Capítulo 3.1: Equações Lineares homogêneas de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

- A forma geral de uma EDO de segunda ordem é

$$y'' = f(t, y, y')$$

sendo *f* uma função dada.

- É linear se *f* for linear em *y* e *y*´, isto é pode ser escrita na forma:

$$y'' = g(t) - p(t)y' - q(t)y$$

- Que com freqüência aparece como

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t)$$

- se G(*t*) = 0 para todo *t*, então a equação é chamada **homogênea.**

Equações homogêneas com valores iniciais

- Na seções 3.6 e 3.7, veremos que uma vez que temos a solução para a equação homogênea, então é possível resolver a não homogênea, o pelo menos expressar a solução em termos de uma integral.
- O assunto deste capítulo é a equação homogênea e em particular com coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- As condições inicias têm a forma

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

- Assim a solução passa por (t_0, y_0), e declividade da solução em (t_0, y_0) onde a declividade é y_0'.

Exemplo 1: Infinitas soluções (1 de 3)

- Considere a equação

$$y'' - y = 0$$

- Temos duas soluções para esta equação

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{-t}$$

- também

$$y_3(t) = 3e^t, \quad y_4(t) = 5e^{-t}, \quad y_5(t) = 3e^t + 5e^{-t}$$

- Concluímos que temos infinitas soluções da forma

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- Mostraremos que todas as soluções desta equações diferencial pode ser escritas desta forma.

Exemplo 1: condições iniciais (2 de 3)

- Consideremos agora as seguintes condições iniciais:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 1$$

- Usando a solução geral

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- E usando as condições iniciais,

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 3 \\ y'(0) &= c_1 - c_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = 1$$

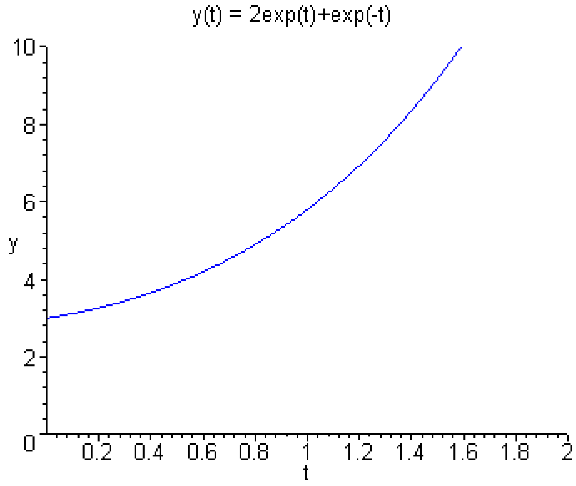
- Temos

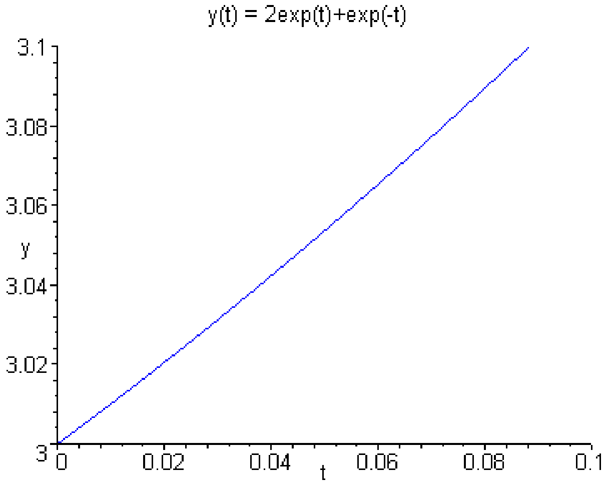
$$y(t) = 2e^t + e^{-t}$$

Exemplo 1: Gráficos (3 de 3)

- O nosso problema com valores iniciais é

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 1 \ \Rightarrow \ y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$$





A equação característica

- Para resolver a EDO com coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

assumimos que tem uma solução da forma $y = e^{rt}$.

- Substituindo na equação diferencial obtemos

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

- Simplificando,

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

e assim

$$ar^2 + br + c = 0$$

- Esta última equação é chamada de **equação característica.**
- Resolvendo para r.

Solução geral

- A equação
$$ar^2 + br + c = 0,$$
tem duas soluções, r_1 e r_2.
- E temos diferentes resultados:
  - As raízes r_1, r_2 são reais e $r_1 \neq r_2$.
  - As raízes r_1, r_2 são reais e $r_1 = r_2$.
  - As raízes r_1, r_2 são complexas.

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Assumimos que r_1, r_2 são reais e $r_1 \neq r_2$.
- Neste caso a solução geral tem a forma
$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Condições iniciais

- Para o problema com valores iniciais
$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0',$$
Temos a solução geral
$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$
e considerando os dados iniciais achamos c_1 e c_2. Isto é,
$$\left.\begin{aligned} c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} &= y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} &= y_0' \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \; c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}$$
- Desde que assumimos que $r_1 \neq r_2$, concluímos que sempre existirá uma solução da forma $y = e^{rt}$ para qualquer conjunto de condições iniciais.

Exemplo 2

- Considere o problema com valores iniciais

$$y'' + y' - 12y = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

- Obtemos a equação característica:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + r - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r+4)(r-3) = 0$$

- Cujas raízes são, r_1 = -4 e r_2 = 3
- A solução geral é

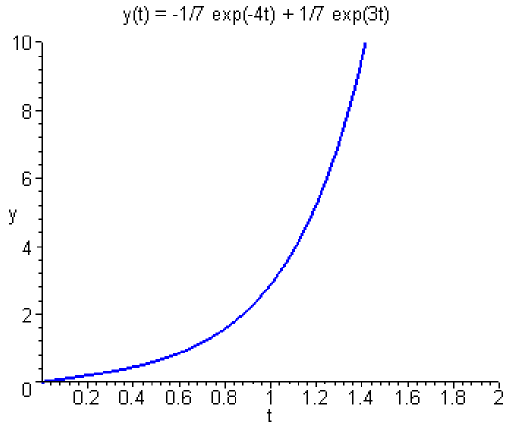
$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$$

- E usando os dados iniciais temos

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -4c_1 + 3c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{-1}{7},\; c_2 = \frac{1}{7}$$

