação diferencial usando o campo de direções.

$$y' = y(y+2)$$



Exemplo 5: Ratos e corujas (1 de 2)

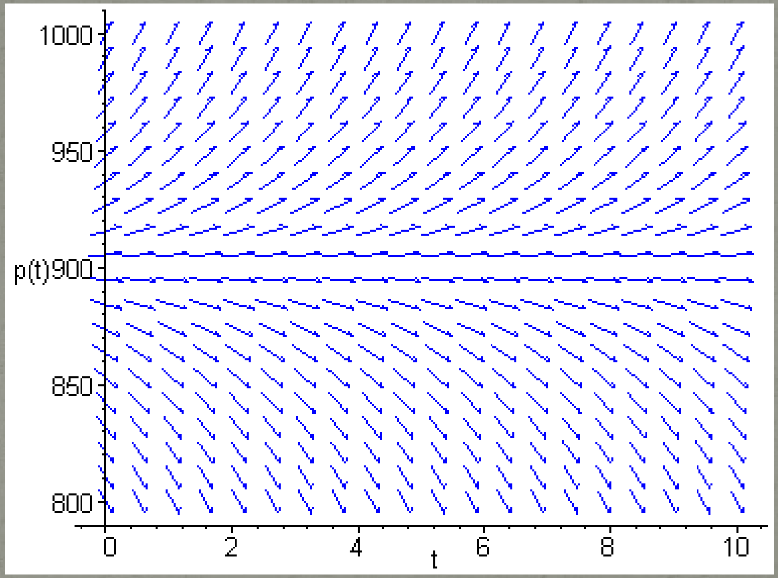
- Considere uma população de ratos que se reproduze proporcionalmente ao tamanho da população, com um coeficiente de proporcionalidade de 0.5 ratos/mês (assumindo que não há corujas).
- Suponha que há corujas comendo ratos, 15 por dia (em média). Escreva a equação diferencial que modela a população de ratos em presença de corujas.
- Solução:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$$

Exemplo 5: Campo de direções (2 de 2)

- Analise a curva solução e ache a solução de equilíbrio

$$p' = 0.5p - 450$$



Exemplo 6: Contaminação de uma lagoa (1 de 2)

- Uma lagoa com contém 10,000 galões de água e uma quantidade de material poluente desconhecida. Uma corrente de água contendo 0.02 g/gal de material poluente entra á lagoa com uma vazão de 50 gal/min. A mistura sai com a mesma vazão, de tal forma que o volume da lagoa permanece constante.
- Escreva a equação diferencial para o material poluente
- Ache a solução

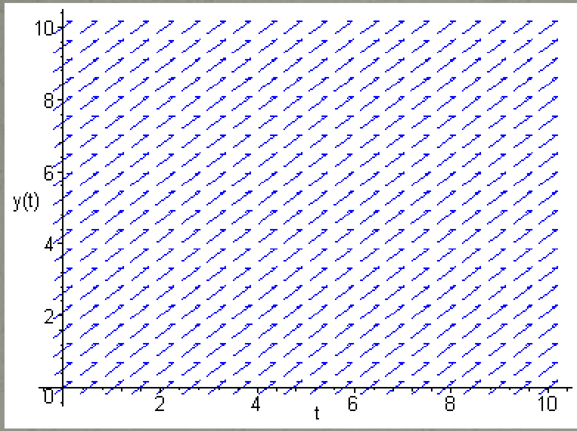
$$y' = \left(\frac{.02\,\text{g}}{\text{gal}}\right)\left(\frac{50\text{gal}}{\text{min}}\right) - \left(\frac{y \quad \text{g}}{10000\,\text{gal}}\right)\left(\frac{50\text{gal}}{\text{min}}\right)$$

