

Capítulo 2

Seção 2.1: Equações lineares; Fator integrante

- Uma EDO de primeira ordem é da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

onde f é linear na variável y . Alguns exemplos típicos deste tipo de equações (com coeficientes constantes) são,

$$y' = -ay + b$$

ou equações com coeficientes variáveis:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Equações com coeficientes constantes

- Para uma equação de 1ª Ordem,

$$y' = -ay + b,$$

precisamos de técnicas de integração elementares:

$$\frac{dy/dt}{y - b/a} = -a$$

$$\int \frac{dy}{y - b/a} = -\int a dt$$

$$\ln|y - b/a| = -at + C$$

$$y = b/a + ke^{at}, \quad k = \pm e^C$$

Equações com coeficientes variáveis: Fatores Integrantes

- Consideremos a seguintes equação:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Esta técnica consiste em multiplicar a ambos lados da equação por uma função $\mu(t)$, escolhida adequadamente, de tal forma que o processo de integração seja simples.

Exemplo 1: Fator integrante (1 de 2)

- Considere a equação:

$$y' + 2y = e^{t/2}$$

- Multiplicando ambos lados da equação por $\mu(t)$, obtemos

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + 2\mu(t)y = e^{t/2} \mu(t)$$

- Devemos escolher $\mu(t)$ de forma que o lado esquerdo da equação seja a derivada de uma expressão conhecida. Lembramos a regra da derivada de um produto:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt} y$$

- Devemos selecionar $\mu(t)$ tal que

$$\mu'(t) = 2\mu(t) \Rightarrow \mu(t) = e^{2t}$$

Exemplo 1: Solução geral (2 de 2)

- Multipliamos $\mu(t) = e^{2t}$, a ambos lados da equação:

$$y' + 2y = e^{t/2}$$

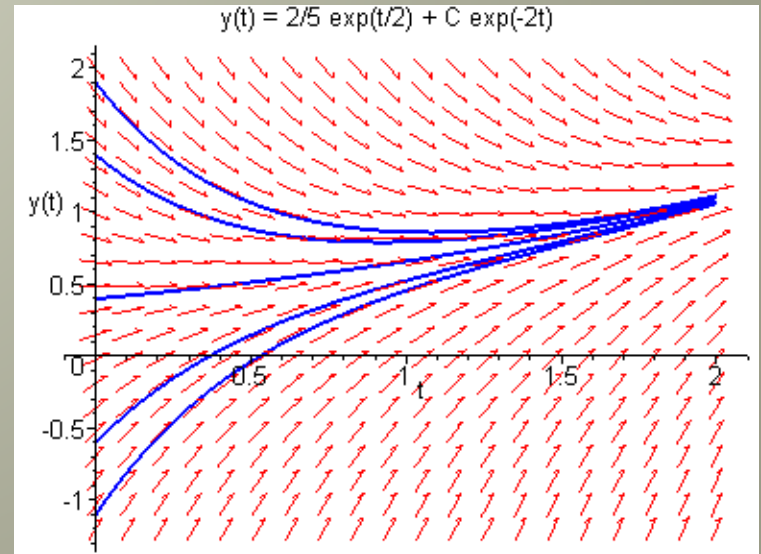
$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + 2\mu(t)y = \mu(t)e^{t/2}$$

$$e^{2t} \frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = e^{5t/2}$$

$$\frac{d}{dt} [e^{2t}y] = e^{5t/2}$$

$$e^{2t}y = \frac{2}{5}e^{5t/2} + C$$

$$y = \frac{2}{5}e^{t/2} + Ce^{-2t}$$



Fator integrante: Lado direito sendo uma função de t

- Consideremos o seguinte procedimento de solução:

$$y' + ay = g(t)$$

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + a\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

$$e^{at} \frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{at}y] = e^{at}g(t)$$

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t)dt$$

$$y = e^{-at} \int e^{at}g(t)dt + Ce^{-at}$$

Exemplo 2: Solução geral (1 de 2)

- Consideremos a resolução de

$$y' + \frac{1}{5}y = 5 - t$$

usando a fórmula:

$$y = e^{-at} \int e^{at} g(t) dt + Ce^{-at} = e^{-t/5} \int e^{t/5} (5 - t) dt + Ce^{-t/5}$$

- Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int e^{t/5} (5 - t) dt &= \int 5e^{t/5} dt - \int te^{t/5} dt \\ &= 25e^{t/5} - \left[5te^{t/5} - \int 5e^{t/5} dt \right] \\ &= 50e^{t/5} - 5te^{t/5} \end{aligned}$$

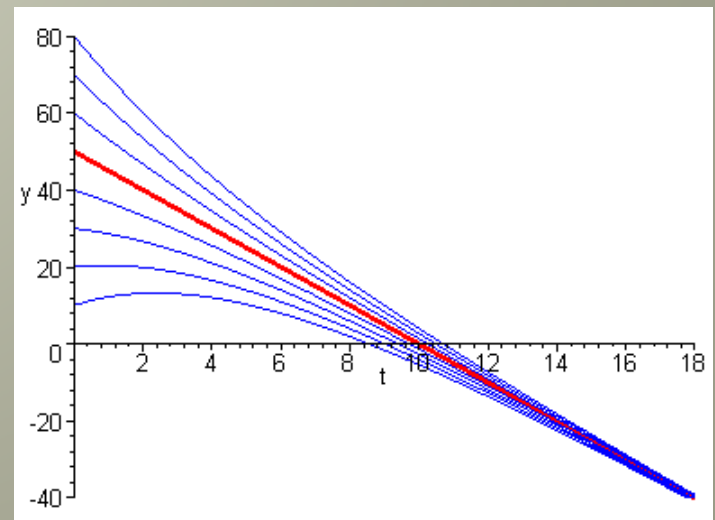
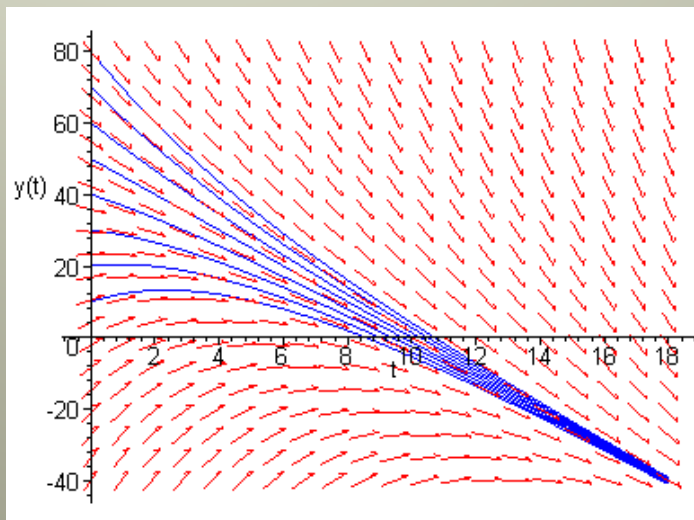
- Assim

$$y = e^{-t/5} (50e^{t/5} - 5te^{t/5}) + Ce^{-t/5} = 50 - 5t + Ce^{-t/5}$$

Exemplo 2: Gráficos (2 de 2)

- O gráfico da esquerda mostra o campo de direções com várias curvas integrais.
- O gráfico da direita mostra várias soluções e uma particular (em vermelho) cujo gráfico contém o ponto (0,50).

$$y' = -\frac{1}{5}y + 5 - t \Rightarrow y = 50 - 5t + Ce^{-t/5}$$



Exemplo 3: Solução geral (1 de 2)

- Podemos resolver

$$y' - \frac{1}{5}y = 5 - t$$

usando a fórmula:

$$y = e^{-at} \int e^{at} g(t) dt + Ce^{-at} = e^{t/5} \int e^{-t/5} (5 - t) dt + Ce^{t/5}$$

- Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int e^{-t/5} (5 - t) dt &= \int 5e^{-t/5} dt - \int te^{-t/5} dt \\ &= -25e^{-t/5} - \left[-5te^{-t/5} + \int 5e^{-t/5} dt \right] \\ &= 5te^{-t/5} \end{aligned}$$

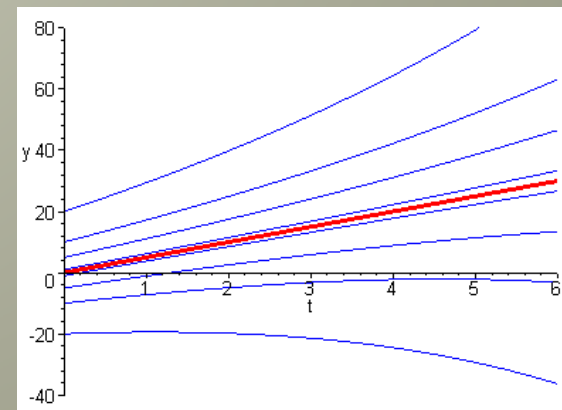
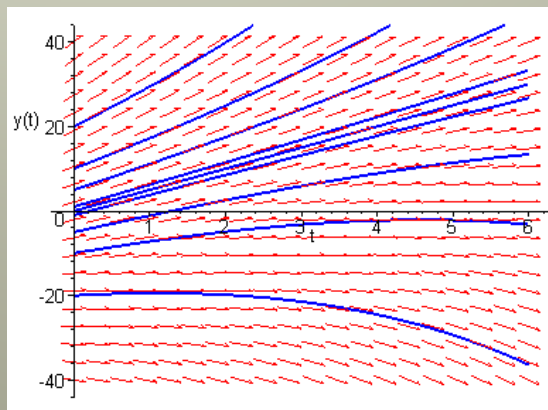
- Então

$$y = e^{t/5} [5te^{-t/5}] + Ce^{t/5} = 5t + Ce^{t/5}$$

Exemplo 4: Gráficos (2 de 2)

- Curvas dadas pelo campo de direções.
- O gráfico a direita mostra várias curvas integrais, uma solução particular (em vermelho) cujo ponto inicial sobre o eixo y separa soluções que crescem positivamente e negativamente quando $t \rightarrow \infty$.

$$y' - y/5 = 5 - t \Rightarrow y = 5t + Ce^{t/5}$$



Método do fator integrante para uma equação linear de 1ª ordem.

- Seja

$$y' + p(t)y = g(t)$$

- Multiplicamos ambos os lados por $\mu(t)$,

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = g(t)\mu(t)$$

- $\mu(t)$ deve ser tal que $\mu'(t) = p(t)\mu(t)$. Se segue que

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y$$

Método do fator integrante para uma equação linear de 1ª ordem.

- Escolhemos $\mu(t)$ tal que $\mu'(t) = p(t)\mu(t)$.
- Assumindo que $\mu(t) > 0$, temos que

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int p(t)dt \Rightarrow \ln \mu(t) = \int p(t)dt + k$$

- Com $k = 0$, temos

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt},$$

assim $\mu(t) > 0$ como desejado.

Solução Geral

- Resumindo:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t), \quad \text{onde } \mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

- Logo

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}, \quad \text{onde } \mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Exemplo 4: Solução geral (1 de 3)

- Resolver

$$ty' - 2y = 5t^2, \quad y(1) = 2,$$

levamos para a forma padrão:

$$y' - \frac{2}{t}y = 5t, \quad \text{para } t \neq 0$$

- Logo

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{-\int \frac{2}{t}dt} = e^{-2\ln|t|} = e^{\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{1}{t^2}$$

e então

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + C}{\mu(t)} = \frac{\int \frac{1}{t^2}5tdt + C}{\frac{1}{t^2}} = t^2 \left[\int \frac{5}{t} dt + C \right] = 5t^2 \ln|t| + Ct^2$$

Exemplo 4: Solução particular (2 de 3)

- Usando a condição inicial $y(1) = 2$ e a solução geral

$$y = 5t^2 \ln|t| + Ct^2,$$

obtemos

$$y(1) = 2 = C \Rightarrow y = 5t^2 \ln|t| + 2t^2$$

ou

$$y = 5t^2 (\ln|t| + 2/5)$$

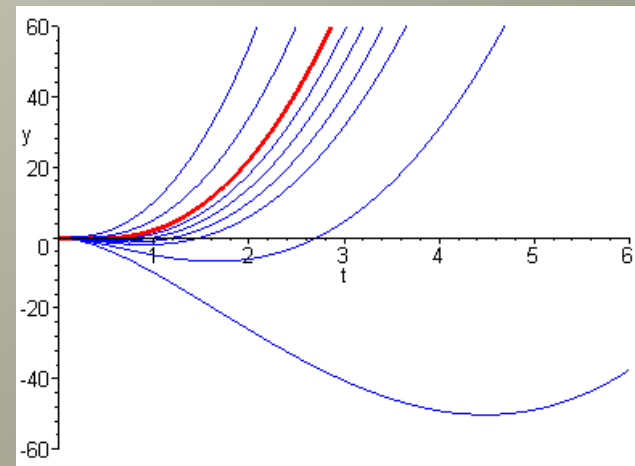
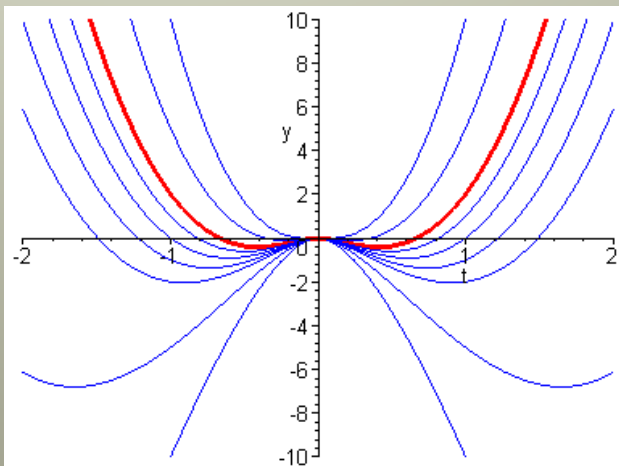
Exemplo 4: Gráficos (3 de 3)

- Os gráficos abaixo mostram curvas integrais e a solução particular que passa pelo ponto inicial (1,2).

$$\text{IVP: } ty' - 2y = 5t^2, \quad y(1) = 2$$

$$\text{Solução geral: } y = 5t^2 \ln|t| + Ct^2$$

$$\text{Solução particular: } y = 5t^2 \ln|t| + 2t^2$$



Seção 2.2: Equações Separáveis

- Consideraremos uma sub-classe de equações lineares e não-lineares de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- Que podemos rescrever

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Por exemplo, seja $M(x, y) = -f(x, y)$ w $N(x, y) = 1$.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

- Se M for apenas função de x e N apenas função de y

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

- Estas equações se chamam separáveis.

