Solução Numérica da Equação da Onda Amortecida através do Método das Linhas e Auto-pares de Polinômios Matriciais Quadráticos

Fermín S. V. Bazán
e-mail: fermin@mtm.ufsc.br
http://www.mtm.ufsc.br/˜fermin
CFM-UFSC

M. C. Cunha
e-mail:cunha@ime.unicamp.br
http://www.ime.unicamp.br
IME-UNICAMP

Universidade Federal de Santa Catarina

Dezembro – 2005

Modelo: $u_{tt}(x,t) + a(x)u_t(x,t) = d^2 u_{xx}(x,t) \quad ,0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0.$

$u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x),\ \ 0 \leq x \leq 1,$ (cond. inic.)

$u(0,t) = 0,\ \ u(1,t) = 0,\ \ t > 0,$ (cond. front.)

Estado da arte:

- Aspectos teóricos bem desenvolvidos
  - Para $a(x) \geq 0$, espectro do operador bem conhecido
  - Solução $u(x,t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to \infty$, etc, etc (P. Freitas, L. Roder Tch, E. Zuazua, ...)
- Nenhuma abordagem numérica usando autovalores.

Apresentamos:

- Método numérico baseado em autovalores (Método de Arnoldi)
- Mostramos que as soluçoes numéricas têm convergência assintótica
- Exemplos numéricos

Modelo: $u_{tt}(x,t) + a(x)u_t(x,t) = d^2 u_{xx}(x,t) \quad ,0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0.$

$u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x),\ \ 0 \leq x \leq 1,$ (cond. inic.)

$u(0,t) = 0,\ \ u(1,t) = 0,\ \ t > 0,$ (cond. front.)

Estado da arte:

- Aspectos teóricos bem desenvolvidos
  - Para $a(x) \geq 0$, espectro do operador bem conhecido
  - Solução $u(x,t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to \infty$, etc, etc (P. Freitas, L, Roder Tch, E. Zuazua, ...)
- Nenhuma abordagem numérica usando autovalores.

Apresentamos:

- Método numérico baseado em autovalores (Método de Arnoldi)
- Mostramos que as soluçoes numéricas têm convergência assintótica
- Exemplos numéricos

Modelo: $u_{tt}(x,t) + a(x)u_t(x,t) = d^2 u_{xx}(x,t) \quad ,0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0.$

$u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x),\ \ 0 \leq x \leq 1,$ (cond. inic.)

$u(0,t) = 0,\ \ u(1,t) = 0,\ \ t > 0,$ (cond. front.)

Estado da arte:

- Aspectos teóricos bem desenvolvidos
  - Para $a(x) \geq 0$, espectro do operador bem conhecido
  - Solução $u(x,t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to \infty$, etc, etc (P. Freitas, L, Roder Tch, E. Zuazua, ...)
- Nenhuma abordagem numérica usando autovalores.

Apresentamos:

- Método numérico baseado em autovalores (Método de Arnoldi)
- Mostramos que as soluçoes numéricas têm convergência assintótica
- Exemplos numéricos

Modelo: $u_{tt}(x,t) + a(x)u_t(x,t) = d^2 u_{xx}(x,t) \quad ,0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0.$

$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), \; 0 \leq x \leq 1, \; \text{(cond. inic.)}$

$u(0,t) = 0, \; u(1,t) = 0, \; t > 0, \qquad \text{(cond. front.)}$

Estado da arte:

- Aspectos teóricos bem desenvolvidos
  - Para $a(x) \geq 0$, espectro do operador bem conhecido
  - Solução $u(x,t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to \infty$, etc, etc (P. Freitas, L, Roder Tch, E. Zuazua, ...)
- Nenhuma abordagem numérica usando autovalores.