- logo

$$y(t) = \frac{-1}{7} e^{-4t} + \frac{1}{7} e^{3t}$$



Exemplo 3

- Considere o problema com valores iniciais

$$2y'' + 3y' = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 3$$

- Assim temos

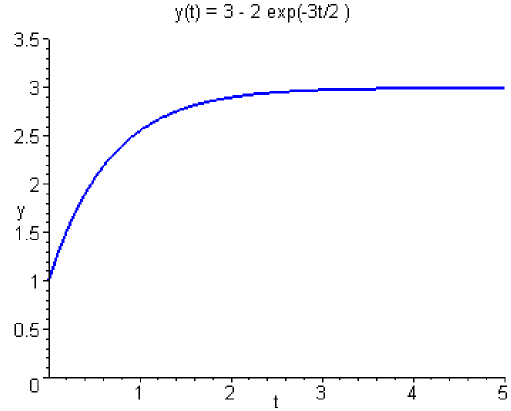
$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad 2r^2 + 3r = 0 \;\Leftrightarrow\; r\left(2r + 3\right) = 0$$

- com $r_1 = 0$ e $r_2 = -3/2$
- A solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-3t/2} = c_1 + c_2 e^{-3t/2}$$

- E usando as condições iniciais

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ -\frac{3c_2}{2} &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 3, \; c_2 = -2$$



- E finalmente

$$y(t) = 3 - 2e^{-3t/2}$$

Exemplo 4: Problema com valor inicial (1 de 2)

- Considere o problema com valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 3$$

- Temos

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow (r+2)(r+3) = 0$$

- com $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$
- A solução geral

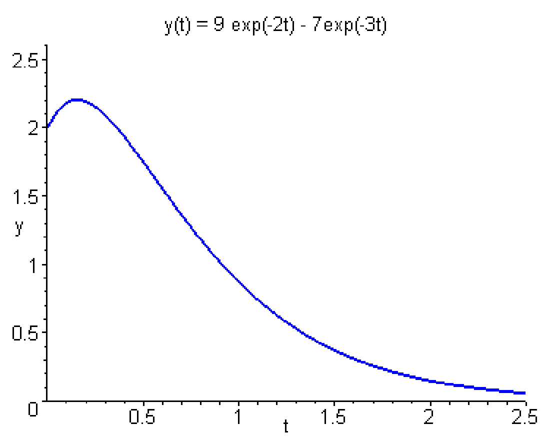
$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

- E usando as condições iniciais

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 9, \; c_2 = -7$$

- logo

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$



Exemplo 4: Achar o máximo (2 de 2)

- Achar o máximo de:

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

$$y'(t) = -18e^{-2t} + 21e^{-3t} \overset{set}{=} 0$$

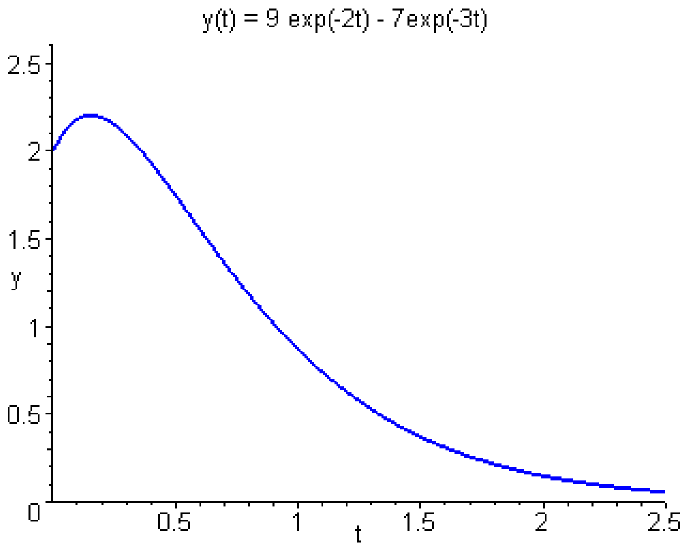
$$6e^{-2t} = 7e^{-3t}$$

$$e^{t} = 7/6$$

$$t = \ln(7/6)$$

$$t \approx 0.1542$$

$$y \approx 2.204$$



Seção 3.2: Soluções fundamentais da equação homogênea

- Sejam *p*, *q* funções continuas no intervalo $I = (\alpha, \beta)$. Para qualquer função *y* duas vezes diferenciável em *I*, definimos o operador diferencial *L* como

$$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y$$

- Note que *L*[*y*] é uma função definida em *I*, que toma valores

$$L[y](t) = y''(t) + p(t)\,y'(t) + q(t)\,y(t)$$

- Por exemplo,

$$p(t) = t^2,\ q(t) = e^{2t},\ y(t) = \sin(t),\ \ I = (0, 2\pi)$$

$$L[y](t) = -\sin(t) + t^2 \cos(t) + 2e^{2t} \sin(t)$$

Notação usando o operador diferencial

- Estudaremos a equação homogênea de segunda ordem

$L[y](t) = 0$, sujeita as condições iniciais:

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$
$$y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y_1$$

- Gostaríamos saber se existem soluções para este problema com valores iniciais e, em caso afirmativo, se essas soluções são únicas.
- Além disso, estaremos interessados em descobrir alguma propriedade sobre a forma e estrutura das soluções que poderia ajudarmos para resolver diferentes tipos se problemas.

Teorema 3.2.1

- Considere o problema com valores iniciais

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t)$$
$$y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y_0'$$

- Onde *p*, *q*, e *g* são continuas em um intervalo aberto *I* que contem o t_0. Então existe uma única solução $y = \phi(t)$ em *I*.

- Note: Entanto esse teorema diz que uma solução para o problema do valor inicial existe, com freqüência não é possível escrever uma expressão adequada para a solução. Essa é a maio diferença entre equações de primeira e segunda ordem.

Exemplo 1

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t)$$
$$y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y_1$$

- Considere o problema linear com valores iniciais de segunda ordem $y'' - y = 0,\; y(0) = 3,\; y'(0) = 1$
- Cuja solução é:

$$y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$$

- Note que $p(t) = 0$, $q(t) = -1$, $g(t) = 0$ são continuas em $(-\infty, \infty)$, e que a solução y está definida e é duas vezes diferenciável em $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 2

- Considere o problema linear de segunda ordem com valores iniciais

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

onde p, q são continuas no intervalo aberto I contendo t_0.