Exemplo 1:

- Resolver :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{y^2 - 1}$$

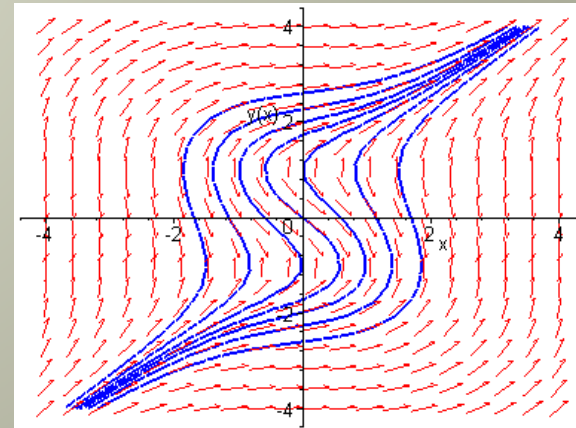
- Separando variáveis

$$(y^2 - 1)dy = (x^2 + 1)dx$$

$$\int (y^2 - 1)dy = \int (x^2 + 1)dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 - y = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

$$y^3 - 3y = x^3 + 3x + C$$



- A solução está definida implicitamente..

Exemplo 2:

Soluções Implícitas e Explícitas (1 de 4)

- Resolver:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

- Separando variáveis

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$2\int (y-1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

- A equação define a solução implicitamente. Podemos, neste caso explicitar a solução:

$$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + C) = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(x^3 + 2x^2 + 2x + C)}}{2}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + C}$$

Exemplo 2: PVI (2 de 4)

- Se a solução deve satisfazer $y(0) = -1$ podemos usar a forma implícita para determinar C

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$(-1)^2 - 2(-1) = C \Rightarrow C = 3$$

- Substituindo C temos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

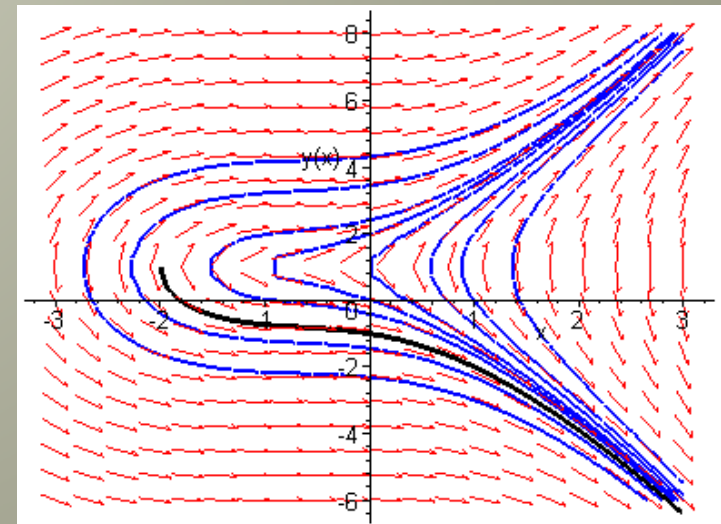
- Usando a e forma explícita

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + C}$$

$$-1 = 1 \pm \sqrt{C} \Rightarrow C = 4$$

- Substituindo

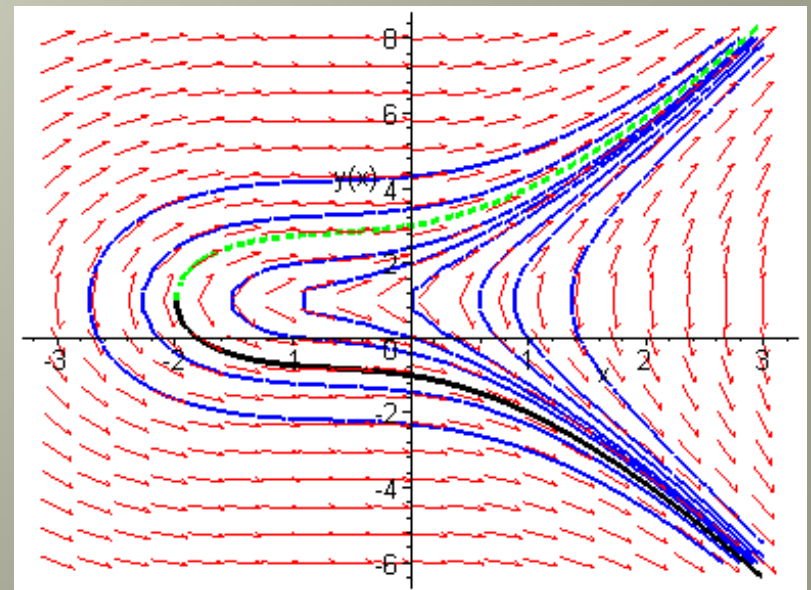
$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$



Exemplo 2 : condição Inicial $y(0) = 3$ (3 de 4)

- Com a condição inicial $y(0) = 3$, devemos escolher a raiz positiva:

$$y = 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$



Exemplo 2: Domínio (4 de 4)

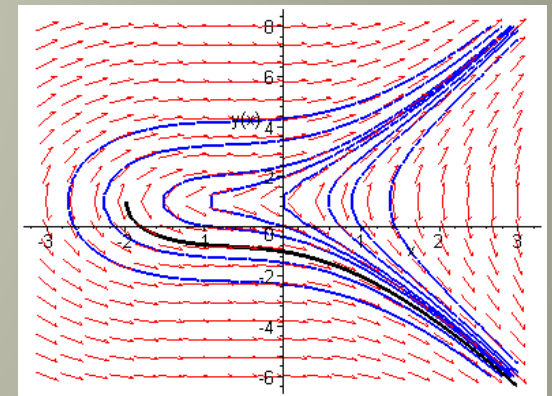
As soluções de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

Está dada por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \quad (\text{implícitamente})$$

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (\text{explícitamente})$$



Para uma representação dada em forma explícita

$$y = 1 - \sqrt{x^2(x+2) + 2(x+2)} = 1 - \sqrt{(x+2)(x^2+2)}$$

e aqui o domínio $(-2, \infty)$. Note que $x = -2$ leva a $y = 1$, o que faz que o produz uma tangente vertical.

Reciprocamente, o domínio da solução pode ser determinada pelas tangentes verticais do gráfico.

Exemplo 3: a solução implícita para um PVI (1 de 2)

- Considere o seguinte PVI:

$$y' = \frac{y \cos x}{1 + 3y^3}, \quad y(0) = 1$$

- Separando variáveis obtemos

$$\frac{1 + 3y^3}{y} dy = \cos x dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + 3y^2 \right) dy = \int \cos x dx$$

$$\ln|y| + y^3 = \sin x + C$$

- Usando a condição inicial

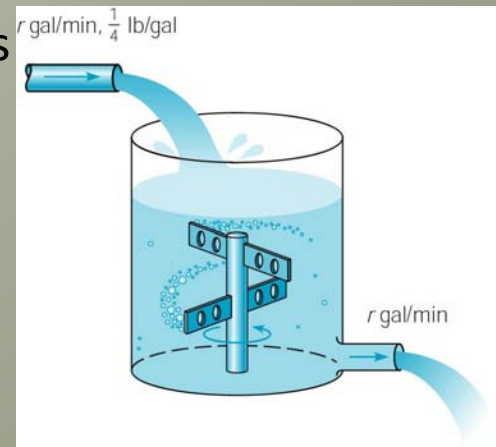
$$\ln y + y^3 = \sin x + 1$$

Modelagem

- A modelagem de sistemas físicos são realizados com freqüência usando equações diferenciais.
- **Construção do modelo:** Transformar o problema real em termos matemáticos. Isto é feito considerando as leis físicas que regem o processo. Uma equação diferencial é um modelo matemático aproximado do problema original.
- **Análise do modelo:** Resolvendo as equações ou obtendo uma compreensão qualitativa da solução. Podemos simplificar o problema real, porém conservando as características do problema original.
- **Comparação experimental:** Verificar a solução ou sugerir reformulação matemática do problema.

Exemplo 1: Problemas de misturas (1 de 7)

- Inicialmente ($t = 0$), um tanque contém Q_0 lb de sal em 100 gal de água. Supondo que uma solução salina entra no tanque com uma concentração de $\frac{1}{4}$ lb de sal/gal com uma vazão de r gal/min, e deixa o tanque com igual valor.
 - (a) Escreva o PVI que descreve o processo.
 - (b) Determine a quantidade de sal $Q(t)$ que permanece no tanque para qualquer valor de t .
 - (c) Determine a quantidade de sal no tanque depois de um tempo grande.
 - (d) Se $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$, determine o tempo T após do tanque é igual a 2% de Q_L .



Exemplo 1: (a) O PVI (2 de 7)

- Em $t = 0$, o tanque contém Q_0 lb de sal dissolvidas em 100 gal de água. Uma solução salina ingressa ao tanque com concentração $\frac{1}{4}$ lb de sal/gal , com vazão r gal/min, ($V=cte$).
- A mistura é homogênea

$$dQ / dt = \text{massa sal entrando} - \text{massa sal saindo}$$

- Entrada: $(\frac{1}{4} \text{ lb salt/gal})(r \text{ gal/min}) = (r/4) \text{ lb/min}$
- Saída: Se há $Q(t)$ lbs de sal no tanque no instante t , então a concentração de sal é $Q(t) \text{ lb}/100 \text{ gal}$, e o fluxo mássico de saída é $[Q(t)r/100] \text{ lb/min}$.
- Assim
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}, \quad Q(0) = Q_0$$

Exemplo 1: (b) Achando a solução $Q(t)$ (3 de 7)

- Para achar $Q(t)$ resolvemos o PVI

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}, \quad Q(0) = Q_0$$

- Usamos a técnica de fator integrante:

$$\mu(t) = e^{at} = e^{rt/100}$$

$$Q(t) = e^{-rt/100} \left[\int \frac{re^{rt/100}}{4} dt \right] = e^{-rt/100} [25e^{rt/100} + C] = 25 + Ce^{-rt/100}$$

$$Q(t) = 25 + [Q_0 - 25] e^{-rt/100}$$

ou

$$Q(t) = 25(1 - e^{-rt/100}) + Q_0 e^{-rt/100}$$

Exemplo 1:

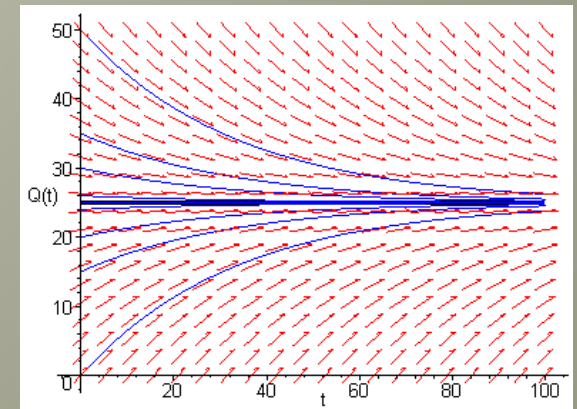
(c) Achando a solução assintótica Q_L (4 of 7)

- Para achar Q_L de sal $Q(t)$:

$$Q_L = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(25 + [Q_0 - 25] e^{-rt/100} \right) = 25 \text{ lb}$$

- Este resultado faz sentido ?
- O gráfico mostra a curva integral para $r = 3$ e vários valores de Q_0 .

$$Q(t) = 25 \left(1 - e^{-rt/100} \right) + Q_0 e^{-rt/100}$$



Exemplo 1: (d) Achar T (5 de 7)

- Supor $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$. Para achar o tempo T depois que $Q(t)$ é 2% de Q_L , observamos que $Q_0 = 2Q_L = 50$ lb, então

$$Q(t) = 25 + [Q_0 - 25]e^{-rt/100} = 25 + 25e^{-.03t}$$

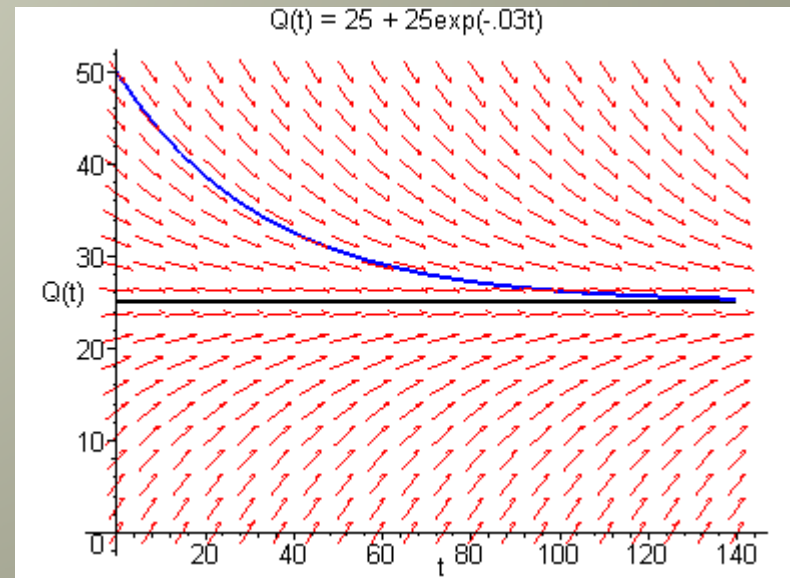
- Depois, 2% de 25 lb são 0.5 lb,

$$25.5 = 25 + 25e^{-0.03T}$$

$$0.02 = e^{-0.03T}$$

$$\ln(0.02) = -0.03T$$

$$T = \frac{\ln(0.02)}{-0.03} \approx 130.4 \text{ min}$$



Exemplo 2: (e) Achando a vazão (6 de 7)

- Para achar a vazão r requerida se T não ultrapassa 45 minutos, temos di item (d) que $Q_0 = 2Q_L = 50$ lb, com

$$Q(t) = 25 + 25e^{-rt/100}$$

e a curva solução decresce de from 50 para 25.5.