Apresentamos:

- Método numérico baseado em autovalores (Método de Arnoldi)
- Mostramos que as soluçoes numéricas têm convergência assintótica
- Exemplos numéricos

Método das Linhas:

Eq. evolução: $U_t = \mathcal{L}\, U, \;\; U(x,0) = f(x), t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}$: Op. dif. indep. de t

Discretização Espacial
(dif. finitas, elem. finitos, met. espectrais, etc)

$$\Downarrow$$

Sistema de EDO's: $v_t = L_h v, v(0) = f_h$ (1)

Mét. para EDO's (Runge-Kutta, etc) $\Rightarrow v(x_i, t) \approx U(x, t)$ "ao longo das linhas (x_i, t)"

Método das Linhas:

Eq. evolução: $U_t = \mathcal{L}\, U, \;\; U(x,0) = f(x), t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}$: Op. dif. indep. de t

Discretização Espacial

(dif. finitas, elem. finitos, met. espectrais, etc)

$\Downarrow$

Sistema de EDO's: $\quad v_t = L_h v, v(0) = f_h \qquad (1)$

Mét. para EDO's (Runge-Kutta, etc) $\Rightarrow v(x_i, t) \approx U(x, t)$ "ao longo das linhas (x_i, t)"

Método das Linhas:

Eq. evolução: $U_t = \mathcal{L}\, U, \;\; U(x,0) = f(x), t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}$: Op. dif. indep. de t

Discretização Espacial
(dif. finitas, elem. finitos, met. espectrais, etc)

$$\Downarrow$$

$$\text{Sistema de EDO's:} \quad v_t = L_h v, v(0) = f_h \tag{1}$$

Mét. para EDO's (Runge-Kutta, etc) $\Rightarrow v(x_i, t) \approx U(x, t)$ "ao longo das linhas (x_i, t)"

Método das linhas para a Eq. da Onda:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) + a(x)u_t(x,t) = d^2 u_{xx}(x,t) \quad &, 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0. \\ u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), \; 0 \le x \le 1, \; &\text{(cond. inic.)} \\ u(0,t) = 0, \; u(1,t) = 0, \; t > 0, \qquad &\text{(cond. front.)} \end{aligned}$$

Discretização Espacial (dif. Finitas): $v_i(t) \approx u(x_i,t)$

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1, \quad x_i = ih, \; i = 0,1,\ldots,n, \; h = \frac{1}{n+1}.$$

$$\Downarrow$$

Sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} &\ddot{v}_i(t) + a(x_i)\dot{v}_i(t) = \frac{v_{i-1}(t) - 2v_i(t) + v_{i+1}(t)}{h^2}, \quad i = 1:n, \\ &v_0(t) = v_{n+1}(t) = 0, \quad t \ge 0, \\ &v_i(0) = f(x_i), \quad \dot{v}_i(0) = g(x_i), \quad i = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{2}$$

Modelo Semi-discreto e solução

$$\begin{cases} A_2\ddot{v}(t) + A_1\dot{v}(t) + A_0 v(t) = 0, \\ v(0) = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T, \quad \dot{v}(0) = [g(x_1), \dots, g(x_n)]^T, \end{cases} \tag{3}$$

$$A_2 = I_n, \quad A_1 = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n),\, a_i = a(x_i), \quad A_0 = \mathrm{Tridiag}(-1, 2, -1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = L_h y(t), \\ y(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}, \end{cases} \qquad L_h = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Solução: $\quad y(t) = \exp(L_h t)y(0), \quad$ depende dos autov. e autovet. $(\lambda_j, \mathbf{x}_j)$ do polinômio matricial quadrático

$$P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$$

Modelo Semi-discreto e solução

$$\left\{\begin{array}{l} A_2\ddot{v}(t) + A_1\dot{v}(t) + A_0 v(t) = 0, \\ v(0) = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T, \quad \dot{v}(0) = [g(x_1), \dots, g(x_n)]^T, \end{array}\right. \tag{3}$$

$$A_2 = I_n, \quad A_1 = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n),\, a_i = a(x_i), \quad A_0 = \mathrm{Tridiag}(-1, 2, -1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{y}(t) = L_h y(t), \\ y(0) = \left[\begin{array}{c} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{array}\right], \end{array}\right. \quad L_h = \left[\begin{array}{cc} 0 & I_n \\ -A_0 & -A_1 \end{array}\right], \quad y(t) = \left[\begin{array}{c} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{array}\right] \tag{4}$$