- Levando em consideração as condições iniciais $y = 0$ é uma solução do problema.
- Desde que as hipóteses do teorema são satisfeitas concluímos que $y = 0$ é a única solução do problema.

Exemplo 3

- Determine o maior intervalo no qual o problema com valores iniciais possui uma única solução duas vezes diferenciável. Sem achar a solução.

$$(t+1)y'' - (\cos t)y' + 3y = 1, \; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$$

- Re-escrevemos a solução na forma padrão:

$$y'' - \frac{\cos t}{t+1} y' + \frac{3}{t+1} y = \frac{1}{t+1}, \; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$$

- O maior intervalo que contem o ponto $t = 0$ no qual os coeficientes da equação são contínuos é (-1, ∞).
- Assim o maior intervalo é (-1, ∞).

Teorema 3.2.2 Princípio de Superposição

- Se y_1e y_2 são soluções da equação

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

então a combinação linear $c_1y_1 + y_2c_2$ também é solução, para qualquer par de constantes c_1 e c_2.

- Para provar o teorema simplesmente substituímos $c_1y_1 + y_2c_2$ no lugar de y na equação acima, e usarmos o fato de que y_1 e y_2 são soluções.
- Assim para quaisquer duas soluções y_1 e y_2, podemos construir uma família infinita de soluções da forma

$y = c_1y_1 + c_2\,y_2$.

- Todas as soluções podem ser escritas desta forma ? Ou ainda podemos ter uma outra solução de uma outra forma ? Para resolver esta questão usaremos o Wronskiano.

O Wronskiano (1 de 3)

- Suponhamos que y_1 e y_2 são soluções de

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

- Sabemos que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é uma solução.
- Agora achamos determinamos os coeficientes de $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ que satisfazem as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y_0'$$

- Para fazer isto precisamos resolver as seguintes equações:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= y_0' \end{aligned}$$

O Wronskiano (2 de 3)

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$
$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0'$$

- Resolvendo temo

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

$$c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

- Em termos de determinantes:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}$$

O Wronskiano (3 de 3)

- Para que estas expressões tenham validade, o denominador que chamaremos de W não pode ser zero:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$$

- W é chamado o **Wronskiano** das soluções de y_1 e y_2 que denotaremos com

$$W(y_1, y_2)(t_0)$$

Teorema 3.2.3

- Suponhamos que y_1 e y_2 são soluções de

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0 \qquad (1)$$

e que o Wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

não é nulo em t_0 onde as condições iniciais são

$$y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y_0' \qquad (2)$$

então existem constantes c_1, c_2 para as quais a função

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é uma solução da equação (1) satisfazendo as condições iniciais (2).

Exemplo 4

- Considere novamente o Exemplo 1 anterior e sua solução:

$$y'' - y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1 \ \Rightarrow \ y(t) = 2e^{t} + e^{-t}$$

- Note que as duas funções a seguir são soluções da equação diferencial:

$$y_1 = e^{t}, y_2 = e^{-t}$$

- o Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -e^{t}e^{-t} - e^{t}e^{-t} = -2e^{0} = -2$$

- Desde que $W \neq 0$ para todo t, uma solução pode ser obtida como combinação linear de y_1 e y_2 para qualquer t_0.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Teorema (Solução Fundamental)

- Supor que y_1 e y_2 são soluções de

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0.$$

  se há um ponto t_0 tal que $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$, então a família de soluções $y = c_1y_1 + c_2 y_2$ com coeficientes arbitrários c_1, c_2 incluem todas as soluções da equação diferencial.

- A expressão $y = c_1y_1 + c_2 y_2$ é chamada a **solução geral** da equação diferencial e neste caso dizemos que y_1 e y_2 formam o **conjunto fundamental de soluções** para a equação diferencial.

Exemplo 5

- Consideremos a equação abaixo e a suas soluções :

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$$

- o Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2e^0 = -2 \neq 0 \text{ para todo } t.$$

- Então y_1 e y_2 formam o conjunto fundamental de soluções e pode ser usado para obter todas as soluções da equação diferencial.
- A solução geral é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Exemplo 6

- Considere a equação junto com as suas soluções:

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

- Suponha que as funções abaixo sejam as soluções :

$$y_1 = e^{r_1 t},\, y_2 = e^{r_2 t}, \quad r_1 \neq r_2$$

- o Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = \left(r_2 - r_1\right) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0 \;\; \text{para todo } t.$$

- Assim y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.
- A solução geral é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Exemplo 7: Soluções (1 de 2)

- Considere a equação seguinte:

$$2t^2 y'' + 3t\,y' - y = 0,\ \ t > 0$$

- Mostre que as seguintes funções são as soluções fundamentais:

$$y_1 = t^{1/2}, y_2 = t^{-1}$$

- Primeiro substituímos y_1 na equação:

$$2t^2\left(\frac{-t^{-3/2}}{4}\right) + 3t\left(\frac{t^{-1/2}}{2}\right) - t^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)t^{1/2} = 0$$

- y_1 satisfaz a equação diferencial. Analogamente para y_2:

$$2t^2\left(2t^{-3}\right) + 3t\left(-t^{-2}\right) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0$$

Exemplo 7: Solução Fundamental (2 de 2)

- Temos que

$$y_1 = t^{1/2}, y_2 = t^{-1}$$

- Para mostrar que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental, calculamos o Wronskiano de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{-3/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2\sqrt{t^3}}$$

- Já que $W \neq 0$ para $t > 0$, y_1, y_2 formam um conjunto fundamental para

$$2t^2 y'' + 3t\, y' - y = 0, \;\; t > 0$$

Teorema: Existência do conjunto fundamental de soluções

- Considere a equação diferencial a seguir, onde p e q são continuas em um intervalo aberto I:

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

- seja t_0 um ponto em I, e y_1 e y_2 soluções da equação com y_1 satisfazendo as condições iniciais

$$y_1(t_0) = 1,\ y_1'(t_0) = 0$$

  e y_2 satisfazendo as condições iniciais

$$y_2(t_0) = 0,\ y_2'(t_0) = 1$$

- então y_1, y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

Exemplo 7: Teorema 3.2.5 (1 de 3)

- Ache o conjunto fundamental de acordo ao teorema anterior para a equação seguinte e a condição inicial dada

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

- Mostramos que

$$y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$$

formam um conjunto fundamental de soluções, desde que $W(y_1, y_2)(t_0) = -2 \neq 0$.