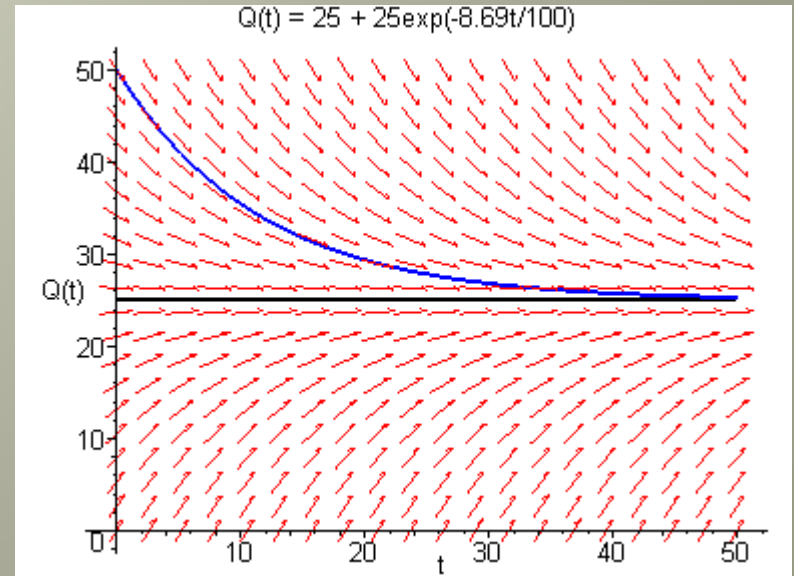
- Assim

$$25.5 = 25 + 25e^{-\frac{45}{100}r}$$

$$0.02 = e^{-0.45r}$$

$$\ln(0.02) = -0.45r$$

$$r = \frac{\ln(0.02)}{-0.45} \approx 8.69 \text{ gal/min}$$



Exemplo 2: Poluição de uma represa (1 de 7)

- Considere uma represa contendo inicialmente 10 milhões de litros de água limpa. Um córrego despeja água contaminada com uma vazão de 5 milhões l/ano, sendo que o nível da represa permanece constante. A concentração $c(t)$ de água contaminada varia com o tempo periodicamente segundo:

$$c(t) = 2 + \text{sen } 2t \text{ g/l}$$

- (a) Construa um modelo matemático para esse processo para determinar a quantidade de material poluente $Q(t)$.
- (b) Grafique a solução e descreva o efeito de mudar a concentração de entrada.

Exemplo 3: (a) PVI (2 de 7)

- Um balanço de massa de material poluente leva a

$$dQ / dt = \text{fluxo mássico entrada} - \text{fluxo mássico saída}$$

- Entrada: $(2 + \sin 2t \text{ g/l})(5 \times 10^6 \text{ l/ano})$
- Saída: Se há $Q(t)$ g de material poluente no instante t , a concentração é $Q(t) \text{ g}/10^7 \text{ l}$, e sai com uma de:

$$[Q(t) \text{ g}/10^7 \text{ l}][5 \times 10^6 \text{ l/ano}]$$

Exemplo 3: (a) PVI (3 de 7)

- entrada: $(2 + \sin 2t \text{ g/l})(5 \times 10^6 \text{ l/ano})$
- saída: $[Q(t) \text{ g}/10^7 \text{ l}][5 \times 10^6 \text{ l/ano}] = Q(t)/2 \text{ g/ano}$

- Temos

$$\frac{dQ}{dt} = (2 + \sin 2t)(5 \times 10^6) - \frac{Q(t)}{2}, \quad Q(0) = 0$$

- Mudando de variáveis (re-escalamento) : Seja $q(t) = Q(t)/10^6$.

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{2} = 10 + 5 \sin 2t, \quad q(0) = 0$$

Exemplo 3:

(a) Resolução (4 de 7)

- Para resolver o PVI

$$q' + q/2 = 10 + 5 \sin 2t, \quad q(0) = 0$$

usamos o método do fator integrante:

$$\mu(t) = e^{at} = e^{t/2}$$

$$q(t) = e^{-t/2} \int e^{t/2} (10 + 5 \sin 2t) dt$$

- Integrando,

$$q(t) = e^{-t/2} \left[20e^{t/2} - \frac{40}{17} e^{t/2} \cos 2t + \frac{10}{17} e^{t/2} \sin 2t + C \right]$$

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17} \sin 2t - \frac{300}{17} e^{-t/2}$$

Exemplo 3: (a) Integração por partes (5 de 7)

$$\begin{aligned}\int e^{t/2} \sin 2t dt &= \left[-\frac{1}{2} e^{t/2} \cos 2t + \frac{1}{4} \left(\int e^{t/2} \cos 2t dt \right) \right] \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{t/2} \cos 2t + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e^{t/2} \sin 2t - \frac{1}{4} \int e^{t/2} \sin 2t dt \right) \right] \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{t/2} \cos 2t + \frac{1}{8} e^{t/2} \sin 2t - \frac{1}{16} \int e^{t/2} \sin 2t dt \right]\end{aligned}$$

$$\frac{17}{16} \int e^{t/2} \sin 2t dt = -\frac{1}{2} e^{t/2} \cos 2t + \frac{1}{8} e^{t/2} \sin 2t + C$$

$$\int e^{t/2} \sin 2t dt = -\frac{8}{17} e^{t/2} \cos 2t + \frac{2}{17} e^{t/2} \sin 2t + C$$

$$5 \int e^{t/2} \sin 2t dt = -\frac{40}{17} e^{t/2} \cos 2t + \frac{10}{17} e^{t/2} \sin 2t + C$$

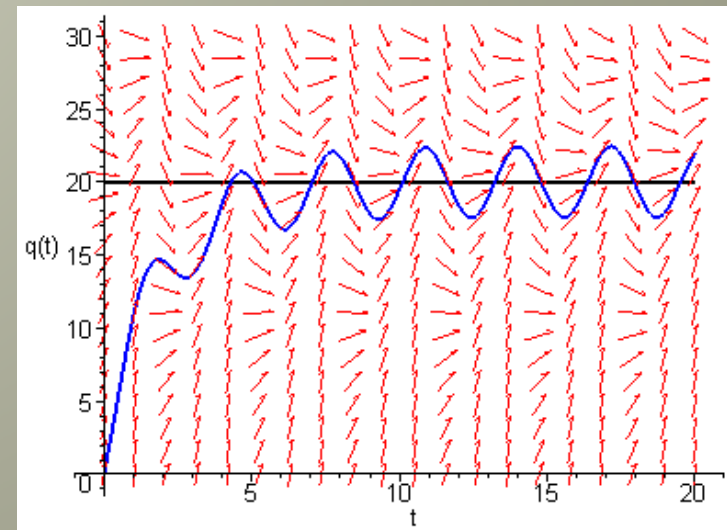
Exemplo 3: (b) Análise da solução (6 de 7)

- O nosso PVI e a nossa solução é

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}q = 10 + 5 \sin 2t, \quad q(0) = 0$$

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17} \sin 2t - \frac{300}{17} e^{-t/2}$$

- O gráfico e o campo de direções
- Note que o termo exponencial é importante para valores pequeno de t some para t grande.
 $y = 20$ seria a solução de equilíbrio se no fosse pelo termo $\sin(2t)$.



Seção 2.4:

Equações lineares e não lineares

- Uma EDO de 1ª ordem da forma $y' = f(t, y)$, é linear se a f for linear em y , e não linear se a f for não linear em y .
- Exemplos: $y' = ty - e^t$, $y' = ty^2$.
- Veremos que equações lineares e não lineares diferenciam-se de várias formas:
 - Os teoremas sobre existência e unicidade das soluções são diferentes.
 - As soluções das equações lineares podem ser expressas na forma de uma solução geral, o que usualmente não acontece com as não lineares.
 - As equações lineares possuem soluções dadas em forma explícita; em geral não temos soluções dadas implicitamente para as não lineares.
- Para ambos tipos de equações os métodos numéricos e gráficos são importantes.

Teorema 2.4.1

- Considere o PVI de 1ª ordem linear :

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad y(0) = y_0$$

Se as funções p e g são contínuas no intervalo aberto (α, β) que contém o ponto $t = t_0$,

então existe uma única solução $y = \phi(t)$ que satisfaz as condições iniciais para cada t em (α, β) .

- **Sem prova:** Use:

$$y = \frac{\int_{t_0}^t \mu(t)g(t)dt + y_0}{\mu(t)}, \quad \text{where } \mu(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}$$

Teorema 2.4.2

- Considere o PVI de 1ª ordem não linear:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

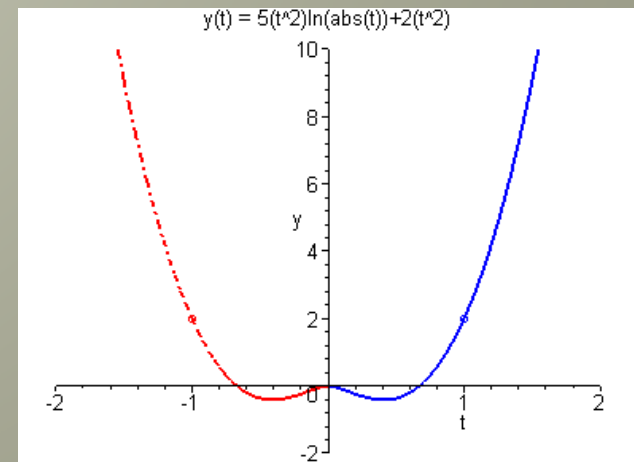
- Supor que f e $\partial f/\partial y$ são contínuas no retângulo aberto $(t, y) \in (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ contendo o ponto (t_0, y_0) . Então no intervalo $(t_0 - h, t_0 + h) \subseteq (\alpha, \beta)$ existe uma única solução $y = \phi(t)$ que satisfaz o PVI.
- As condições do teorema são suficiente porém não necessárias. A continuidade de f garante existência porém não unicidade de ϕ .

Exemplo 1: Linear PVI

- Consideremos o PVI:

$$ty' - 2y = 5t^2, \quad y(1) = 2 \Rightarrow y = 5t^2 \ln|t| + 2t^2$$

- A solução está definida para $t > 0$, o intervalo para o qual $p(t) = -2/t$ é contínua.
- Se a condição inicial for $y(-1) = 2$, a solução está dada pela mesma expressão, porém definida para $t < 0$.
- Está garantido que a solução é única no correspondente intervalo.



Exemplo 2: PVI não linear (1 e 2)

- Consideremos o PVI não linear:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

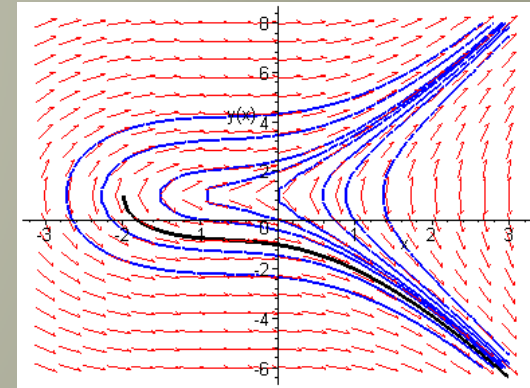
- As funções f e $\partial f/\partial y$ estão dadas por

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2},$$

e são contínuas a exceção dos pontos sobre a reta $y = 1$.

- Então podemos construir um retângulo aberto em torno de $(0, -1)$ no qual f e $\partial f/\partial y$ são contínuas, tão grande como possível sem cobrir $y = 1$.
- Qual a largura do retângulo? Para $t > -2$,

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$



Exemplo 2: Mudando a condição inicial (2 de 2)

- O nosso problema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

sendo

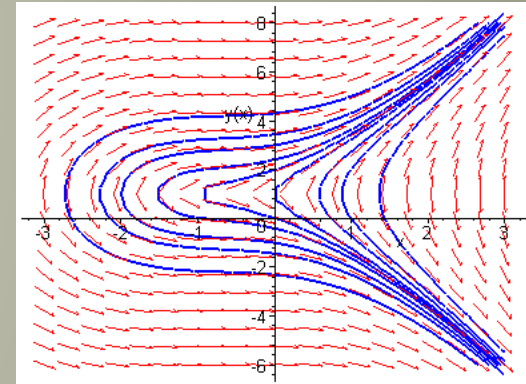
$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2},$$

que são contínuas exceto na reta $y = 1$.

- Se mudamos a condição inicial para $y(0) = 1$, o Teorema 2.4.2 não é satisfeito. Resolvendo temos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}, \quad x > 0$$

- Então a solução não é única.



Exemplo 3: PVI Não linear

- Considere o seguinte PVI não linear

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0 \quad (t \geq 0)$$

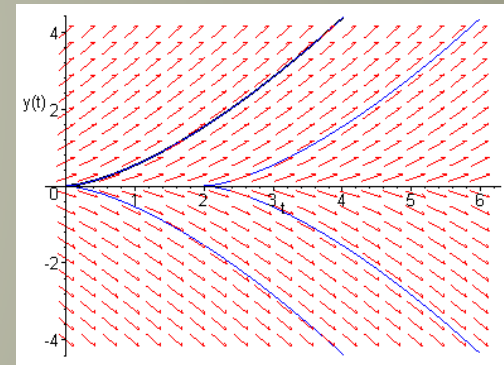
- As funções f e $\partial f/\partial y$ são

$$f(t, y) = y^{1/3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

- Assim f é contínua, porém $\partial f/\partial y$ não é em $y = 0$, e o Teorema 2.4.2 não é satisfeito. Existem soluções não únicas. Separando variáveis e resolvendo, temos

$$y^{-1/3} dy = dt \Rightarrow \frac{3}{2} y^{2/3} = t + c \Rightarrow y = \pm \left(\frac{2}{3} t \right)^{3/2}, \quad t \geq 0$$

- If initial condition is not on t -axis, then Theorem 2.4.2 does guarantee existence and uniqueness.