Solução: $y(t) = \exp(L_h t) y(0)$, depende dos autov. e autovet. $(\lambda_j, \mathbf{x}_j)$ do polinômio matricial quadrático

$$P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$$

$$\begin{cases} A_2\ddot{v}(t) + A_1\dot{v}(t) + A_0 v(t) = 0, \\ v(0) = [f(x_1), \ldots, f(x_n)]^T, \quad \dot{v}(0) = [g(x_1), \ldots, g(x_n)]^T, \end{cases} \tag{3}$$

$$A_2 = I_n, \quad A_1 = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n),\, a_i = a(x_i), \quad A_0 = \mathrm{Tridiag}(-1, 2, -1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = L_h y(t), \\ y(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad L_h = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Solução: $y(t) = \exp(L_h t) y(0)$, depende dos autov. e autovet. $(\lambda_j, \mathbf{x}_j)$ do polinômio matricial quadrático

$$P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{2n}], \ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}), \ (\lambda_i, \mathbf{x}_i): \ \text{Auto-pares de } P(\lambda)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \exp(\Lambda t) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathbf{X}\exp(\Lambda t)\alpha, \\ &= \alpha_1 \mathbf{x}_1 \exp(\lambda_1 t) + \cdots + \alpha_{2n} \mathbf{x}_{2n} \exp(\lambda_{2n} t) \qquad (*) \end{aligned}$$

Método:

1. Encontre $\lambda_j, \mathbf{x}_j$
2. Resolva para α: $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$
3. Calcule $v(t)$ usando (*).

- Porquê usar autovalores se eles custam $O((2n)^3)$ operações ?

Modelo Semi-discreto e solução. Caso: L_h diagonalizável

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{2n}], \;\; \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}), \;\; (\lambda_i, \mathbf{x}_i): \;\; \text{Auto-pares de } \; P(\lambda)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \exp(\Lambda t) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathbf{X}\exp(\Lambda t)\alpha, \\ &= \alpha_1 \mathbf{x}_1 \exp(\lambda_1 t) + \cdots + \alpha_{2n}\mathbf{x}_{2n}\exp(\lambda_{2n} t) \qquad (*) \end{aligned}$$

Método:

1. Encontre $\lambda_j, \mathbf{x}_j$
2. Resolva para α: $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$
3. Calcule $v(t)$ usando (*).

- Porquê usar autovalores se eles custam $O((2n)^3)$ operações ?

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{2n}], \;\; \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}), \;\; (\lambda_i, \mathbf{x}_i): \;\; \text{Auto-pares de } \; P(\lambda)$$

$$y(t) \;\; = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \exp(\Lambda t) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} v(t) \;\; &= \mathbf{X}\exp(\Lambda t)\alpha, \\ &= \alpha_1 \mathbf{x}_1 \exp(\lambda_1 t) + \cdots + \alpha_{2n}\mathbf{x}_{2n}\exp(\lambda_{2n} t) \qquad (*) \end{aligned}$$

Método:

1. Encontre $\lambda_j, \mathbf{x}_j$
2. Resolva para α: $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$
3. Calcule $v(t)$ usando (*).

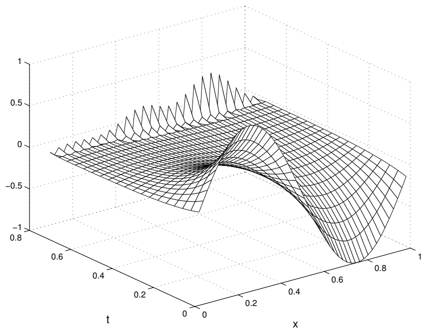
- Porquê usar autovalores se eles custam $O((2n)^3)$ operações ?