- Porém estas condições não satisfazem as condições iniciais requeridas pelo teorema e então não formam um conjunto fundamental. Sejam y_3 e y_4 soluções fundamentais tais que:

$$y_3(0) = 1, \; y_3'(0) = 0; \quad y_4(0) = 0, \; y_4'(0) = 1$$

Exemplo 7: Solução General (2 de 3)

- Já que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental,

$$y_3 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad y_3(0) = 1, y_3'(0) = 0$$

$$y_4 = d_1 e^t + d_2 e^{-t}, \quad y_4(0) = 0, y_4'(0) = 1$$

- Resolvendo cada equação obtemos

$$y_3(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh(t), \quad y_4(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \sinh(t)$$

- o Wronskiano de y_3 e y_4 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \neq 0$$

- Assim y_3, y_4 formam o conjunto fundamental cuja solução geral é

$$y(t) = k_1 \cosh(t) + k_2 \sinh(t)$$

Exemplo 7:
Conjuntos fundamentais (3 de 3)

- então

$$S_1 = \left\{e^t, e^{-t}\right\}, \quad S_2 = \left\{\cosh t, \sinh t\right\}$$

  ambos conjuntos formam um conjunto fundamental para a equação diferencial e ponto inicial

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

- Em geral, uma equação diferencial terá infinitas diferentes conjuntos fundamentais de soluções. Usualmente será escolhida a forma mais conveniente.

Resumo

- Para achar a solução geral da equação diferencial

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0, \;\; \alpha < t < \beta$$

  primeiramente determinamos duas soluções y_1 e y_2.
- Então garantimos que há um ponto t_0 que está no intervalo tal que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$.
- Concluímos que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental da equação cuja solução geral é $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.
- Se as condições iniciais estão dadas no ponto t_0 aonde $W \neq 0$, então c_1 e c_2 podem ser determinadas para satisfazer as condições.

Seção 3.3: Independência linear e o Wronskiano

- Duas funções *f* e *g* formam um conjunto **linearmente dependente (LD)** se existem constantes c_1 e c_2, não nulas, tais que
$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$
para todo *t* em *I*. Note que isto é equivalente a dizer que *f* e *g* são múltiplas uma de outra.
- Se a única solução para esta equação fosse $c_1 = c_2 = 0$, então *f* e *g* são **linearmente independentes (LI)**.
- Por exemplo, seja $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \sin x \cos x$, a equação definida pela combinação linear
$$c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$$
pode ser resolvida escolhendo $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, e então *f* e *g* são LD.

Soluções de sistemas de equações 2 x 2

- Quando resolvemos

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a$$
$$c_1y_1 + c_2y_2 = b$$

para c_1 e c_2, pode ser mostrado que

$$c_1 = \frac{ay_2 - bx_2}{x_1y_2 - y_1x_2} = \frac{ay_2 - bx_2}{D},$$

$$c_2 = \frac{-ay_1 + bx_1}{x_1y_2 - y_1x_2} = \frac{-ay_1 + bx_1}{D}, \quad \text{onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

- Note que se $a = b = 0$, então a única solução do sistema de equações é $c_1 = c_2 = 0$, satisfazendo $D \neq 0$.

Exemplo 1: Independência Linear (1 de 2)

- Mostrar que as funções a seguir são linearmente independentes em qualquer intervalo:

$$f(t) = e^t, \;\; g(t) = e^{-t}$$

- Sejam c_1 e c_2 escalares, e considere a combinação linear nula

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

para todo t em qualquer intervalo (α, β).

- Queremos provar que $c_1 = c_2 = 0$. Desde que a equação se satisfaz para todo t em (α, β), escolha t_0 e t_1 em (α, β), com $t_0 \neq t_1$. Então

$$c_1 e^{t_0} + c_2 e^{-t_0} = 0$$

$$c_1 e^{t_1} + c_2 e^{-t_1} = 0$$

Exemplo 1: Independência Linear (2 de 2)

- A solução do sistema

$$c_1 e^{t_0} + c_2 e^{-t_0} = 0$$

$$c_1 e^{t_1} + c_2 e^{-t_1} = 0$$

será $c_1 = c_2 = 0$, garantindo que o determinante *D* é não nulo:

$$D = \begin{vmatrix} e^{t_0} & e^{-t_0} \\ e^{t_1} & e^{-t_1} \end{vmatrix} = e^{t_0} e^{-t_1} - e^{-t_0} e^{t_1} = e^{t_0 - t_1} - e^{t_1 - t_0}$$

- logo

$$D = 0 \iff e^{t_0 - t_1} = e^{t_1 - t_0} \iff e^{t_0 - t_1} = \frac{1}{e^{t_0 - t_1}} \iff \left(e^{t_0 - t_1}\right)^2 = 1$$

$$\iff e^{t_0 - t_1} = 1 \iff t_0 = t_1$$

- Já que $t_0 \neq t_1$, concluimos que $D \neq 0$, e então *f* e *g* são LI.

Teorema

- Se f e g são diferenciáveis em um intervalo aberto I e se $W(f, g)(t_0) \neq 0$ para um ponto t_0 em I, então f e g são LI em I. Além disso se f e g são LD em I, então $W(f, g)(t) = 0$ para todo t em I.

- Prova: sejam c_1 e c_2 escalares, e supor que

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

- Para todo t em I. Em particular, quando $t = t_0$ temos

$$c_1 f(t_0) + c_2 g(t_0) = 0$$
$$c_1 f'(t_0) + c_2 g'(t_0) = 0$$

- Já que $W(f, g)(t_0) \neq 0$, se segue que $c_1 = c_2 = 0$, e então f e g são linearmente independentes.

Teorema 3.3.2 (Abel)

- Suponha que y_1 e y_2 são soluções de
$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$
onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I. Então $W(y_1,y_2)(t)$ está dado por
$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt}$$
onde c é uma constante que depende de y_1 e y_2 porém não de t.

- Note que $W(y_1,y_2)(t)$ ou é zero para todo t em I (se $c = 0$) ou então nunca é zero em I (se $c \neq 0$).