Exemplo 4: PVI Não-linear

- Consideremos o PVI não-linear

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

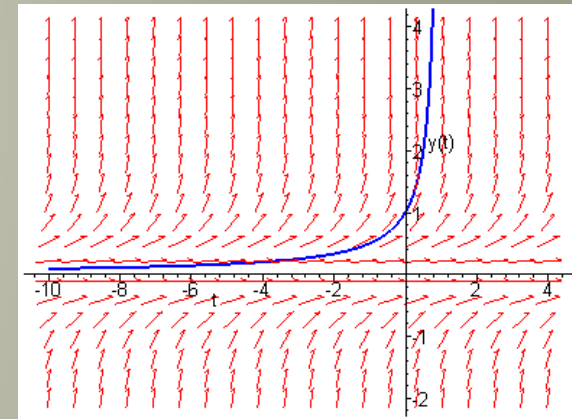
- As funções f e $\partial f/\partial y$ estão dadas por

$$f(t, y) = y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2y$$

- f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em $t = 0$, assim temos que a solução existe e é única.
- Separando variáveis obtemos

$$y^{-2} dy = dt \Rightarrow -y^{-1} = t + c \Rightarrow y = \frac{-1}{t+c} \Rightarrow y = \frac{1}{1-t}$$

- A solução está definida em $(-\infty, 1)$. Notamos que a singularidade em $t = 1$ não está presente na apresentação do problema.



Intervalo de definição: Equação Linear

- Temos que a solução de

$$y' + p(t)y = g(t), \quad y(0) = y_0$$

existe em uma vizinhança de $t = t_0$ onde p e g são contínuas.

- Assíntotas verticais ou outras descontinuidades na solução podem aparecer apenas nas descontinuidades de p ou g .
- Porém as soluções podem ser diferenciáveis em pontos de descontinuidade de p ou g .

Intervalos de definição: Equações não-lineares

- Os intervalos de definição onde a solução existe podem ser difíceis de determinar.
- A solução $y = \phi(t)$ existe sempre que $(t, \phi(t))$ permaneça dentro da região retangular indicada anteriormente. Isto é o que determina o valor de h . Desde que $\phi(t)$ não é conhecida, pode ser impossível determinar esta região.
- Neste caso, o intervalo no qual a solução existe pode não ter uma relação simples com a função f na equação diferencial $y' = f(t, y)$, em contraste com equações lineares.
- Além disso, quaisquer singularidades na solução dependerão da condição inicial e da própria equação.
- Comparemos esses comentários nos seguintes exemplos.

Soluções gerais

- Para uma equação linear de primeira ordem, é possível obter uma solução contendo uma constante arbitrária, a partir da qual todas as soluções podem ser obtidas especificando essa constante.
- Para equações não-lineares a solução geral pode não existir. Isto é, ainda com uma solução contendo uma constante arbitrária pode haver outras soluções que não podem ser obtidas especificando valores para esta constante.
- Consideremos o Exemplo 4: A função $y = 0$ é uma solução da equação diferencial, porém não pode ser obtida especificando um valor para c na solução achada usando separação de variáveis:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{t + c}$$

Soluções explícitas: Equações lineares

- O PVI

$$y' + p(t)y = g(t), \quad y(0) = y_0$$

existe em uma vizinhança de t_0 na qual p e g são contínuas e é única.

- A solução possui uma representação explícita,

$$y = \frac{\int_{t_0}^t \mu(t)g(t)dt + y_0}{\mu(t)}, \quad \text{onde } \mu(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds},$$

Aproximação da solução explícita

- A representação explícita da solução pode ser obtida sempre que as integrais envolvidas possam ser resolvidas.
- Se as integrais não podem ser resolvidas devemos usar métodos numéricos.

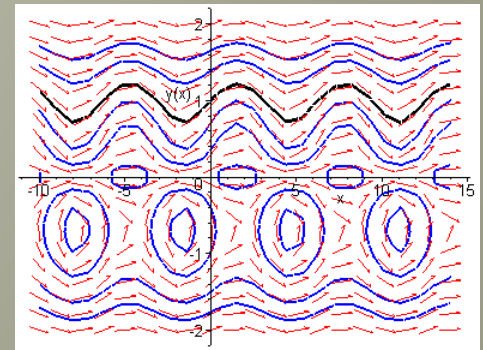
$$y = \frac{\int_{t_0}^t \mu(t) g(t) dt + C}{\mu(t)}, \quad \text{where } \mu(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds}$$

$$\int_{t_0}^t \mu(t) g(t) dt \approx \sum_{k=1}^n \mu(t_k) g(t_k) \Delta t_k$$

Soluções implícitas para equações não lineares

- Para equações não-lineares as representações explícitas podem não existir.
- As vezes é possível obter uma solução que defina a solução explicitamente.
- As vezes, são necessários fazer uma tabela y vs t . Como em um exemplo anterior

$$y' = \frac{y \cos x}{1 + 3y^3}, \quad y(0) = 1 \Rightarrow \ln y + y^3 = \sin x + 1$$



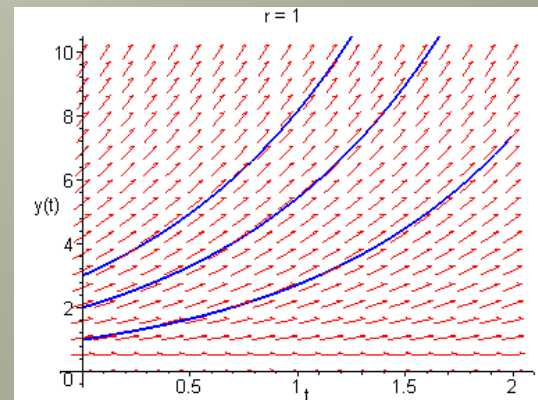
Seção 2.5: Dinâmica Populacional

- Consideraremos equações do tipo $y' = f(y)$, chamadas equações **autônomas**, onde a variável independente t não aparece explicitamente.
- O objetivo imediato é utilizar métodos geométricos que nos permitam obter informação qualitativa da solução sem precisar resolver a equação.
- Exemplo (Crescimento exponencial):

$$y' = ry, \quad r > 0$$

- Solução:

$$y = y_0 e^{rt}$$



Crescimento logístico

- O modelo exponencial $y' = ry$, cuja solução é $y = e^{rt}$, predice um crescimento ilimitado com taxa $r > 0$ (que independe da população).
- Supondo agora que a taxa de crescimento depende do tamanho da população, podemos substituir r por uma função $h(y)$ para obter $y' = h(y)y$.
- A função $h(y)$ selecionada deve ser tal que
 - $h(y) \cong r > 0$ quando y for pequeno,
 - $h(y)$ decresça quando y crescer, e
 - $h(y) < 0$ quando y for suficientemente grande.

Obtemos assim $h(y) = r - ay$, sendo $a > 0$.

- Esta equação é chamada a equação **logística**, $r, a > 0$

A equação Logística

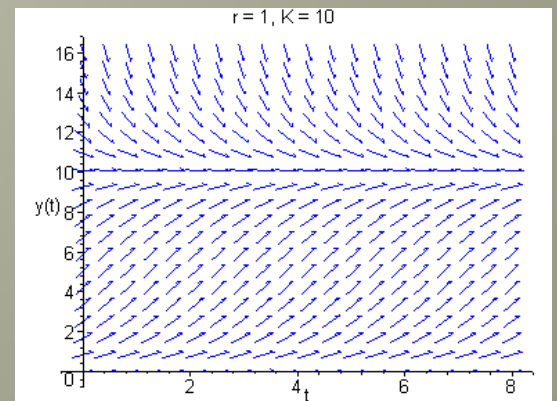
$$y' = (r - ay)y, \quad r, a > 0$$

- Que pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y,$$

onde $K = r/a$. A constante r é chamada **taxa de crescimento intrínseca**, e K representa a **capacidade crítica** da população.

- O campo de direções com
 $r = 1$ e $K = 10$



A equação Logística: Soluções de equilíbrio

- A equação logística

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y, \quad r, K > 0$$

- Temos dois estado de equilíbrio:

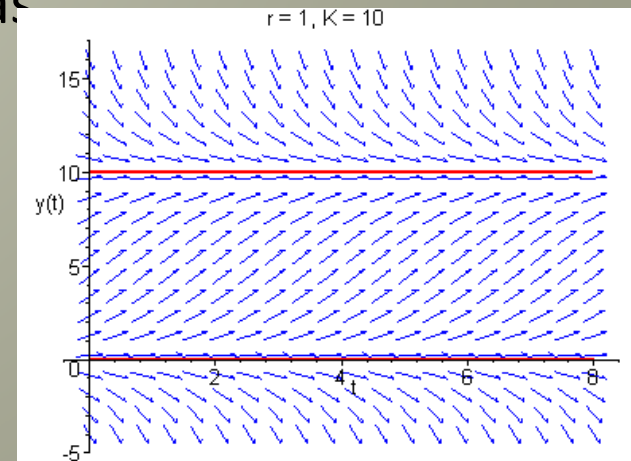
$$y = \phi_1(t) = 0, \quad y = \phi_2(t) = K$$

- No campo de direções, ($r = 1, K = 10$), observamos o comportamento das soluções próximas

das soluções de equilíbrio:

$y = 0$ é **instável**

$y = 10$ é **assintoticamente estável**



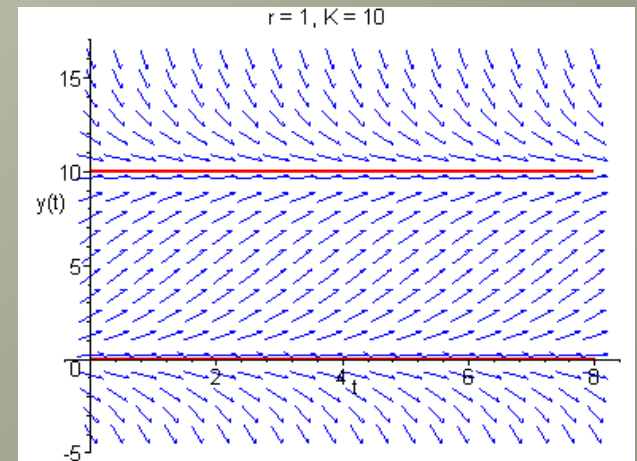
Soluções de equilíbrio

- As soluções de equilíbrio para $y' = f(y)$ podem ser obtidas determinando as raízes de $f(y) = 0$.
- As raízes de $f(y) = 0$ são chamados pontos críticos.
- Os pontos crítico de

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y$$

são $y = 0$ e $y = K$.

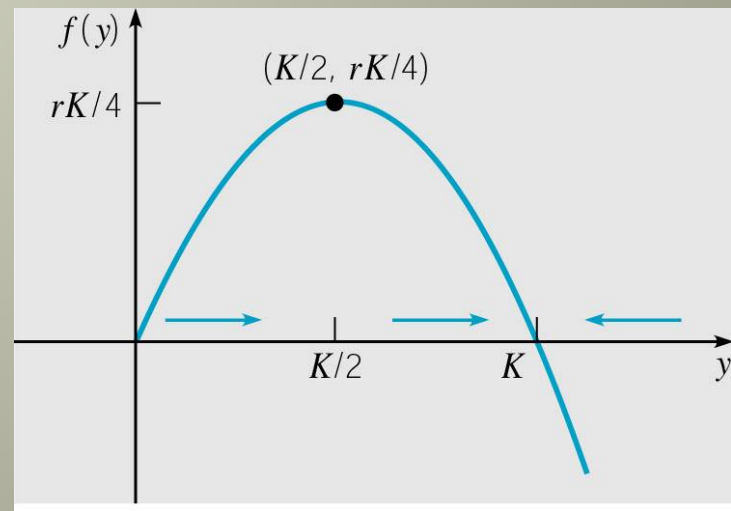
- Pontos críticos são funções constantes (soluções de equilíbrio).



