

Matrizes Especiais em Matemática Numérica

Publicações Matemáticas

**Matrizes Especiais em
Matemática Numérica**

Licio Hernanes Bezerra
UFSC



28^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2011 by Licio Hernanes Bezerra

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

28^o Colóquio Brasileiro de Matemática

- Cadeias de Markov e Teoria do Potencial - Johel Beltrán
- Cálculo e Estimação de Invariantes Geométricos: Uma Introdução às Geometrias Euclidiana e Afim - M. Andrade e T. Lewiner
- De Newton a Boltzmann: o Teorema de Lanford - Sérgio B. Volchan
- Extremal and Probabilistic Combinatorics - Robert Morris e Roberto Imbuzeiro Oliveira
- Fluxos Estrela - Alexander Arbieto, Bruno Santiago e Tatiana Sodero
- Geometria Aritmética em Retas e Cônicas - Rodrigo Gondim
- Hydrodynamical Methods in Last Passage Percolation Models - E. A. Cator e L. P. R. Pimentel
- Introduction to Optimal Transport: Theory and Applications - Nicola Gigli
- Introdução à Aproximação Numérica de Equações Diferenciais Parciais Via o Método de Elementos Finitos - Juan Galvis e Henrique Versieux
- Matrizes Especiais em Matemática Numérica - Licio Hernanes Bezerra
- Mecânica Quântica para Matemáticos em Formação - Bárbara Amaral, Alexandre Tavares Baraviera e Marcelo O. Terra Cunha
- Multiple Integrals and Modular Differential Equations - Hossein Movasati
- Nonlinear Equations - Gregorio Malajovich
- Partially Hyperbolic Dynamics - Federico Rodriguez Hertz, Jana Rodriguez Hertz e Raúl Ures
- Processos Aleatórios com Comprimento Variável - A. Toom, A. Ramos, A. Rocha e A. Simas
- Um Primeiro Contato com Bases de Gröbner - Marcelo Escudeiro Hernandez

ISBN: 978-85-244-326-2

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

Prefácio

Um processador numérico de um computador faz aritmética com um subconjunto finito de números racionais. Essa aritmética é dita de ponto flutuante. Contudo, algumas propriedades dos números racionais não são válidas nesse subconjunto. Por exemplo, a propriedade associativa da soma não é, em geral, válida na aritmética de ponto flutuante. Chamamos de aritmética exata a aritmética abstrata dos números reais. Por exemplo, em aritmética exata $\sqrt{2}$ é um número irracional com infinitas casas decimais, enquanto que, em aritmética de ponto flutuante, $\sqrt{2}$ é um número racional com representação binária (na maior parte dos processadores) finita. A matemática numérica trata de problemas que surgem quando se resolvem problemas matemáticos em um computador. Desde muito cedo na história da humanidade, muitos algoritmos têm sido criados para resolver razoavelmente problemas matemáticos. Um algoritmo pode levar a uma solução em aritmética exata em um número finito de passos, mas pode nunca chegar a uma solução, nem suficientemente próxima, em aritmética de ponto flutuante. Um exemplo de um algoritmo desse tipo é o do Gradiente Conjugado, que é usado para se resolver um sistema de equações algébricas lineares cuja matriz é real, simétrica e definida positiva. Um outro caso é o de um algoritmo que, em aritmética exata, tende à solução exata do problema conforme o número de passos aumenta. Mas, quando se implementa o algoritmo no computador, a sequência oscila ou praticamente estaciona. Essa é uma situação que acontece frequentemente na resolução de sistemas de equações algébricas lineares por métodos iterativos, como o método de Gauss-Seidel. Quando a matriz de coeficientes é real, simétrica e definida positiva, a teoria indica convergência desse

método, mas na prática as coisas podem não funcionar tão bem assim. O matemático, que gosta de desafios, tenta classificar subconjuntos dessas matrizes para as quais o algoritmo não funciona tão bem e busca ampliar a teoria de matrizes com resultados expressivos, no sentido de explicar o porque da convergência lenta ou de advertir o usuário sobre a má performance do algoritmo naquela classe de matrizes. Numérica e computacional são dois adjetivos que se confundem, embora haja uma sutil diferença. Por exemplo, a matemática numérica depende da matemática computacional para validar seus resultados.