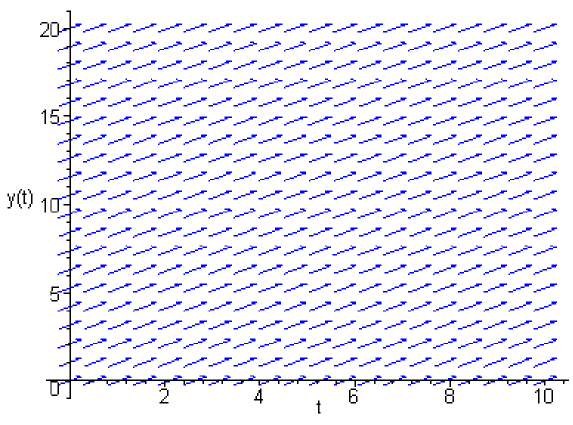
$$y' = 1 - 0.005y$$

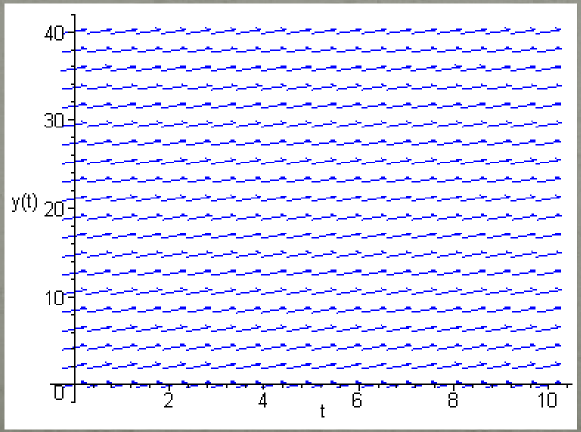
$$y' = 1 - 0.005y$$

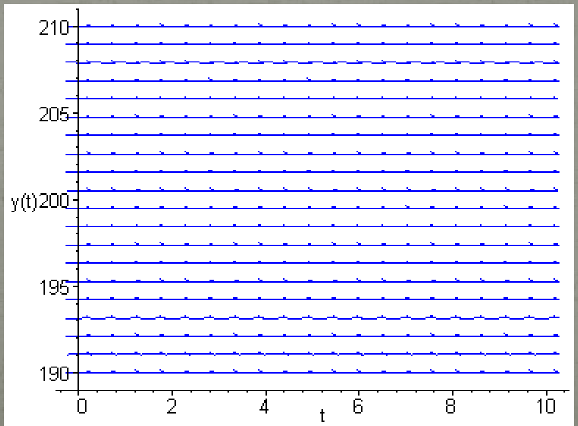
Exemplo 6: Campo de direções (2 de 2)

- Analise as soluções e as soluções de equilíbrio.









Seção 1.2:
Soluções de uma equação diferencial

- Lembre se das equações correspondentes ao problemas de queda livre e a ratos e corujas:

$$v' = 9.8 - 0.2v, \qquad p' = 0.5p - 450$$

- Essas equações têm a forma geral $y' = ay - b$
- Podemos usar métodos de Cálculo para resolver as equações desta forma.

Exemplo 1: Ratos e corujas (1 of 3)

- Podemos resolver a equação diferencial

$$p' = 0.5p - 450$$

como segue:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5(p-900) \;\Rightarrow\; \frac{dp/dt}{p-900} = 0.5 \;\Rightarrow\; \int \frac{dp}{p-900} = \int 0.5dt$$

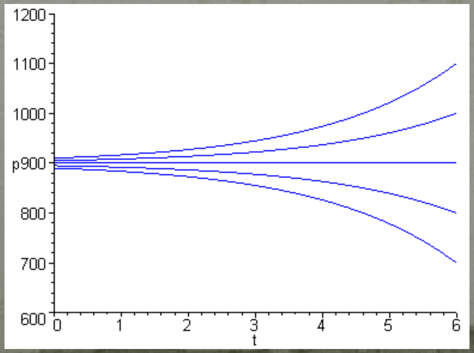
$$\Rightarrow\; \ln|p-900| = 0.5t + C \;\Rightarrow\; |p-900| = e^{0.5t+C}$$

$$\Rightarrow\; p - 900 = \pm e^{0.5t}e^{C} \;\Rightarrow\; p = 900 + ke^{0.5t},\; k = \pm e^{C}$$

- Assim a solução é

$$p = 900 + ke^{0.5t}$$

onde *k é uma constante,*



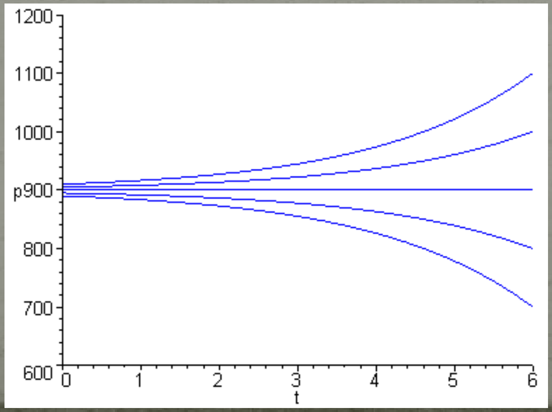
Exemplo 1: Curvas integrais (2 of 3)