A equação logística: Análise qualitativa e gráfica (1 de 7)

- Começamos graficando $f(y)$ vs. y .
- No caso de crescimento logístico, isto significa fazer o estudo da curva $z=f(y)$.

$$f(y) = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y$$



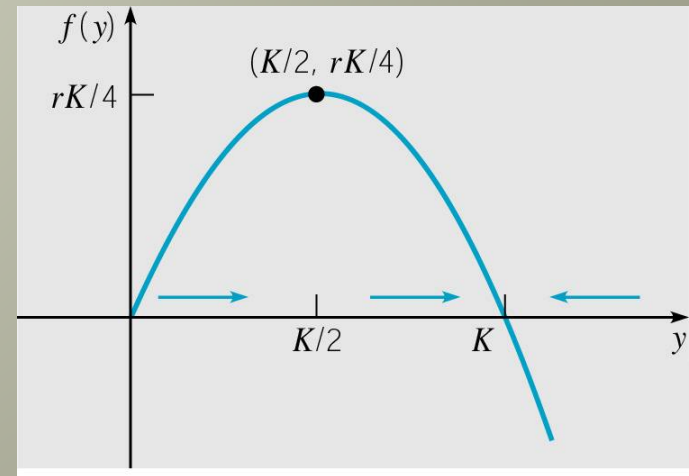
Pontos críticos (2 de 7)

- As intersecções de f com o eixo y acontecem em $(0,0)$ e $(K,0)$, correspondem aos pontos críticos.
- O vértice da parábola é $(K/2, rK/4)$.

$$f(y) = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$

$$\begin{aligned} f'(y) &= r\left[\left(-\frac{1}{K}\right)y + \left(1 - \frac{y}{K}\right)\right] \\ &= -\frac{r}{K}[2y - K] \stackrel{\text{set}}{=} 0 \Rightarrow y = \frac{K}{2} \end{aligned}$$

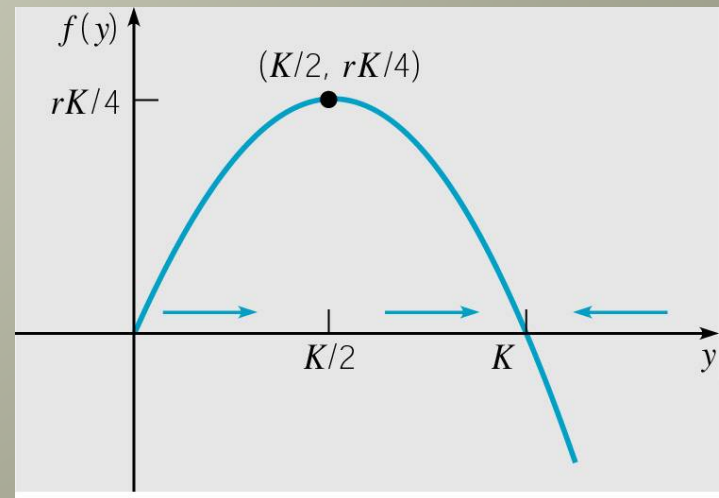
$$f\left(\frac{K}{2}\right) = r\left(1 - \frac{K}{2K}\right)\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{rK}{4}$$



Crescendo e decrescendo (3 de 7)

- $dy/dt > 0$ para $0 < y < K$, e então y é uma função crescente de t (indicado com uma seta para a direita ao longo do eixo y para $0 < y < K$).
- Análogamente, y é decrescente para $y > K$ (indicado com uma seta para a esquerda para $y > K$).
- O eixo y é chamado **linha de fase**.

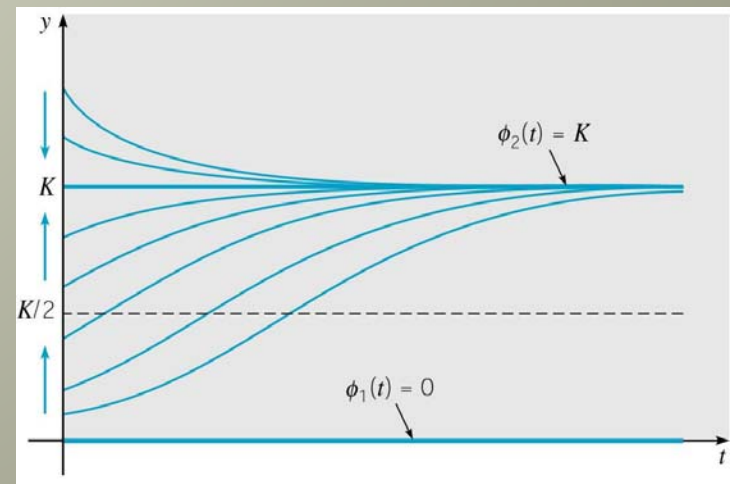
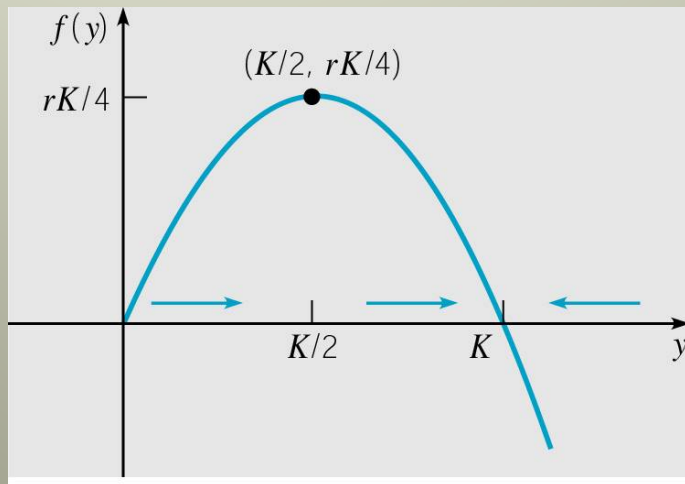
$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y, \quad r > 0$$



Comportamento assintótico (4 de 7)

- Observamos que $dy/dt \cong 0$ quando $y \cong 0$ e/ou $y \cong K$, assim y sofre um achatamento próximo desses valores e y pula um degrau quando y se desloca desde 0 ou desde K .

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y$$

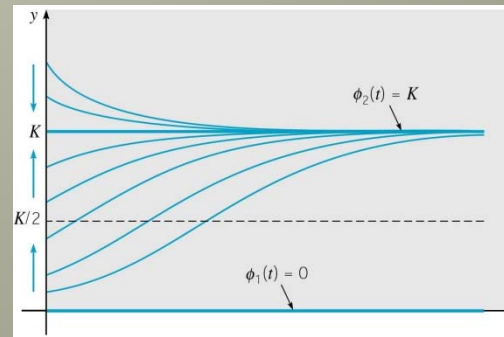
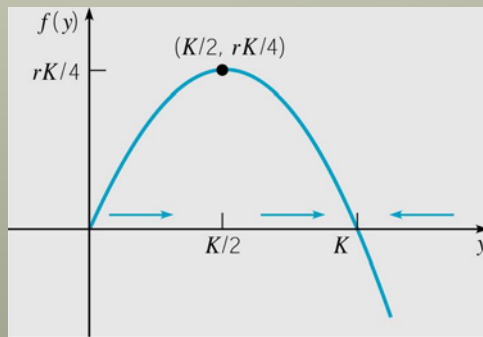


Concavidade (5 de 7)

- Para estudar a concavidade $y(t)$, calculamos y'' :

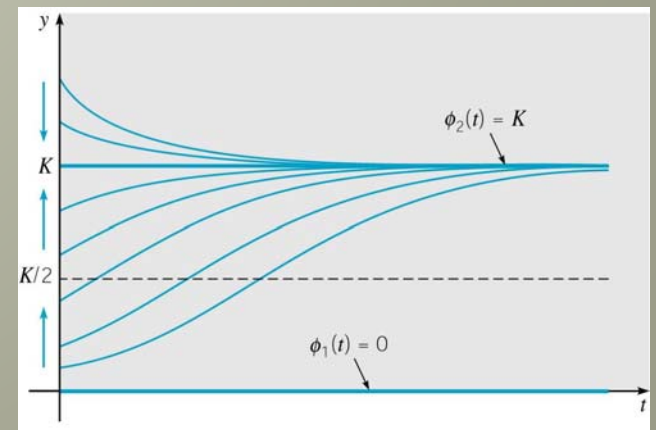
$$\frac{dy}{dt} = f(y) \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = f'(y) \frac{dy}{dt} = f'(y)f(y)$$

- O gráfico possui concavidade para cima quando f e f' têm o mesmo sinal, o que acontece quando $0 < y < K/2$ e $y > K$.
- y tem concavidade para abaixo quando f e f' têm sinal oposto, o que acontece quando $K/2 < y < K$.
- Os pontos de inflexão aparecem na intersecção da curva solução y e a reta $y = K/2$.



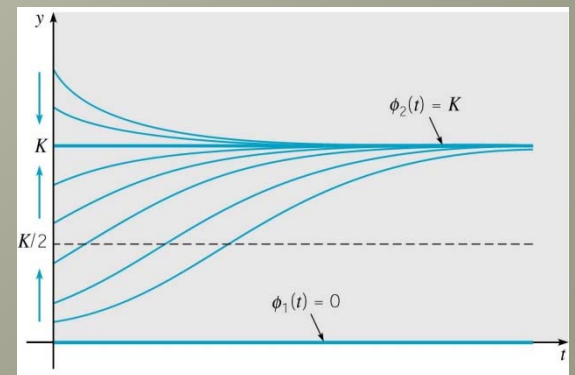
Análise das curvas solução (6 de 7)

- Temos:
 - y cresce quando $0 < y < K$.
 - y decresce quando $y > K$.
 - Declividade de y aproximadamente nula quando $y \cong 0$ ou $y \cong K$.
 - Concavidade para cima quando $0 < y < K/2$ fr $y > K$.
 - Concavidade para abaixo quando $K/2 < y < K$.
 - Ponto de inflexão quando $y = K/2$.



Resumo (7 de 7)

- A constante K é chamada capacidade crítica o nível de saturação para a espécie.
- Observamos que o comportamento da solução é bem diferente da solução exponencial que é determinado pelo efeito do termo não linear na equação logística.



Resolvendo a equação logística (1 de 3)

- Assumindo que $y \neq 0$ e $y \neq K$, podemos escrever:

$$\frac{dy}{(1 - y/K)y} = rdt$$

- Expandindo em frações parciais,

$$\frac{1}{(1 - y/K)y} = \frac{A}{1 - y/K} + \frac{B}{y} \Rightarrow 1 = Ay + B(1 - y/K) \Rightarrow B = 1, A = y/K$$

- Assim temos

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K} \right) dy = rdt$$

- Integrando

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + C$$

Resolvendo ... (2 de 3)

- Temos:

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + C$$

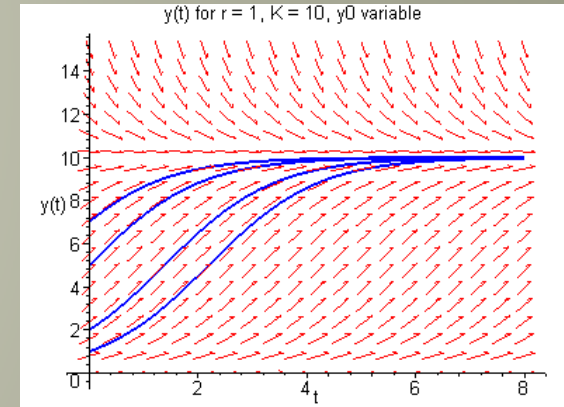
- Se $0 < y_0 < K$, logo $0 < y < K$ e então

$$\ln y - \ln\left(1 - \frac{y}{K}\right) = rt + C$$

- ou

$$\ln\left[\frac{y}{1 - y/K}\right] = rt + C \Leftrightarrow \frac{y}{1 - y/K} = e^{rt+C} \Leftrightarrow \frac{y}{1 - y/K} = ce^{rt}$$

$$\text{ou } y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}, \quad \text{onde } y_0 = y(0)$$



Resolvendo ...(3 de 3)

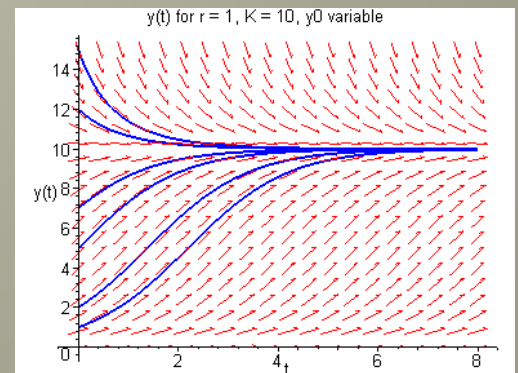
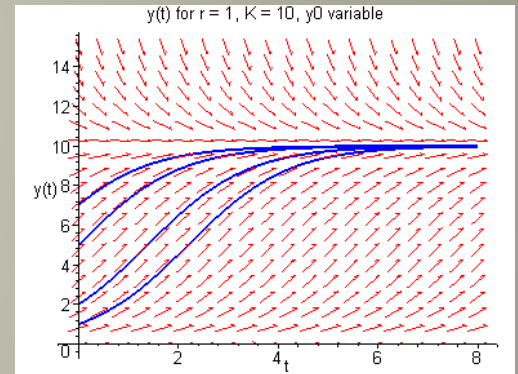
- Temos:

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

para $0 < y_0 < K$.

- Podemos mostrar que esta solução é também verdadeira para $y_0 > K$.
- Finalmente a nossa solução é

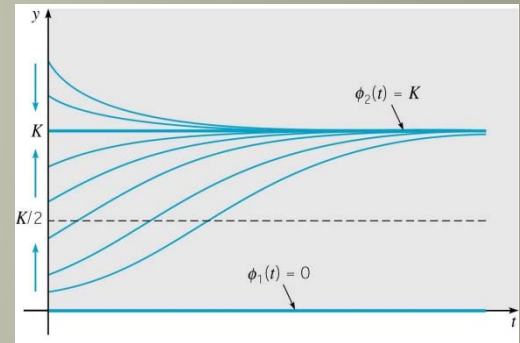
$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$



Comportamento assintótico

- Temos que

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$



- Usamos limite para ver o comportamento assintótico:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_0 K}{y_0} = K$$

- Concluimos que a solução de equilíbrio $y(t) = K$ é **assintoticamente estável**, entanto que s solução $y(t) = 0$ é **instável**.
- A única forma de garantir que a solução permaneça próxima de zero é fazer $y_0 = 0$.

Exemplo: Peixes (1 de 2)

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

- Seja y a biomassa (em kg) de população de peixes em t , com $r = 0.71/\text{ano}$ e $K = 80.5 \times 10^6$ kg. Se $y_0 = 0.25K$, ache
 - (a) biomassa 2 anos depois
 - (b) o tempo τ de tal forma que $y(\tau) = 0.75K$.