Exemplo 2: Wronskiano e o Teorema de Abel

- Consideremos a seguinte equação e suas duas soluções:

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$$

- o Wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2e^0 = -2 \neq 0 \;\; \text{para todo } t.$$

- então y_1 e y_2 são linearmente independentes em qualquer intervalo I, pelo Teorema 3.3.1. Agora comparemos W com o Teorema de Abel:

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 0 dt} = c$$

- Com c = -2, obtemos o mesmo W como antes.

Teorema

- Supor que y_1 e y_2 são soluções da equação abaixo, cujos coeficientes p e q são contínuos em um intervalo aberto I:

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

Então y_1 e y_2 são linearmente dependentes em I se e somente se $W(y_1, y_2)(t) = 0$ para todo t em I. Também, y_1 e y_2 são linearmente independentes em I se e somente se $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ para todo t em I.

Resumo

- Sejam y_1 e y_2 soluções de
$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$
onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I.
- Então as seguintes afirmações são equivalentes:
  - As funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções em I.
  - As funções y_1 e y_2 são linearmente independentes em I.
  - $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$ para algum t_0 em I.
  - $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ para todo t em I.

Uma observação sobre a Álgebra Linear

- Seja V o conjunto

$$V = \{y : y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0,\ t \in (\alpha, \beta)\}$$

  então V é um espaço vetorial de dimensão dois, cujas bases estão dadas por qualquer conjunto fundamental de soluções y_1 e y_2.

- Por exemplo, o espaço solução para a equação diferencial

$$y'' - y = 0$$

  tem como bases $S_1 = \{ e^t, e^{-t} \},\quad S_2 = \{ \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t \}$

  com $V = \operatorname{Span} S_1 = \operatorname{Span} S_2$

Seção 3.4:
Raízes complexas da equação característica

- Continuamos estudando as soluções de

$$ay'' + by' + cy = 0$$

onde a, b e c são constantes.

- Assumindo que a equação é do tipo exponencial:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- As raízes são, r_1 & r_2:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- se $b^2 - 4ac < 0$, temos raízes complexas:

$$r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu$$

- assim

$$y_1(t) = e^{(\lambda + i\mu)t}, \quad y_2(t) = e^{(\lambda - i\mu)t}$$

Fórmula de Euler

- Substituindo *it* ina série de Taylor para e*ᵗ*, temos a **Fórmula de Euler:**

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}=\cos t+i\sin t$$

- Generalizando, obtemos

$$e^{i\mu t}=\cos\mu t+i\sin\mu t$$

- logo

$$e^{(\lambda+i\mu)t}=e^{\lambda t}e^{i\mu t}=e^{\lambda t}\left[\cos\mu t+i\sin\mu t\right]=e^{\lambda t}\cos\mu t+ie^{\lambda t}\sin\mu t$$

- assim

$$y_1(t)=e^{(\lambda+i\mu)t}=e^{\lambda t}\cos\mu t+ie^{\lambda t}\sin\mu t$$

$$y_2(t)=e^{(\lambda-i\mu)t}=e^{\lambda t}\cos\mu t-ie^{\lambda t}\sin\mu t$$

Soluções reais

- Ambas funções são complexas :

$$y_1(t) = e^{\lambda t}\cos \mu t + i e^{\lambda t}\sin \mu t$$

$$y_2(t) = e^{\lambda t}\cos \mu t - i e^{\lambda t}\sin \mu t$$

- Deveríamos conseguir soluções reais desde que os coeficientes da equação diferencial são reais. Já que combinação linear de soluções também é solução:

$$y_1(t) + y_2(t) = 2e^{\lambda t}\cos \mu t$$

$$y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{\lambda t}\sin \mu t$$

- Desconsiderando as constantes, podemos resgatar duas soluções reais

$$y_3(t) = e^{\lambda t}\cos \mu t, \;\; y_4(t) = e^{\lambda t}\sin \mu t$$

As soluções reais e o Wronskiano

- Então temos as seguintes soluções reais:

$$y_3(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t,\ \ y_4(t) = e^{\lambda t}\sin\mu t$$

- cujo Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda t}\cos\mu t & e^{\lambda t}\sin\mu t \\ e^{\lambda t}\left(\lambda\cos\mu t - \mu\sin\mu t\right) & e^{\lambda t}\left(\lambda\sin\mu t + \mu\cos\mu t\right) \end{vmatrix}$$

$$= \mu e^{2\lambda t} \neq 0$$

- Assim y_3 e y_4 forma um conjunto fundamental de soluções com solução geral

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos\mu t + c_2 e^{\lambda t}\sin\mu t$$

Exemplo 1

- Considere a equação

$$y'' + y' + y = 0$$

- logo

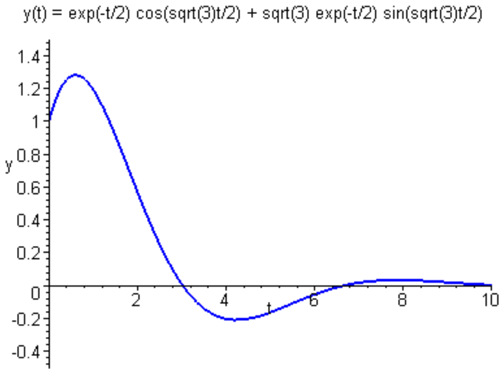
$$y(t) = e^{rt} \;\Rightarrow\; r^2 + r + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

- e

$$\lambda = -1/2, \; \mu = \sqrt{3}/2$$

cuja solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} \cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + c_2 e^{-t/2} \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$



Exemplo 2

- Considere a equação

$$y'' + 4y = 0$$

- logo

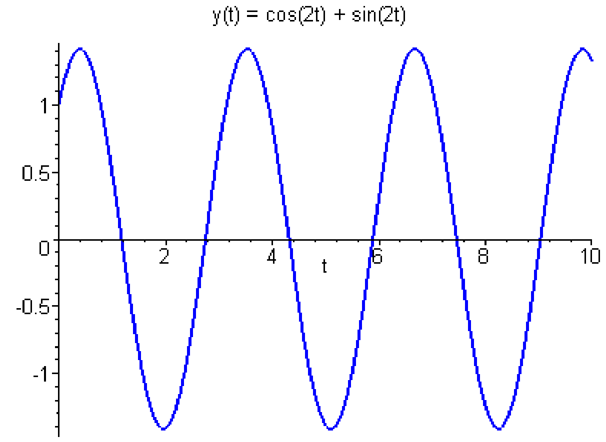
$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$$