Algumas razões que justificam o método:

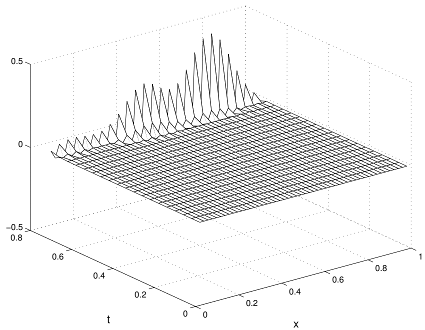
- Métodos Runge-Kutta precisam de “tamanho de passo” muito pequeno para funcionarem bem (perdem estabilidade quando t cresce).

  Modelo: $u_{tt} + \varepsilon a u_t = u_{xx}$, $\varepsilon a = 4\pi$, $\Delta t = 0.04$, $n = 50$
  $u(x,0) = \sin(2\pi x)$, $u_t(x,0) = -2\pi \sin(2\pi x)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$

Solução Numérica



ERR0



Algumas razões que justificam o método:

- Existência de métodos eficientes para autovalores (QR, Arnoldi, Iteração Simultânea, etc)

- Soluções do método têm estabilidade assintótica garantida (Bazán e Cunha (2004)).

☐ A equação $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$ sugere que poucos autovalores podem ser necessitados quando o vetor de condições iniciais $w_0 = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$ pertence a um subespaço invariante $\mathcal{S}$ de dimensão pequena (a maior parte dos α's são nulos !) Se $w_0 \in \mathcal{S}$ de dimensão p, o método de Arnoldi inicializado com w_0 converge em p iterações!!
Neste caso basta resolver:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & \cdots & \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_1\lambda_1 & \cdots & \mathbf{x}_p\lambda_p \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$$

Algumas razões que justificam o método:

- Existência de métodos eficientes para autovalores (QR, Arnoldi, Iteração Simultânea, etc)

- Soluções do método têm estabilidade assintótica garantida (Bazán e Cunha (2004)).

- A equação $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$ sugere que poucos autovalores podem ser necessitados quando o vetor de condições iniciais $w_0 = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$ pertence a um subespaço invariante $\mathcal{S}$ de dimensão pequena (a maior parte dos α's são nulos !) Se $w_0 \in \mathcal{S}$ de dimensão p, o método de Arnoldi inicializado com w_0 converge em p iterações!!
  Neste caso basta resolver:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_1\lambda_1 & \cdots & \mathbf{x}_p\lambda_p \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$$

Algumas razões que justificam o método:

- Existência de métodos eficientes para autovalores (QR, Arnoldi, Iteração Simultânea, etc)

- Soluções do método têm estabilidade assintótica garantida (Bazán e Cunha (2004)).

☐ A equação $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$ sugere que <u>poucos</u> autovalores podem ser necessitados quando o vetor de condições iniciais $w_0 = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$ pertence a um subespaço invariante $\mathcal{S}$ de dimensão pequena (a maior parte dos α's são nulos !) Se $w_0 \in \mathcal{S}$ de dimensão p, o método de Arnoldi inicializado com w_0 converge em p iterações!!
Neste caso basta resolver:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & \cdots & \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_1\lambda_1 & \cdots & \mathbf{x}_p\lambda_p \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$$

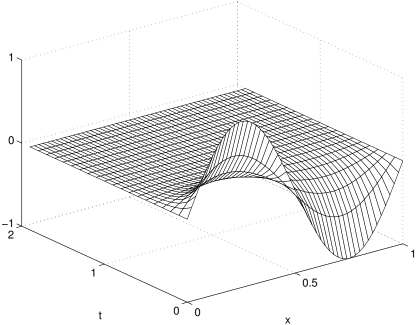
Resultados do Método proposto: Exemplo 1. Amortecimento constante