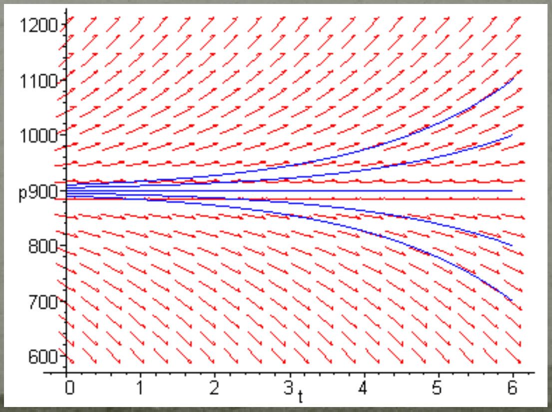
- Temos infintas soluções para a nossa equação,

$$p' = 0.5p - 450 \quad \Rightarrow \quad p = 900 + ke^{0.5t},$$

sendo k é uma constante arbitrária.

- Os gráficos das soluções (**curvas integrais**) para vários valores de k, e campos de direções são mostrados abaixo.
- Escolhendo $k = 0$, obtemos as soluções de equilíbrio, entretanto para $k \neq 0$, as soluções divergem da solução de equilíbrio.





Exemplo 1: Condições iniciais (3 of 3)

- Uma equação diferencial freqüentemente possui infinitas soluções. Se um ponto da curva solução for conhecido, (uma condição inicial), fica determinada uma solução única.
- Na equação diferencial de ratos/corujas, se sabemos que a população inicial de ratos é de 850. Escrevemos $p(0) = 850$, e

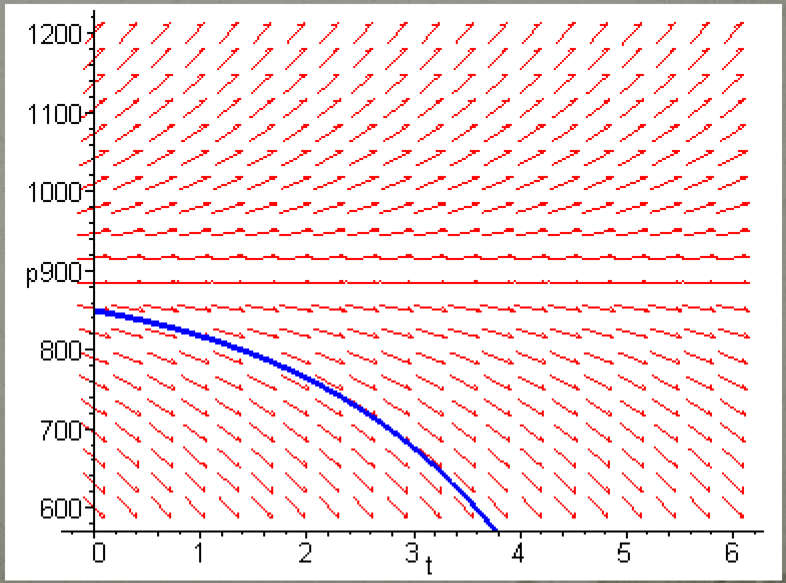
$$p(t) = 900 + ke^{0.5t}$$

$$p(0) = 850 = 900 + ke^{0}$$

$$-50 = k$$

Solução:

$$p(t) = 900 - 50e^{0.5t}$$



Solução da equação geral

- Para resolver a equação geral

$$y' = ay - b$$

usamos técnicas de Cálculo como segue

$$\frac{dy}{dt} = a\left(y - \frac{b}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy/dt}{y - b/a} = a \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y - b/a} = \int a\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|y - b/a\right| = a\,t + C \quad \Rightarrow \quad \left|y - b/a\right| = e^{at+C}$$

$$\Rightarrow \quad y - b/a = \pm e^{at}e^{C} \quad \Rightarrow \quad y = b/a + ke^{at}, \;\; k = \pm e^{C}$$

- Então temos que a solução geral é

$$y = \frac{b}{a} + ke^{at},$$

onde *k* é uma constante

Problema com valor inicial (PVI)

- Posteriormente resolvemos o problema com valor incial

$$y' = ay - b, \qquad y(0) = y_0$$

- Do slide anterior temos que a solução da EDO é

$$y = b/a + ke^{at}$$

- Usamos a condição inicial para determinar *k*,

$$y(0) = y_0 = \frac{b}{a} + ke^{0} \quad \Rightarrow \quad k = y_0 - \frac{b}{a}$$

e então a solução do PVI é

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a} \right] e^{at}$$

Solução de equilíbrio

- Para achar a solução de equilíbrio fazemos $y' = 0$

$$y' = ay - b \overset{set}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{b}{a}$$