- então

$$\lambda = 0,\ \mu = 2$$

cuja solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$



Exemplo 4

- Considere a equação

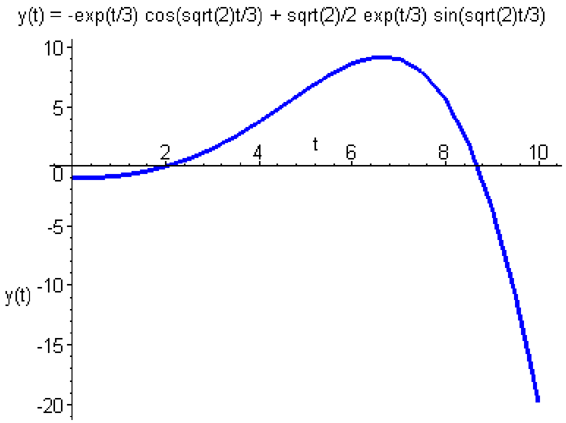
$$3y'' - 2y' + y = 0$$

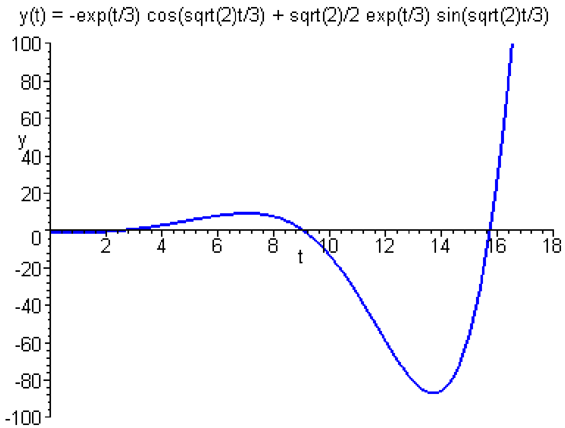
- com

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow 3r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i$$

- Cuja solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{t/3} \cos\left(\sqrt{2}t/3\right) + c_2 e^{t/3} \sin\left(\sqrt{2}t/3\right)$$





Exemplo 4: Parte (a) (1 de 2)

- Para o seguinte PVI, ache (a) a solução $u(t)$ e (b) o tempo mínimo T para que $|u(t)| \leq 0.1$

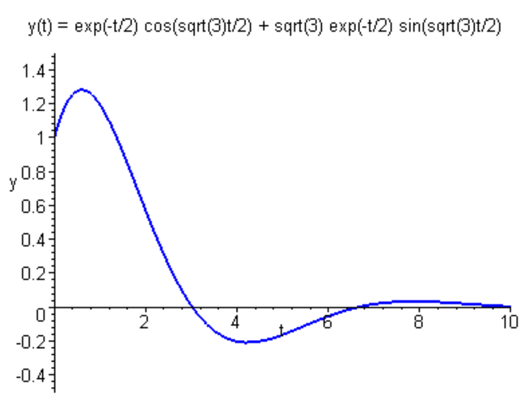
$$y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1$$

- Do Exemplo 1

$$u(t) = c_1 e^{-t/2} \cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + c_2 e^{-t/2} \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$

- Usando as condições iniciais obtemos

$$\left.\begin{array}{r} c_1 \qquad\qquad = 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 1, \; c_2 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$



- logo

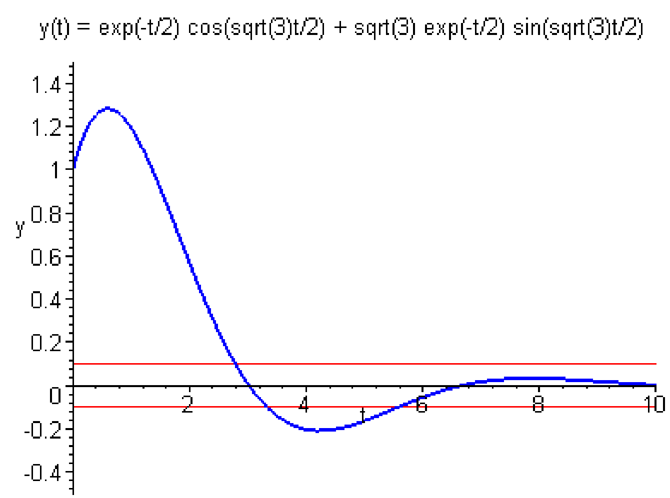
$$u(t) = e^{-t/2} \cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + \sqrt{3}\, e^{-t/2} \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$

Exemplo 4: Parte (b) (2 de 2)

- Ache o tempo mínimo T para que $|u(t)| \leq 0.1$
- A nossa solução é

$$u(t) = e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + \sqrt{3}\,e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$

- Veja o gráfico abaixo.



Seção 3.5:
Raízes repetidas; Redução de ordem

- Consideremos a EDO de 2ª ordem homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- onde *a*, *b* e *c* são constantes.
- A equação característica é:

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- Com raízes, r_1 & r_2:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- quando $b^2 - 4ac = 0$, $r_1 = r_2 = -b/2a$, o método fornece apenas uma solução:

$$y_1(t) = ce^{-bt/2a}$$

Obtendo uma segunda solução: Multiplicando por um fator $v(t)$

- Sabemos que se

$$y_1(t) \text{ é uma solução } \Rightarrow y_2(t) = c y_1(t) \text{ é solução}$$

- Já que y_1 e y_2 são LD, podemos pensar em substituir a constante c por uma função v, e então determinar condições para que y_2 seja uma solução:

$$y_1(t) = e^{-bt/2a} \quad \Rightarrow \quad \text{propomos } \; y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$$

- então

$$y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2'(t) = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2''(t) = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}$$

Achando o fator $v(t)$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- Substituindo as derivas na equação obtemos v:

$$e^{-bt/2a}\left\{a\left[v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t)\right] + b\left[v'(t) - \frac{b}{2a}v(t)\right] + cv(t)\right\} = 0$$

$$av''(t) - bv'(t) + \frac{b^2}{4a}v(t) + bv'(t) - \frac{b^2}{2a}v(t) + cv(t) = 0$$

$$av''(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(t) = 0$$

$$av''(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}\right)v(t) = 0 \iff av''(t) + \left(\frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}\right)v(t) = 0$$

$$av''(t) - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)v(t) = 0$$

$$v''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = k_3 t + k_4$$

Solução geral

- Para achar a solução geral temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 e^{-bt/2a} + k_2 v(t) e^{-bt/2a} \\ &= k_1 e^{-bt/2a} + \left(k_3 t + k_4\right) e^{-bt/2a} \\ &= c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a} \end{aligned}$$

- E finalmente

$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$

E o Wronskiano ?