Modelo: $u_{tt} + \varepsilon a u_t = u_{xx}, \quad \varepsilon a = 4\pi,$

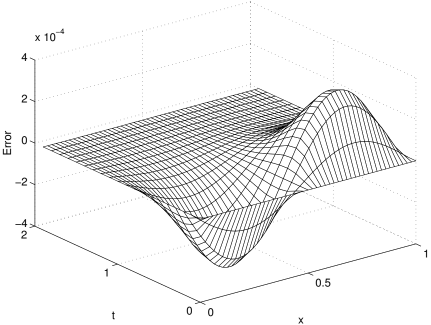
$u(x,0) = \sin(2\pi x), \quad u_t(x,0) = -2\pi \sin(2\pi x), \; u(0,t) = u(1,t) = 0$

$n = 50$, Iterações Arnoldi = 2

Solução Numérica



ERR0



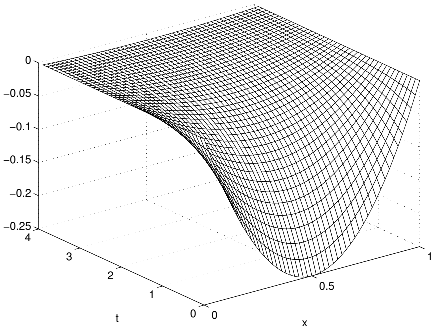
Resultados do Método proposto: Exemplo 2. Amortecimento variável

Modelo: $u_{tt} + \varepsilon a u_t = u_{xx},\ a(x) = 1 - \frac{2}{x(x-1)},$ sol. ex.: $u(x,t) = e^{-t}x(x-1)$

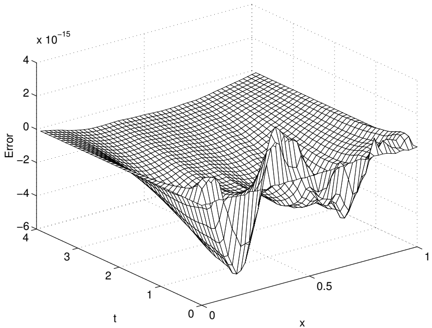
$u(x,0) = -x(x-1), \quad u_t(x,0) = x(x-1), u(0,t) = u(1,t) = 0$

$n = 50$, $\varepsilon = 1$, Iterações Arnoldi = 1

Solução Numérica



ERR0



Exemplo 2. Porquê Arnoldi converge em apenas 1 iteração?

Modelo: $u_{tt} + \varepsilon a u_t = u_{xx},\ a(x) = 1 - \frac{2}{x(x-1)},$ sol. ex.: $u(x,t) = e^{-t}x(x-1)$

$u(x,0) = -x(x-1),\quad u_t(x,0) = x(x-1),\ u(0,t) = u(1,t) = 0$

Método:

1. Encontre $\lambda_j, \mathbf{x}_j$
2. Resolva para α: $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$
3. Calcule $v(t) = \alpha_1 \mathbf{x}_1 \exp(\lambda_1 t) + \cdots + \alpha_{2n} \mathbf{x}_{2n} \exp(\lambda_{2n} t)$

- Convergência é atingida em 1 iteração porque para este exemplo o vetor de condições iniciais depende linearmente do primeiro autovetor. Isto é,

$$\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_j = 0,\ 2 \leq j \leq 2n.$$

Exemplo 2. Porquê Arnoldi converge em apenas 1 iteração?

Modelo: $u_{tt} + \varepsilon a u_t = u_{xx}$, $a(x) = 1 - \frac{2}{x(x-1)}$, sol. ex.: $u(x,t) = e^{-t} x(x-1)$

$u(x,0) = -x(x-1)$, $u_t(x,0) = x(x-1)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$

Método:

1. Encontre $\lambda_j, \mathbf{x}_j$
2. Resolva para α: $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$
3. Calcule $v(t) = \alpha_1 \mathbf{x}_1 \exp(\lambda_1 t) + \cdots + \alpha_{2n} \mathbf{x}_{2n} \exp(\lambda_{2n} t)$

- Convergência é atingida em 1 iteração porque para este exemplo o vetor de condições iniciais depende linearmente do primeiro autovetor. Isto é,

$$\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_j = 0,\ 2 \leq j \leq 2n.$$

Exemplo 2. Porquê Arnoldi converge em apenas 1 iteração?