- Do slide anterior , a solução do PVI é:

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a} \right] e^{at}$$

- Observemos o comportamento da solução:
  - Se $y_0 = b/a$, y é uma constante, sendo $y(t) = b/a$
  - Se $y_0 > b/a$ e $a > 0$, y cresce exponencialmente ilimitadamente
  - Se $y_0 > b/a$ e $a < 0$, y decresce exponencialmente para b/a
  - Se $y_0 < b/a$ e $a > 0$, y decresce exponencialemente ilimitadamente
  - Se $y_0 < b/a$ e $a < 0$, então y cresce assintóticamente para b/a

Exemplo 2: A equação de queda live (1 of 3)

- Para um objeto de 10 kg, e considerando um coeficiente de atrito do ar γ = 2 kg/sec:

$$dv/dt = 9.8 - 0.2v$$

- Supondo que o objeto cai de uma altura de 300 m.
  (a) Achar a velocidade em função do tempo.
  (b) Determinar quanto demora para atingir o chão e qual é a velocidade nesse instante?
- No item (a), resolvemos o seguinte PVI

$$v' = 9.8 - 0.2v, \quad v(0) = 0$$

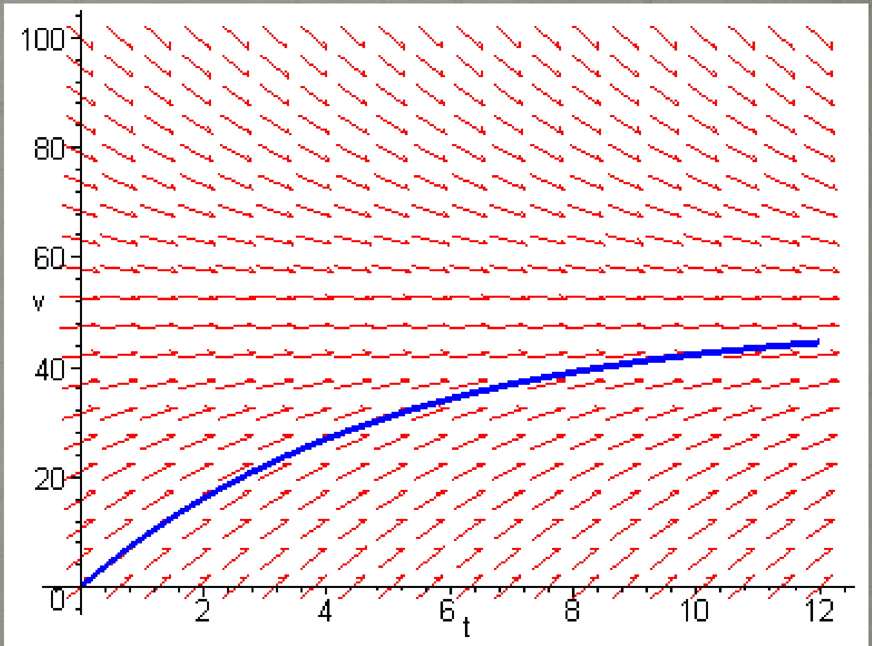
- Usando os resultados anteriores temos

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a} \right] e^{at} \;\Rightarrow\; v = \frac{9.8}{0.2} + \left[0 - \frac{9.8}{0.2} \right] e^{-.2t} \;\Rightarrow\; v = 49\left(1 - e^{-.2t}\right)$$

Exemplo 2: Gráficos para o ítem (a)

- O gráfico ao longo do campo de direções está dado por

$$v' = 9.8 - 0.2v, \quad v(0) = 0$$
$$v = 49\left(1 - e^{-.2t}\right)$$



Exemplo 2

(b): Tempo e velocidade de impacto (3 of 3)

- Logo, sendo que o objeto é jogado desde 300 m do chão, quando demoraroa em atingir o solo, e qual será a velocidade antes do impactot?
- Seja $s(t)$ = distância do objeto em função do tempo. Temos