- A solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$

- Assim toda solução pode ser obtida como uma combinação linear de

$$y_1(t) = e^{-bt/2a},\ y_2(t) = te^{-bt/2a}$$

- $$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & te^{-bt/2a} \\ -\dfrac{b}{2a} e^{-bt/2a} & \left(1 - \dfrac{bt}{2a}\right) e^{-bt/2a} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-bt/a}\left(1 - \frac{bt}{2a}\right) + e^{-bt/a}\left(\frac{bt}{2a}\right)$$

$$= e^{-bt/a} \neq 0 \quad \text{para todo } t$$

Exemplo 1

- Considere o PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$$

- Que leva a escrever a solução geral como

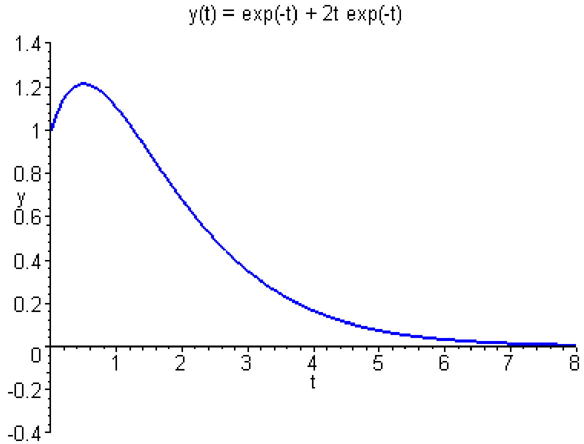
$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

- Usando as condições iniciais

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 1 \\ -c_1 + c_2 & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 2$$

- logo

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$$



Exemplo 2

- Considere o PVI

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/2$$

$$y(t) = e^{rt} \;\Rightarrow\; r^2 - r + 0.25 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r - 1/2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; r = 1/2$$

- Com solução geral

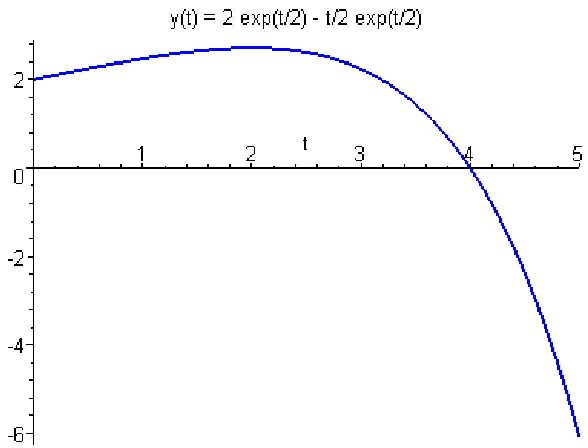
$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}$$

- Para satisfazer as condições iniciais:

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 2,\; c_2 = -\frac{1}{2}$$

- logo

$$y(t) = 2e^{t/2} - \frac{1}{2}te^{t/2}$$



Exemplo 3

- Considere o PVI

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3/2$$

$$y(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad r^2 - r + 0.25 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r - 1/2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow r = 1/2$$

- Solução geral

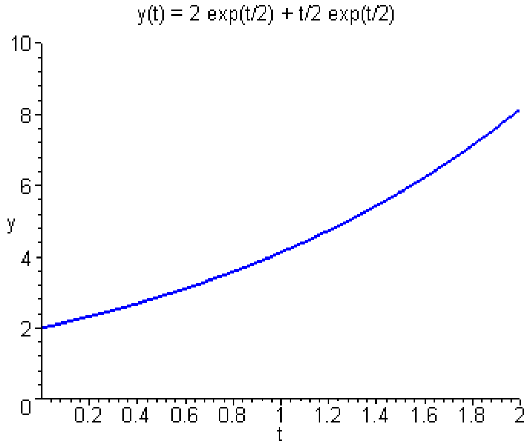
$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}$$

- Usando as condições iniciais

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 & = & \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = \frac{1}{2}$$

- logo

$$y(t) = 2e^{t/2} + \frac{1}{2} t e^{t/2}$$



Redução de ordem

- O método usado pode ser usado para equações com coeficientes não constantes:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- se y_1 é solução propomos como segunda solução $y_2 = v(t)y_1$:

$$y_2(t) = v(t)y_1(t)$$
$$y_2'(t) = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$
$$y_2''(t) = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t)$$

- Substituindo na EDO e remanejando,

$$y_1v'' + \left(2y_1' + py_1\right)v' + \left(y_1'' + py_1' + qy_1\right)v = 0$$

- se y_1 é solução, temos uma equação de primeira ordem em v'

$$y_1v'' + \left(2y_1' + py_1\right)v' = 0$$

Exemplo 4: (1 de 3)

- Dada a equação e uma solução y_1,

$$t^2 y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1},$$

usamos redução de ordem para achar a segunda solução:

$$y_2(t) = v(t)\, t^{-1}$$

$$y_2'(t) = v'(t)\, t^{-1} - v(t)\, t^{-2}$$

$$y_2''(t) = v''(t)\, t^{-1} - 2v'(t)\, t^{-2} + 2v(t)\, t^{-3}$$

- Substituindo e remanejando,

$$t^2\left(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}\right) + 3t\left(v't^{-1} - vt^{-2}\right) + vt^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow v''t - 2v' + 2vt^{-1} + 3v' - 3vt^{-1} + vt^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; tv'' + v' = 0$$

$$\Leftrightarrow \; tu' + u = 0, \text{ onde } u(t) = v'(t)$$

Exemplo 4: achando $v(t)$ (2 de 3)

- Para resolver

$$tu' + u = 0, \quad u(t) = v'(t)$$

para u, usamos separação de variáveis:

$$t\frac{du}{dt} + u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{t}dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| = -\ln|t| + C$$

$$\Leftrightarrow \quad |u| = |t|^{-1}e^{C} \quad \Leftrightarrow \quad u = ct^{-1}, \quad \text{since } t > 0.$$

- logo

$$v' = \frac{c}{t}$$

e então

$$v(t) = c\ln t + k$$

Exemplo 4: solução geral (3 de 3)

- Temos

$$v(t) = c \ln t + k$$

- então

$$y_2(t) = (c \ln t + k) t^{-1} = c t^{-1} \ln t + k t^{-1}$$

- Lembrando que

$$y_1(t) = t^{-1}$$

podemos desprezar o segundo termo de y_2 para obter

$$y_2(t) = t^{-1} \ln t.$$

- E obtemos a expressão geral da solução

$$y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1} \ln t$$

Seção 3.6: Equação não homogênea; Método dos coeficientes indeterminados

- Seja a equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

onde *p*, *q*, *g* são contínuas em um intervalo aberto *I*.