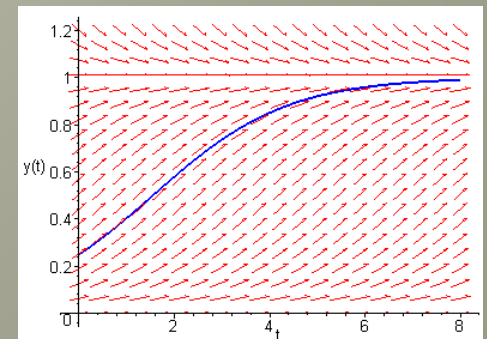
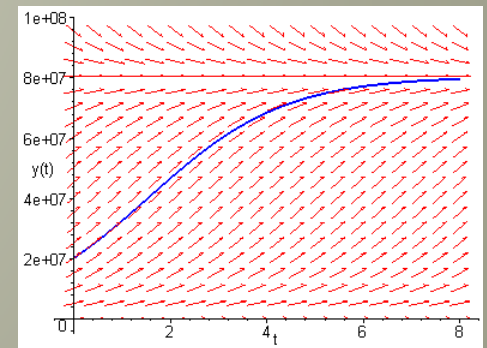
(a) Re-escalando

então
$$\frac{y}{K} = \frac{y_0/K}{y_0/K + (1 - y_0/K)e^{-rt}}$$

$$\frac{y(2)}{K} = \frac{0.25}{0.25 + 0.75e^{-(0.71)(2)}} \approx 0.5797$$

e assim

$$y(2) \approx 0.5797K \approx 46.7 \times 10^6 \text{ kg}$$



Exemplo: Peixes (2 de 2)

(b) Ache o tempo τ para o qual $y(\tau) = 0.75K$.

$$\frac{y}{K} = \frac{y_0/K}{y_0/K + (1 - y_0/K)e^{-rt}}$$

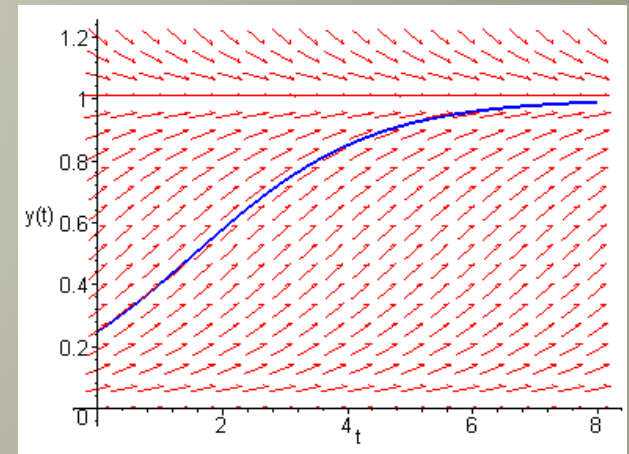
$$0.75 = \frac{y_0/K}{y_0/K + (1 - y_0/K)e^{-r\tau}}$$

$$0.75 \left[\frac{y_0}{K} + \left(1 - \frac{y_0}{K} \right) e^{-r\tau} \right] = \frac{y_0}{K}$$

$$0.75 y_0/K + 0.75(1 - y_0/K)e^{-r\tau} = y_0/K$$

$$e^{-r\tau} = \frac{0.25 y_0/K}{0.75(1 - y_0/K)} = \frac{y_0/K}{3(1 - y_0/K)}$$

$$\tau = \frac{-1}{0.71} \ln \left(\frac{0.25}{3(0.75)} \right) \approx 3.095 \text{ anos}$$

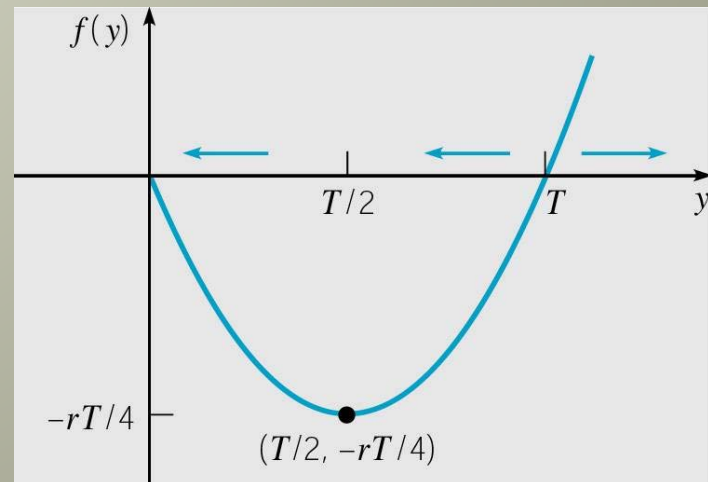


Suporte crítico (1 de 2)

- Considere a equação logística modificada:

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T} \right) y, \quad r > 0$$

- O gráfico do lado direito $f(y)$ é

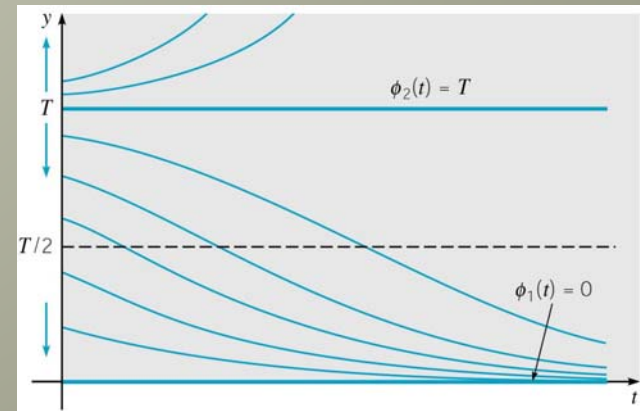


Capacidade crítica: análise qualitativo e solução (2 de 2)

- Fazendo uma análise semelhante ao do caso logístico obtemos o gráfico da curva solução.
- T é um valor crítico para y_0 , no qual a população desaparece ou cresce ilimitadamente, dependendo do lado em que fica y_0 em relação a T .
- Pode se mostrado que a solução para a equação crítica

$$\text{é } \frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T} \right) y, \quad r > 0$$

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0) e^{rt}}$$

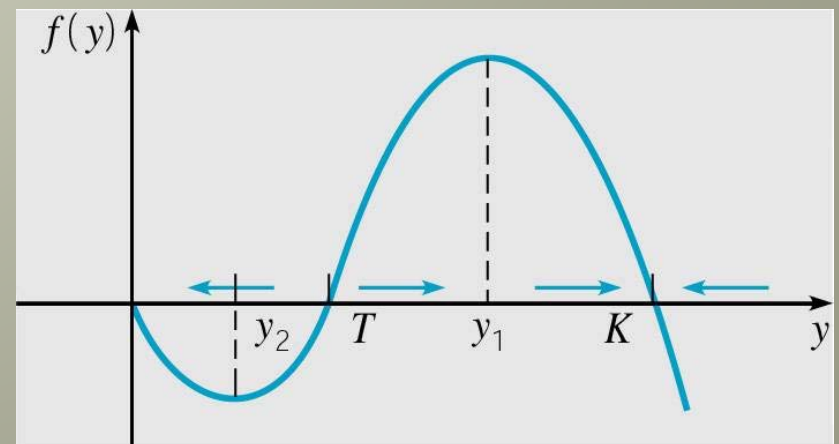


Crescimento logístico com capacidade crítica (1 de 2)

- Para evitar crescimento ilimitado para $y > T$ como antes, consideremos a equação logística modificada :

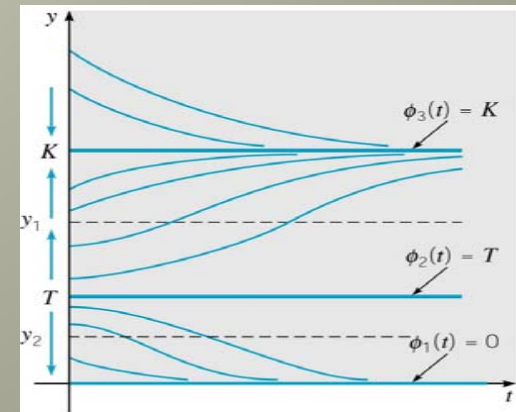
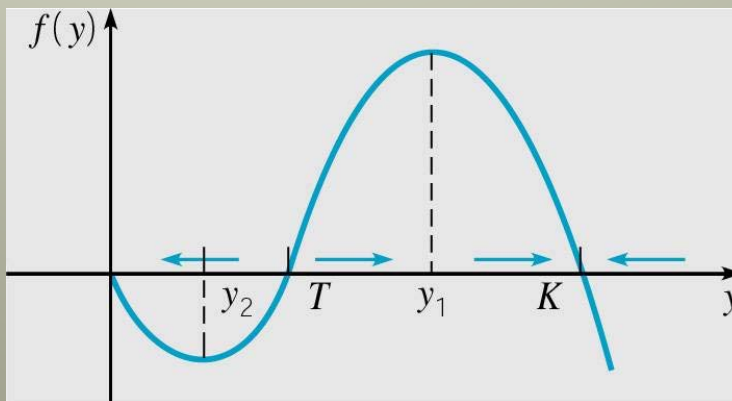
$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad r > 0 \text{ e } 0 < T < K$$

- O gráfico do lado direito $f(y)$ é



Crescimento logístico com capacidade crítica (2 de 2)

- T é a capacidade crítica para y_0 , em que a população some ou cresce para o valor K , dependendo onde está y_0 em relação a T .
- K é o nível da capacidade crítica.
- Note que : $y = 0$ e $y = K$ são soluções de equilíbrio estável, e $y = T$ é uma solução de equilíbrio instável.



Seção 2.6:

Equações exatas & Fatores Integrantes

- Consideremos uma EDO de primeira ordem da forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

- Supor que existe uma função ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

e tal que $\psi(x, y) = c$ define $y = \phi(x)$ implicitamente. Logo

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)]$$

assim a equação original se converte em

$$\frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)] = 0$$

- Então $\psi(x, y) = c$ define uma solução implicitamente.
- Neste caso, a EDO é **exata**.

Teorema

- Supor que uma EDO pode ser escrita na forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1)$$

onde as funções M , N , M_y and N_x são todas contínuas em uma região retangular $R: (x, y) \in (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$. Então a Eq. (1) é uma **equação diferencial exata** sse

$$M_y(x, y) = N_x(x, y), \quad \forall (x, y) \in R \quad (2)$$

- Isto é, existe uma função ψ que satisfazendo as condições

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y) \quad (3)$$

sse M e N satisfazem a Eq. (2).

Exemplo 1: A equação exata (1 de 4)

Consideremos a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+4y}{4x-y} \Leftrightarrow (x+4y) + (4x-y)y' = 0$$

sendo

$$M(x, y) = x + 4y, \quad N(x, y) = 4x - y$$

temos

$$M_y(x, y) = 4 = N_x(x, y) \Rightarrow \text{EDO é exata}$$

Usando o teorema anterior

Então $\psi_x(x, y) = x + 4y, \quad \psi_y(x, y) = 4x - y$

$$\psi(x, y) = \int \psi_x(x, y) dx = \int (x + 4y) dx = \frac{1}{2} x^2 + 4xy + C(y)$$

Exemplo 1: Solução (2 de 4)

Temos que

$$\text{e } \psi_x(x, y) = x + 4y, \quad \psi_y(x, y) = 4x - y$$

$$\psi(x, y) = \int \psi_x(x, y) dx = \int (x + 4y) dx = \frac{1}{2} x^2 + 4xy + C(y)$$

Se segue que

$$\psi_y(x, y) = 4x - y = 4x + C'(y) \Rightarrow C'(y) = -y \Rightarrow C(y) = -\frac{1}{2} y^2 + k$$

então

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + 4xy - \frac{1}{2} y^2 + k$$

A solução está implicitamente por

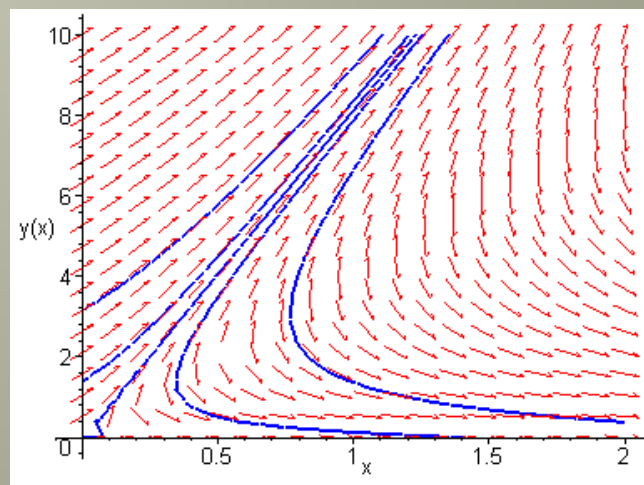
$$x^2 + 8xy - y^2 = c$$

Exemplo 1:

Campos de direção e curvas solução (3 de 4)

✿ A EDO e as soluções estão dadas por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+4y}{4x-y} \Leftrightarrow (x+4y) + (4x-y)y' = 0 \Rightarrow x^2 + 8xy - y^2 = c$$



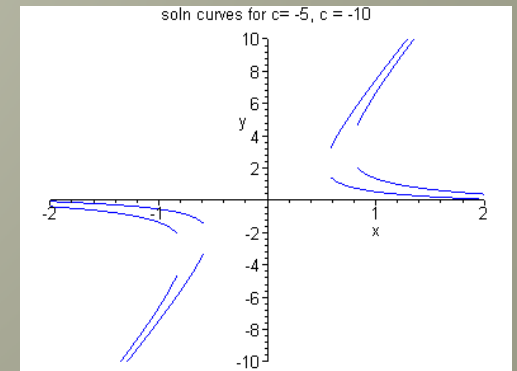
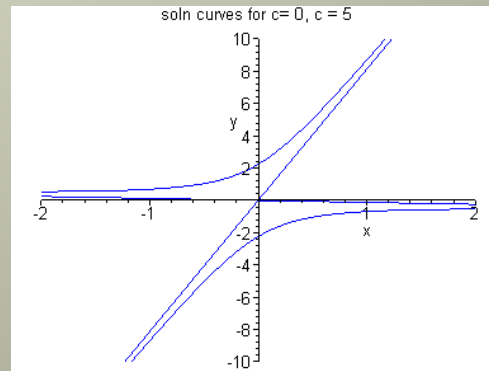
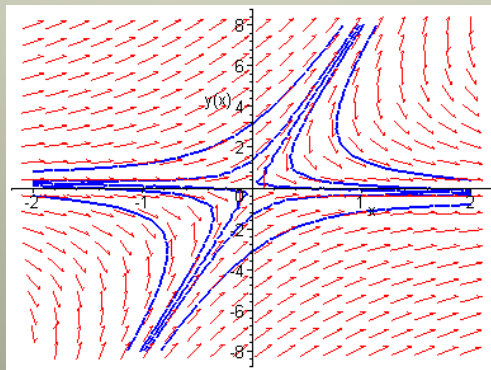
Exemplo 1: soluções explícitas e gráficos (4 de 4)