Neste trabalho vamos apresentar alguns resultados de teoria de matrizes e sua utilização em matemática numérica. Grande parte desses resultados tem a ver com fatoração de matrizes: fatoração $PA = LU$, fatoração QR , forma de Schur (ou forma triangular), decomposição espectral (ou forma diagonal), forma racional, forma de Jordan, decomposição em valores singulares, fatoração de Vandermonde de uma matriz de Hankel inversível etc. Na passagem do denso para o discreto, funções se transformam em vetores de espaços de dimensão finita, transformações entre espaços de dimensão infinita se tornam matrizes finitas, o exato se transfigura em um aproximado razoável (dentro de uma tolerância fixada a priori).

No texto deste livro, os assuntos são desenvolvidos mais ou menos de modo linear. Estamos pressupondo que o leitor já tenha cursado disciplinas de Álgebra Linear. Dividimos o livro em dois capítulos, tentando criar uma separação entre teoria e prática. Mas isso nem sempre se realiza, por exemplo, o problema prático de compressão de imagens aparece no capítulo 1. De modo geral, as aplicações numéricas apresentadas aqui são simples no que diz respeito à sua formulação: compressão de imagens, estimativa de parâmetros senoidais, computação de curvas de Bézier, multiplicação rápida de matriz por vetor via FFT (Fast Fourier Transform). Os pontos altos deste livro são, na minha opinião:

- a descrição da SSVD (Shuffled Singular Value Decomposition), que eu traduzi aqui para Decomposição em valores Singulares com Embaralhamento (DVSE), que é uma forma de compressão de imagem baseada na Decomposição em Valores Singulares (DVS) da matriz associada à imagem;

- a prova do teorema de Cayley-Hamilton via forma de Schur de uma matriz;
- a prova do teorema da decomposição primária, também via forma de Schur;
- a linda prova da inversibilidade de uma matriz de Vandermonde formada com polos distintos;
- a obtenção da inversa exata de uma matriz de Hilbert a partir da descrição geral da inversa de uma matriz de Cauchy;
- a transformação por similaridade (por matrizes diagonais!) de uma matriz de Pascal triangular inferior em uma matriz de Toeplitz.

Mas há pontos médios interessantes, como a prova algébrica simples da unicidade da pseudo-inversa, que é a inversa generalizada (de uma matriz) que satisfaz as quatro condições de Moore-Penrose; a obtenção da forma de Jordan, a partir da forma Racional (isso também aparece no ótimo livro de Álgebra Linear do K. Hoffmann e R. Kunze); a decomposição espectral de matrizes circulantes etc. Há teoremas cujas demonstrações não aparecem no texto, como o da decomposição de Vandermonde de uma matriz de Hankel inversível. Tampouco pudemos desenvolver métodos adaptativos de alta resolução no domínio do tempo para estimativa de parâmetros em modelos senoidais. Isto seria a continuação natural da subseção em que se aplica um método de autovalores para calcular parâmetros de um sinal musical monofônico simples, composto apenas de uma nota que vibra com seus harmônicos naturais. Introduzimos, neste trabalho, um protótipo de método adaptativo: dividimos um sinal em matrizes de Hankel de ordens diferentes, calculamos independentemente os parâmetros desses trechos de sinal e justapomos os resultados no tempo. Há ainda vários exercícios e grande parte deles é para ser resolvido em um sistema interativo como o MATLAB: Scilab, GNU Octave, FreeMat etc. Os comandos desses sistemas são praticamente idênticos. Esperamos que este livro estimule o leitor a estudar teoria de matrizes não só pelas ferramentas que podem ser utilizadas na matemática aplicada, mas também pela matemática em si mesma.