- A equação homogênea associada é

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- Desenvolveremos o método dos coeficientes indeterminados que no seu primeiro estágio precisa resolver a equação homogênea.

Teorema

- se Y_1, Y_2 são soluções da não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

então Y_1 - Y_2 é solução da homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- se y_1, y_2 forma um conjunto fundamental de soluções da homogênea existem constantes c_1, c_2 tais que

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Teorema (solução geral)

- A solução geral da não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

pode ser escrita como

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$

onde y_1, y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, c_1, c_2 são constantes arbitrárias e Y é uma solução particular da não homogênea.

Método dos coeficientes indeterminados

- Seja

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

cuja solução geral é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$

- Desenvolveremos o **método dos coeficientes indeterminados** para achar a solução particular Y da não homogênea.
- O método é limitado aos casos em que p e q são constantes, e $g(t)$ é um polinômio, uma exponencial, seno ou coseno.

Exemplo 1: Exponencial *g*(*t*)

- Considere a equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

- Desde que as derivadas da exponencial se repetem propomos *Y* como:

$$Y(t) = Ae^{2t} \Rightarrow Y'(t) = 2Ae^{2t},\ Y''(t) = 4Ae^{2t}$$

- Substituindo,

$$4Ae^{2t} - 6Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow \quad -6Ae^{2t} = 3e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad A = -1/2$$

- Assim temos uma solução particular como

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$$

Exemplo 2: Seno (2 de 2)

- Tentamos para Y uma função do tipo

$$Y(t) = A\sin t + B\cos t$$

$$\Rightarrow Y'(t) = A\cos t - B\sin t,\ Y''(t) = -A\sin t - B\cos t$$

- Substituindo obtemos

$$\left(-A\sin t - B\cos t\right) - 3\left(A\cos t - B\sin t\right) - 4\left(A\sin t + B\cos t\right) = 2\sin t$$

$$\Leftrightarrow\ \left(-5A + 3B\right)\sin t + \left(-3A - 5B\right)\cos t = 2\sin t$$

$$\Leftrightarrow -5A + 3B = 2,\ \ -3A - 5B = 0$$

$$\Leftrightarrow\ A = -5/17,\ \ B = 3/17$$

- Assim a solução particular é

$$Y(t) = \frac{-5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t$$

Exemplo 3: Polinômio $g(t)$

- Consideremos

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1$$

- propomos Y da forma

$$Y(t) = At^2 + Bt + C \Rightarrow Y'(t) = 2At + B,\ Y''(t) = 2A$$

- Substituindo,

$$2A - 3(2At + B) - 4\left(At^2 + Bt + C\right) = 4t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \ -4At^2 - (6A + 4B)t + \left(2A - 3B - 4C\right) = 4t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \ -4A = 4,\ 6A + 4B = 0,\ 2A - 3B - 4C = -1$$

$$\Leftrightarrow \ A = -1,\ B = 3/2,\ C = -11/8$$

- Assim a solução particualr é

$$Y(t) = -t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{11}{8}$$

Exemplo 4: Produto $g(t)$

- Considere

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t$$

- propomos:

$$Y(t) = Ae^t \cos 2t + Be^t \sin 2t$$

$$Y'(t) = Ae^t \cos 2t - 2Ae^t \sin 2t + Be^t \sin 2t + 2Be^t \cos 2t$$

$$= (A + 2B)e^t \cos 2t + (-2A + B)e^t \sin 2t$$

$$Y''(t) = (A + 2B)e^t \cos 2t - 2(A + 2B)e^t \sin 2t + (-2A + B)e^t \sin 2t$$

$$+ 2(-2A + B)e^t \cos 2t$$

$$= (-3A + 4B)e^t \cos 2t + (-4A - 3B)e^t \sin 2t$$

- Substituindo e resolvendo para *A* e *B*

$$A = \frac{10}{13},\ B = \frac{2}{13} \quad \Rightarrow Y(t) = \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sin 2t$$

Soma $g(t)$

- Considere mais uma vez

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

- Suponhamos que $g(t)$ e a soma de duas funções

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

- se Y_1, Y_2 são soluções de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t)$$

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_2(t)$$

respectivamente então $Y_1 + Y_2$ é solução da equação acima.

Exemplo 5: Soma *g*(*t*)

- Seja

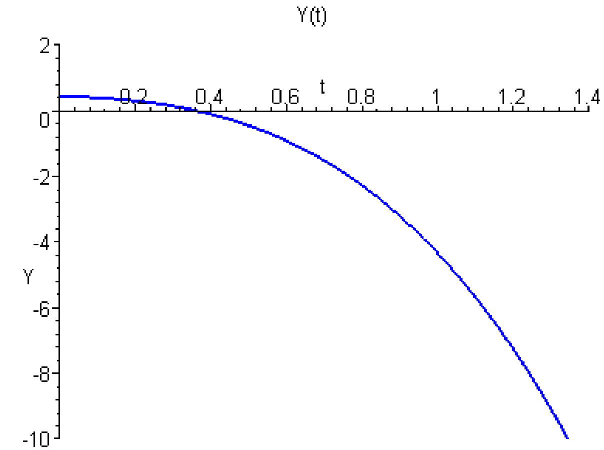
$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\sin t - 8e^{t}\cos 2t$$

- Resolvemos individualmente para cada parcela

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$$

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos 2t$$



- A solução particular é

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{10}{13}e^{t}\cos 2t + \frac{2}{13}e^{t}\sin 2t$$