- A nossa solução está dada implicitamente por.

$$x^2 + 8xy - y^2 = c$$

- Neste caso podemos explicitar y :

$$y^2 - 8xy - x^2 - c = 0 \Rightarrow y = 4x \pm \sqrt{17x^2 + c}$$



Exemplo 2: Solução exata (1 de 3)

✱ Considere a EDO

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

✱ Temos

✱

$$M(x, y) = y \cos x + 2xe^y, \quad N(x, y) = \sin x + x^2e^y - 1$$

e então

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y) \Rightarrow \text{é exata}$$

logo

$$\psi_x(x, y) = M = y \cos x + 2xe^y, \quad \psi_y(x, y) = N = \sin x + x^2e^y - 1$$

$$\psi(x, y) = \int \psi_x(x, y) dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx = y \sin x + x^2e^y + C(y)$$

Exemplo 2: Solução (2 de 3)

✿ Temos

$$\psi_x(x, y) = M = y \cos x + 2xe^y, \quad \psi_y(x, y) = N = \sin x + x^2e^y - 1$$

Se segue que

$$\psi(x, y) = \int \psi_x(x, y) dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx = y \sin x + x^2e^y + C(y)$$

✿ logo

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y - 1 = \sin x + x^2e^y + C'(y)$$

$$\Rightarrow C'(y) = -1 \Rightarrow C(y) = -y + k$$

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y - y + k$$

✿ E a solução é

$$y \sin x + x^2e^y - y = c$$

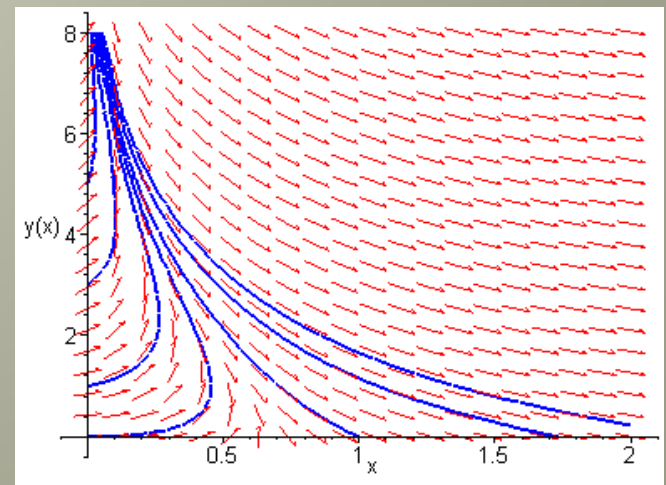
Exemplo 2:

Campos de direção e curvas solução (3 de 3)

☀ A equação diferencial e a solução está dada por

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0,$$

$$y \sin x + x^2e^y - y = c$$



Exemplo 3: A equação não exata (1 de 3)

- ✱ Consideremos a EDO

$$(3xy + y^2) + (2xy + x^3)y' = 0$$

- ✱ Temos que



$$M(x, y) = 3xy + y^2, N(x, y) = 2xy + x^3$$

e então

$$M_y(x, y) = 3x + 2y \neq 2y + 3x^2 = N_x(x, y) \Rightarrow \text{não é exata}$$

- Para mostrar que o método não funciona escolhemos uma função ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = M = 3xy + y^2, \psi_y(x, y) = N = 2xy + x^3$$

- Logo

$$\psi(x, y) = \int \psi_x(x, y) dx = \int (3xy + y^2) dx = 3x^2 y / 2 + xy^2 + C(y)$$

Exemplo 3: A equação não exata (2 de 3)

✱ Vemos que

$$\text{e } \psi_x(x, y) = M = 3xy + y^2, \quad \psi_y(x, y) = N = 2xy + x^3$$

$$\psi(x, y) = \int \psi_x(x, y) dx = \int (3xy + y^2) dx = 3x^2y/2 + xy^2 + C(y)$$

• Então

$$\psi_y(x, y) = 2xy + x^3 = 3x^2/2 + 2xy + C'(y)$$

$$\Rightarrow C'(y) \stackrel{?}{=} x^3 - 3x^2/2 \Rightarrow C(y) \stackrel{??}{=} x^3y - 3x^2y/2 + k$$

• Assim, não existe uma tal função ψ . Entretanto, se procedemos (incorretamente) como antes obtemos

$$x^3y + xy^2 = c$$

que não é a solução da EDO.

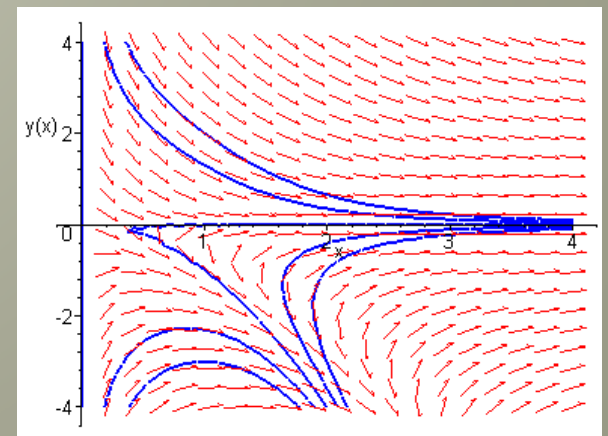
Exemplo 3: Gráficos (3 de 3)

- ✱ A EDO e a solução dada implicitamente são

$$(3xy + y^2) + (2xy + x^3)y' = 0,$$

$$x^3y + xy^2 = c$$

- ✱ é solução ?



Fatores integrantes

- As vezes é possível converter que não é não exata em uma exata multiplicando-a por uma função, um fator integrante adequado $\mu(x, y)$:

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0$$

- Para que esta equação seja exata devem ser satisfeitas

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \Leftrightarrow M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0$$

- Esta EDO pode ser difícil de resolver. Se μ for apenas função de x , então $\mu_y = 0$ e assim podemos resolver

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu,$$

deixando o lado direito como uma função de x .

Similarmente se μ for uma função de apenas de y .

Exemplo 4: A equação não exata

- ✿ Consideremos a seguinte EDO.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

- ✿ com um fator integrante adequado resolvemos

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu \Leftrightarrow \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x} \Rightarrow \mu(x) = x$$

- Multiplicando a equação diferencial por μ , obtemos uma equação exata

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0,$$

cuja solução está dada por

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$$

Seção 2.7: Aproximação numérica; o método de Euler

- Seja o PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

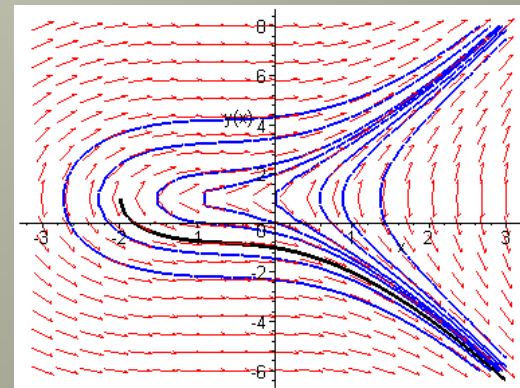
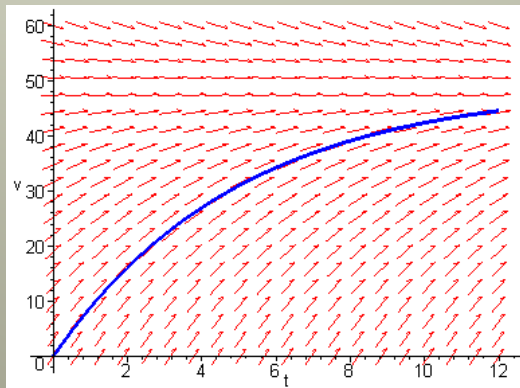
- Sabemos que se f e $\partial f/\partial y$ são contínuas, então o PVI possui uma única solução $y = \phi(t)$ em alguma vizinhança de t_0 .
- Quando a equação diferencial for linear, separável ou exata podemos achar uma solução analítica.
- Entretanto, as soluções para a grande maioria de equações diferenciais não podem ser obtidas com estes métodos.
- Assim devemos encontrar formas alternativas para resolver este problemas.

Campos de direção

- Para o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

podemos esboçar o campo de direções e visualizamos o comportamento das soluções. Este procedimento é relativamente simples e funciona ainda para equações complexas. Porém, não conduzem a soluções quantitativas as quais possam ser avaliadas ou comparadas.



Métodos numéricos

- Para o PVI

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

uma possibilidade consiste em calcular valores aproximadas da solução $y = \phi(t)$ em um conjunto de pontos t .

- Idealmente, a solução aproximada contém erros, que deveriam estar limitados para garantir um nível de exatidão.
- Para isso introduzimos o **métodos das tangentes** ou o **método de Euler**.

O Método de Euler

- Começamos por encontrar uma primeira aproximação de

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

para $y = \phi(t)$ em t_0 .

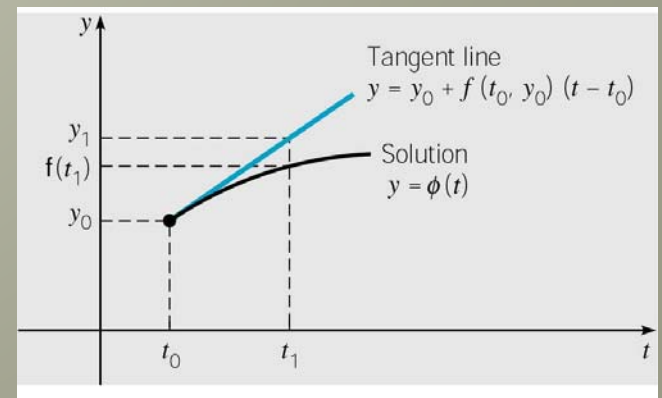
- A solução passa por (t_0, y_0) com coeficiente angular $f(t_0, y_0)$. A reta tangente no ponto inicial é

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

- A reta tangente é uma boa aproximação para a curva solução em um pequeno intervalo

- Se t_1 estiver próximo de t_0 , podemos aproximar $\phi(t_1)$ por

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0)$$



A fórmula de Euler

- Para um ponto t_2 perto de t_1 , aproximamos $\phi(t_2)$ usando uma reta que passa por (t_1, y_1) com coeficiente angular $f(t_1, y_1)$:

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1)$$

- Assim criamos uma sequência y_n de aproximações para $\phi(t_n)$:

$$y_1 = y_0 + f_0 \cdot (t_1 - t_0)$$

$$y_2 = y_1 + f_1 \cdot (t_2 - t_1)$$

⋮

$$y_{n+1} = y_n + f_n \cdot (t_{n+1} - t_n)$$

onde $f_n = f(t_n, y_n)$.

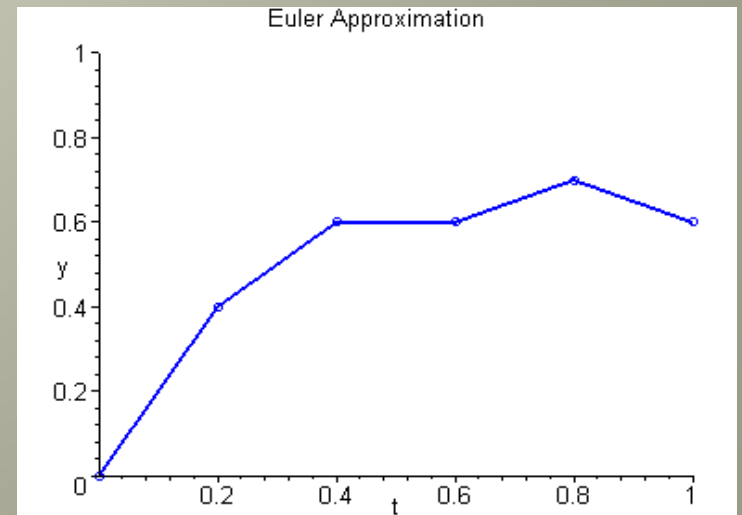
- Para um passo $h = t_n - t_{n-1}$, obtemos a fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aproximação de Euler

- Para graficar a solução aproximada de Euler, graficamos os pontos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$, e então unimos os pontos com segmentos de reta.

$$y_{n+1} = y_n + f_n \cdot (t_{n+1} - t_n), \text{ onde } f_n = f(t_n, y_n)$$



Exemplo 1: Método de Euler (1 de 3)