Modelo: $u_{tt} + \varepsilon a u_t = u_{xx},\ a(x) = 1 - \frac{2}{x(x-1)},$ sol. ex.: $u(x,t) = e^{-t}x(x-1)$

$u(x,0) = -x(x-1),\quad u_t(x,0) = x(x-1),\ u(0,t) = u(1,t) = 0$

Método:

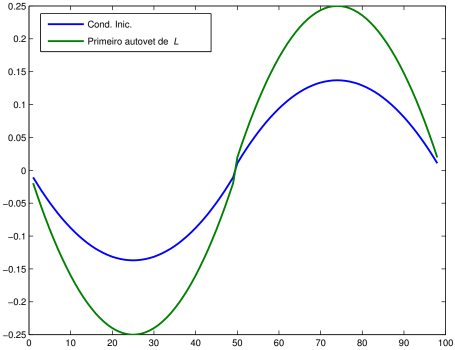
1. Encontre $\lambda_j, \mathbf{x}_j$
2. Resolva para α: $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$
3. Calcule $v(t) = \alpha_1 \mathbf{x}_1 \exp(\lambda_1 t) + \cdots + \alpha_{2n} \mathbf{x}_{2n} \exp(\lambda_{2n} t)$

- Convergência é atingida em 1 iteração porque para este exemplo o vetor de condições iniciais depende linearmente do primeiro autovetor. Isto é,

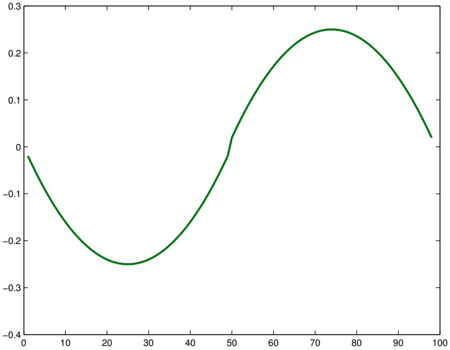
$$\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_j = 0,\ 2 \leq j \leq 2n.$$

Exemplo 2: Condições iniciais w_0 “rapidamente resolvidas” em termos de autovetores $\mathbf{v}_j$ do operador

w_0 e $\mathbf{v}_1$ (prim. autov.)



w_0 e $\alpha_1 \mathbf{v}_1$

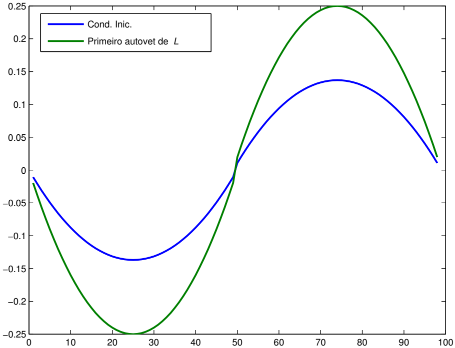


- **Conclusão:** O método de Arnoldi pode ser muito eficiente quando o vetor w_0 *é aproximado bem como comb. linear de poucos autovet. do operador.*

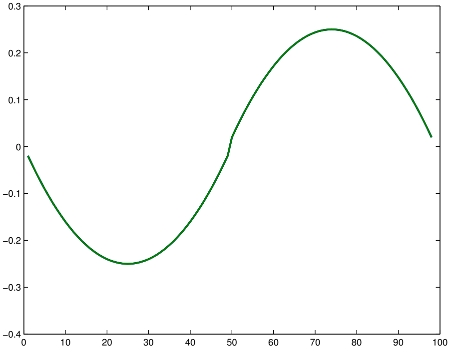
FIM

Exemplo 2: Condições iniciais w_0 “rapidamente resolvidas” em termos de autovetores $\mathbf{v}_j$ do operador

w_0 e $\mathbf{v}_1$ (prim. autov.)



w_0 e $\alpha_1 \mathbf{v}_1$



- **Conclusão:** O método de Arnoldi pode ser muito eficiente quando o vetor w_0 *é aproximado bem como comb. linear de poucos autovet. do operador*.

FIM