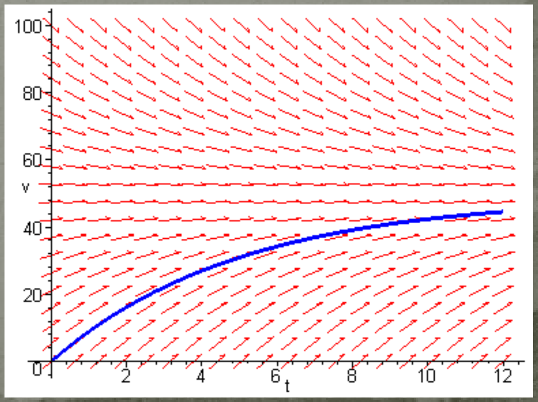
$$s'(t) = v(t) = 49 - 49e^{-.2t} \quad \Rightarrow \quad s(t) = 49t + 245e^{-.2t} + C$$
$$s(0) = 0 \Rightarrow C = -245 \quad \Rightarrow \quad s(t) = 49t + 245e^{-.2t} - 245$$

- Se T é o tempo de impacto então

$$s(T) = 49T + 245e^{-.2T} - 245 = 300$$

- Resolvendo, $T \cong 10.51$ sec, e então

$$v(10.51) = 49\left(1 - e^{-0.2(10.51)}\right) \approx 43.01 \text{ft/sec}$$



Seção 1.3:
Classificação das Equações Diferenciais

- O principal objetivo desta disciplina é discutir as propriedades das soluções das equações diferenciais e apresentar métodos para obter soluções analítica e numericamente.
- Para fornecer um marco para essa discussão começamos introduzindo as diferentes formas de classificação das equações diferenciais.

Equações diferencias ordinárias

- A variavel incógnita depende de uma única variavel, apenas a derivada ordinária aparece na equação.
- Neste caso a equação diferencia é ordinária (EDO).
- As equações diferenciais dos exemplos anteriores são ordinárias. Po exemplo

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.2v, \quad \frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$$

Equações diferenciais parciais

- Quando a função incógnita depende de várias variáveis, na equação aparecem dereivadas parciais.
- Dizemos que a equação é a derivadas parciais (EDP).
- Exemplos:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t} \quad \text{(equação de calor)}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{(equação da onda)}$$

Sistemas de equações diferenciais

- Outra possível classificação pode ser feita considerando o número de funções incógnitas envolvidas.
- Se tivermos apenas uma única função incógnita, então uma única será suficiente. Se aparecerem duas ou mais funções incógnitas, será necessário considerar um sistema.
- Por exemplo, as equações pressa-predador são

$$du/dt = a\,u - \alpha\,uv$$
$$dv/dt = -cv + \gamma\,uv$$

onde $u(t)$ e $v(t)$ são as respectivas populações das espécies pressa e predador. As sonstantes a, c, α, γ dependem da natureza das espécies.

Ordem de uma equação diferencial

- A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.
- Exemplos:

$$y' + 3y = 0$$

$$y'' + 3y' - 2t = 0$$

$$\frac{d^4y}{dt^4} - \frac{d^2y}{dt^2} + 1 = e^{2t}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = \sin t$$

- Estudaremos equações diferencias onde a derivada de maior ordem pode ser colocada em evidência:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Equações diferenciais lineares e não-lineares

- Uma EDO

$$F\left(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

é linear se *F* for linear em cada uma das funções

$$y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$$

- Assim, a forma de uma EDO linear é:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t)$$

- Exemplo: Determine se as seguintes equações são lineares ou não-lineares.

(1) $y' + 3y = 0$ (2) $y'' + 3e^y y' - 2t = 0$ (3) $y'' + 3y' - 2t^2 = 0$

(4) $\dfrac{d^4y}{dt^4} - t\dfrac{d^2y}{dt^2} + 1 = t^2$ (5) $u_{xx} + uu_{yy} = \sin t$ (6) $u_{xx} + \sin(u)u_{yy} = \cos t$

Soluções de uma equação diferencial

- Uma solução $\phi(t)$ de uma EDO

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

- Satisfaz a equação:

$$\phi^{(n)}(t) = f\left(t, \phi, \phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n-1)}\right)$$

- Exemplo: Verificar se as funções são soluções

$$y'' + y = 0; \quad y_1(t) = \sin t, \quad y_2(t) = -\cos t, \quad y_3(t) = 2\sin t$$

Soluções

- Há três questões importantes a considerar nas soluções de uma equação diferencial:
  - Existe solução? (Existência)
  - Se existe solução, é única? (Unicidade)
  - Se existe solução, como podemos acha-la?
    (Resolução analítica ou numerica)