- Seja o PVI

$$y' = 9.8 - 0.2y, \quad y(0) = 0$$

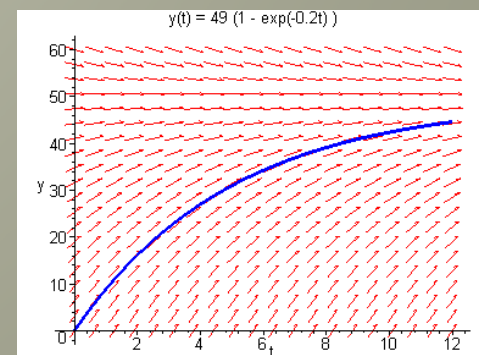
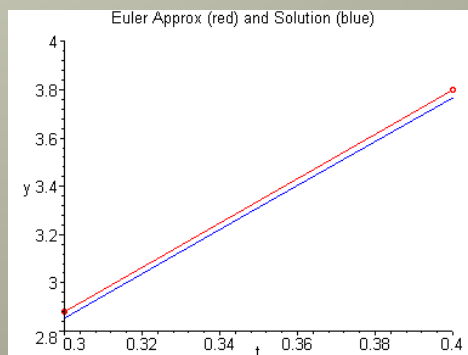
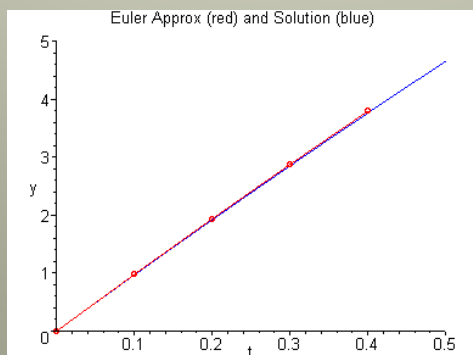
usamos o método de Euler com $h = 0.1$ para obter a solução aproximada em $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

$$y_1 = y_0 + f_0 \cdot h = 0 + 9.8(0.1) = .98$$

$$y_2 = y_1 + f_1 \cdot h = .98 + (9.8 - (0.2)(.98))(0.1) \approx 1.94$$

$$y_3 = y_2 + f_2 \cdot h = 1.94 + (9.8 - (0.2)(1.94))(0.1) \approx 2.88$$

$$y_4 = y_3 + f_3 \cdot h = 2.88 + (9.8 - (0.2)(2.88))(0.1) \approx 3.80$$



Exemplo 1: Solução Exata (2 de 3)

- Podemos achar a solução exata :

$$y' = 9.8 - 0.2y, \quad y(0) = 0$$

$$y' = -0.2(y - 49)$$

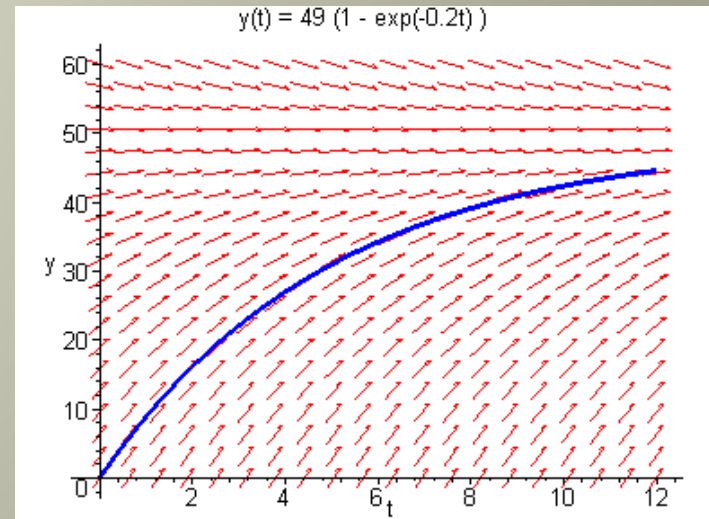
$$\frac{dy}{y - 49} = -0.2dt$$

$$\ln|y - 49| = -0.2t + C$$

$$y = 49 + ke^{-0.2t}, \quad k = \pm e^C$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow k = -49$$

$$\Rightarrow y = 49(1 - e^{-0.2t})$$

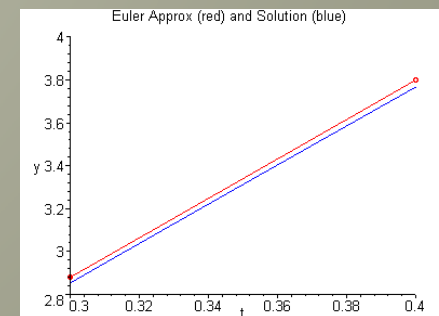
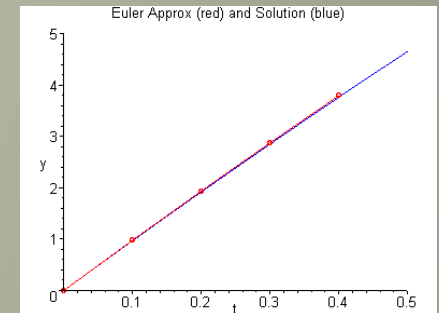


Exemplo 1: Análise do erro (3 de 3)

- Analisando a tabela embaixo, observamos que os erros são pequenos. Os erros de arredondamento são pequenos e a solução exata é aproximadamente linear em $[0, 0.4]$.

$$\text{Erro relativo Porcentual} = \frac{y_{exato} - y_{aprox}}{y_{exato}} \times 100$$

t	Exact y	Approx y	Error	% Rel Error
0.00	0	0.00	0.00	0.00
0.10	0.97	0.98	-0.01	-1.03
0.20	1.92	1.94	-0.02	-1.04
0.30	2.85	2.88	-0.03	-1.05
0.40	3.77	3.8	-0.03	-0.80



Exemplo 2: Método de Euler (1 de 3)

- Para o PVI

$$y' = 4 - t + 2y, \quad y(0) = 1$$

podemos usar o Método de Euler com $h = 0.1$ para aproximar a solução em $t = 1, 2, 3$, e 4 .

$$y_1 = y_0 + f_0 \cdot h = 1 + (4 - 0 + (2)(1))(0.1) = 1.6$$

$$y_2 = y_1 + f_1 \cdot h = 1.6 + (4 - 0.1 + (2)(1.6))(0.1) = 2.31$$

$$y_3 = y_2 + f_2 \cdot h = 2.31 + (4 - 0.2 + (2)(2.31))(0.1) \approx 3.15$$

$$y_4 = y_3 + f_3 \cdot h = 3.15 + (4 - 0.3 + (2)(3.15))(0.1) \approx 4.15$$

⋮

- Solução exata:

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{11}{4}e^{2t}$$

Exemplo 2: Análise do erro (2 de 3)

- As primeiras dez aproximações de Euler são mostradas na tabela embaixo.
- Os erro são pequenos no início, depois são catrastróficos, o que sugere uma solução não linear.

t	Exato y	Aprox y	Erro	% Rel Error
0,00	1,00	1,00	0,00	0,00
0,10	1,66	1,60	0,06	3,55
0,20	2,45	2,31	0,14	5,81
0,30	3,41	3,15	0,26	7,59
0,40	4,57	4,15	0,42	9,14
0,50	5,98	5,34	0,63	10,58
0,60	7,68	6,76	0,92	11,96
0,70	9,75	8,45	1,30	13,31
0,80	12,27	10,47	1,80	14,64
0,90	15,34	12,89	2,45	15,96
1,00	19,07	15,78	3,29	17,27

t	Exato y	Aprox y	Erro	% Erro Rel
0,00	1,00	1,00	0,00	0,00
1,00	19,07	15,78	3,29	17,27
2,00	149,39	104,68	44,72	29,93
3,00	1109,18	652,53	456,64	41,17
4,00	8197,88	4042,12	4155,76	50,69

Solução exata:

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{11}{4}e^{2t}$$

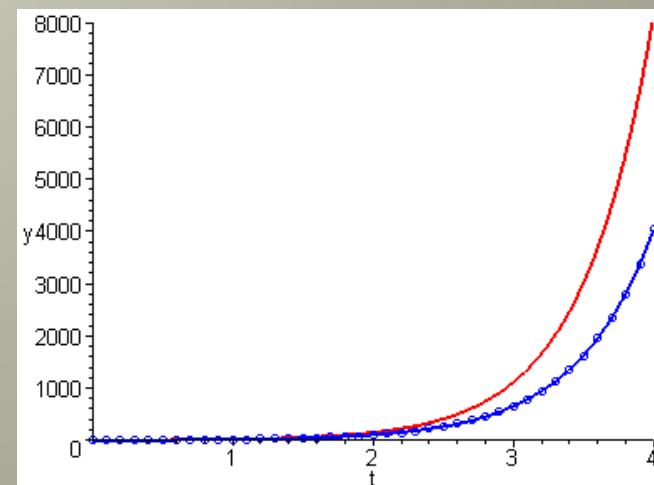
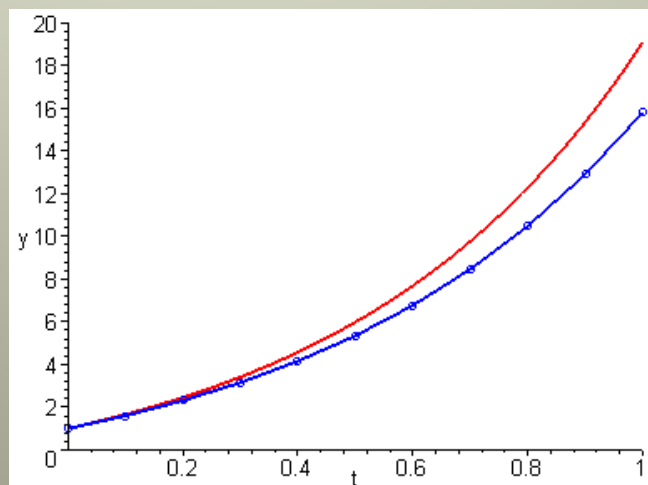
Exemplo 2: Análise do erro & Graficos (3 de 3)

- Os gráficos mostram a solução exata (vermelho) e a aproximada de Euler (azul).

t	Exata y	Aprox y	Erro	% Erro rel
0,00	1,00	1,00	0,00	0,00
1,00	19,07	15,78	3,29	17,27
2,00	149,39	104,68	44,72	29,93
3,00	1109,18	652,53	456,64	41,17
4,00	8197,88	4042,12	4155,76	50,69

Solução exata:

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{11}{4}e^{2t}$$



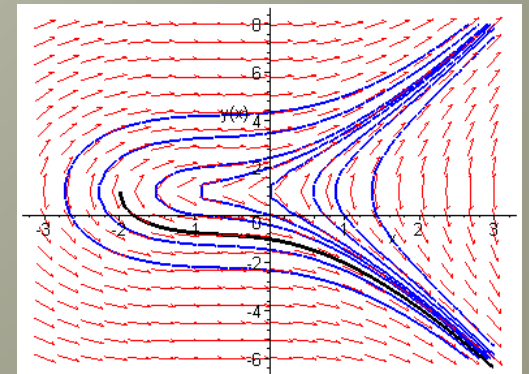
Análise do erro (1 de 4)

- Se f e $\partial f/\partial y$ são contínuas, então o PVI

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

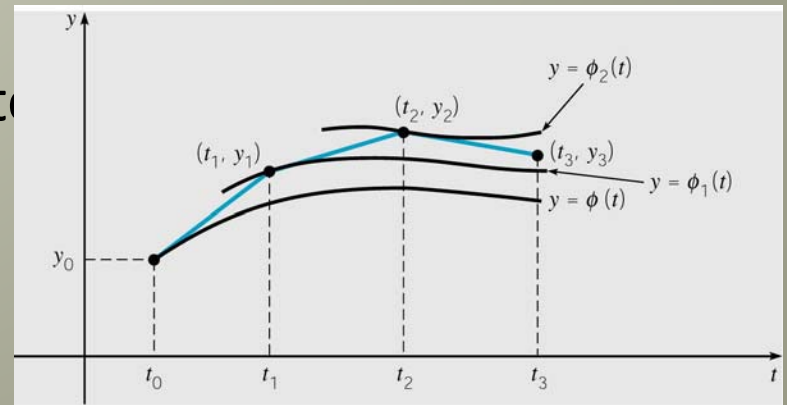
possui uma solução $y = \phi(t)$ em uma vizinhança de t_0 .

- ϕ é o membro de uma família uni-paramétrica de soluções que satisfaz $\phi(t_0) = y_0$.



Análise do erro (2 de 4)

- A primeira etapa de Euler usa a reta tangente de ϕ no ponto (t_0, y_0) para aproximar $\phi(t_1)$ que chamamos y_1 .
- O ponto (t_1, y_1) não pertence ao gráfico de ϕ , desde que y_1 é uma aproximação de $\phi(t_1)$.
- Na iteração seguinte o método de Euler não usa a reta tangente de ϕ , senão uma curva próxima ϕ_1 que passa pelo ponto (t_1, y_1) .
- Assim o método de Euler usa uma sequência de retas tangentes de uma sequência de soluções $\phi, \phi_1, \phi_2, \dots$ da equação diferencial

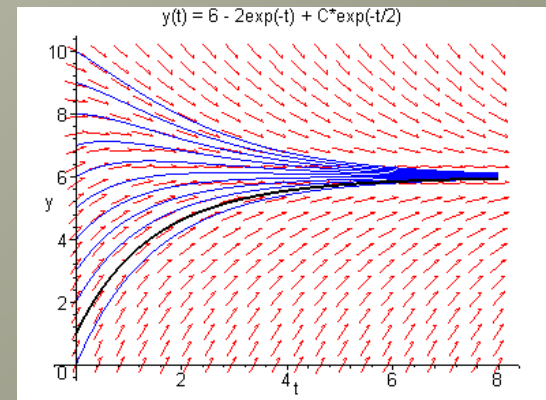


Exemplo do análise do erro: Familia convergente (3 de 4)

- Desde que o Método de Euler usa as retas tangentes de uma sequência de diferentes soluções, a exatidão depende após vários passos do comportamento da solução em (t_n, y_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$. Consideremos o seguinte PVI

$$y' = 3 + e^{-t} - y/2, \quad y(0) = 1 \Rightarrow y = \phi(t) = 6 - 2e^{-t} - 3e^{-t/2}$$

- Observemos o gráfico embaixo; não interessa quais soluções estamos aproximando com retas tangentes desde que todas as soluções ficam próximas quando t aumenta.



Exemplo do análise do erro: Familia divergente (4 de 4)

- Consideremos agora:

$$y' = 4 - t + 2y, \quad y(0) = 1 \Rightarrow y = -7/4 + t/2 + 11e^{2t}/4$$

- A família de curvas solução são divergentes. A cada passo do método de Euler as retas tangentes seguem uma solução diferente ao passo anterior, de tal forma que as aproximações se afastam cada vez mais na medida que t cresce.