Conteúdo

1	Conceitos básicos de Teoria de Matrizes	7
1.1	Matrizes	7
1.1.1	Exemplos de Matrizes	9
1.1.2	Matrizes Especiais com Inversas Explícitas	14
1.2	Decomposição PA = LU	15
1.2.1	Matrizes Elementares	17
1.2.2	Pivôs e Determinantes	20
1.2.3	Fatoração PA=LU	20
1.2.4	Decomposição LDU	22
1.2.5	Matrizes Mal Condicionadas	22
1.2.6	Exercícios	25
1.3	Decomposição QR	31
1.3.1	O Problema de Quadrados Mínimos	31
1.3.2	QR com Pivotamento de Coluna	36
1.4	Decomposição em Valores Singulares e Pseudo-Inversa	37
1.4.1	Inversas Generalizadas e Pseudo-Inversa	39
1.4.2	Compressão de Imagens via DVS	41
1.4.3	Uma Variação do Algoritmo de Compressão de Imagens via DVS: a DVSE	44
1.4.4	Exercícios	46
1.5	Autovalores	50
1.5.1	Forma de Jordan	53
1.5.2	Matrizes Normais	58
1.5.3	Exercícios	60

2	Matrizes Especiais	65
2.1	Matrizes tipo Pascal: Bernstein, Pascal Generalizada etc	65
2.1.1	Curvas de Bézier	68
2.2	Matrizes de Vandermonde	71
2.2.1	Interpolação Polinomial	73
2.3	Matrizes de Hankel	74
2.3.1	Estimação de Sinais Senoidais	77
2.3.2	Exemplo: sinais musicais	80
2.4	Matrizes de Fourier	86
2.4.1	Multiplicação Rápida Matriz-Vetor	88
2.4.2	Matrizes Circulantes	89
2.4.3	Multiplicação Rápida - Matriz de Toeplitz	90
2.4.4	Multiplicação Rápida - Matriz de Pascal	91
2.5	Exercícios	93

Capítulo 1

Conceitos básicos de Teoria de Matrizes

1.1 Matrizes

Seja \mathbb{F} um corpo de característica zero. Vamos denotar por $\mathbb{F}^{m \times n}$ o conjunto das matrizes $m \times n$ cujas entradas estão em \mathbb{F} . Por exemplo, $\mathbb{R}^{m \times n}$ denota o conjunto das matrizes reais $m \times n$. Como é usual, denotaremos por a_{ij} o elemento de uma matriz A que está na linha i e na coluna j . Vamos utilizar a notação do MATLAB¹ para denotar o vetor-linha i da matriz A : $A(i, :)$. Analogamente, denotaremos o vetor-coluna j da matriz A por $A(:, j)$. A submatriz de A formada pelos elementos que estão ao mesmo tempo nas linhas $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ e nas colunas $j_1 < j_2 < \dots < j_s$ será denotada por $A([i_1, \dots, i_r], [j_1, \dots, j_s])$. Se as linhas e as colunas forem consecutivas, vamos denotar essa submatriz por $A(i_1 : i_r, j_1 : j_s)$. Chamamos de superdiagonal de uma matriz a qualquer diagonal paralela à diagonal principal que esteja na parte triangular superior da matriz. Por

¹Na realidade, MATLAB neste texto é uma variável. Há sistemas interativos, como FreeMat [19], GNU Octave [33] e Scilab [40], que são sistemas interativos livres, cujos comandos são similares ou idênticos aos do MATLAB, citados aqui. Atualmente, há dezenas de livros em que se explora o uso eficiente de MATLAB em matemática numérica. Por exemplo, veja [24], [32].

exemplo, a primeira superdiagonal de uma matriz A contém todas as entradas A_{ij} tais que $j - i = 1$. Chamamos de subdiagonal de uma matriz a qualquer diagonal paralela à diagonal principal que esteja na parte triangular inferior da matriz.

Dados $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{F}$, vamos denotar a matriz diagonal D tal que, $(\forall i) d_{ii} = d_i$, por $\text{diag}(d_1, \dots, d_k)$. Se A é uma matriz, A^T e A^H são, respectivamente, a transposta e a hermitiana (ou transposta conjugada) de A . Se A é uma matriz real, $A^H = A^T$; no caso complexo, $A^H = \overline{A^T}$.

Podemos pensar, pelo menos, em quatro algoritmos para multiplicar uma matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times p}$ por outra matriz $B \in \mathbb{F}^{p \times n}$, $C = A \cdot B$:

1. $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$;
2. $C(i, :) = A(i, :)B$;
3. $C(:, j) = AB(:, j)$;
4. $C = \sum_{k=1}^p A(:, k)B(k, :)$.

Por esta última forma de se descrever a multiplicação de duas matrizes, dadas duas matrizes $U \in \mathbb{F}^{m \times p}$ e $V \in \mathbb{F}^{n \times p}$, cujos vetores-coluna são representados por u_1, \dots, u_p e v_1, \dots, v_p , e uma matriz diagonal $D \in \mathbb{F}^{p \times p}$ tal que $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$, temos que

$$UDV^T = \sum_{k=1}^p d_k u_k v_k^T.$$

Definição 1.1.1. Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ é uma matriz de posto completo se o posto da matriz é igual ao número de colunas da matriz. Ou seja, uma matriz de posto completo é uma matriz cujas colunas são linearmente independentes.

Um exemplo de matriz de posto completo é uma matriz cujas colunas são ortonormais. Como um conjunto de vetores não nulos ortogonais são linearmente independentes, essa matriz é de posto completo.

Dada $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, definimos $\text{Im}(A)$ como sendo o subespaço do \mathbb{F}^m gerado pelos vetores-coluna de A . $\text{Im}(A)$ é também chamado de espaço-coluna de A . O espaço-linha de A é, por definição, o espaço-coluna de A^T . O núcleo de A , que é denotado por $N(A)$, é o subespaço de \mathbb{F}^n formado por todos os vetores x tais que $Ax = 0$. Note

que, se $b \in \mathbb{F}^m$ não é o vetor nulo, então $Ax = b$ é possível se e só se $b \in \text{Im}(A)$.

Seja $b \in \text{Im}(A)$. Se A é uma matriz de posto completo, então a equação $Ax = b$ possui uma única solução. Matrizes quadradas de posto completo são matrizes inversíveis. Aliás, temos um teorema que caracteriza bem as matrizes inversíveis e que é geralmente visto nas disciplinas de Álgebra Linear.

Teorema 1.1.2. *Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Então A é inversível*

- $\Leftrightarrow \text{Im } A = \mathbb{F}^n$
- \Leftrightarrow as colunas de A são l.i.
- $\Leftrightarrow x = 0$ é a única solução de $Ax = 0$
- $\Leftrightarrow N(A) = \{0\}$
- $\Leftrightarrow \text{Im } A^T = \mathbb{F}^n$
- $\Leftrightarrow N(A^T) = \{0\}$
- \Leftrightarrow as linhas de A são l.i.
- \Leftrightarrow existe $b \in \mathbb{F}^n$ tal que $Ax = b$ tem uma única solução
- \Leftrightarrow para todo $b \in \mathbb{F}^n$ $Ax = b$ tem uma única solução
- \Leftrightarrow existe $c \in \mathbb{F}^n$ tal que $A^T x = c$ tem uma única solução
- \Leftrightarrow para todo $c \in \mathbb{F}^n$ $A^T x = c$ tem uma única solução
- $\Leftrightarrow A^T$ é inversível
- $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
- \Leftrightarrow zero não é autovalor de A

1.1.1 Exemplos de Matrizes

Eis alguns exemplos simples de matrizes:

- a matriz identidade I , $n \times n$, que em MATLAB é definida pelo comando $\text{eye}(n)$, é a matriz cujas linhas e colunas são os vetores da base canônica de \mathbb{F}^n ;
- a matriz nula, $m \times n$, que é toda formada por zeros, é definida pelo comando $\text{zeros}(m, n)$;
- a matriz $m \times n$ formada toda por uns é definida pelo comando $\text{ones}(m, n)$;

- matrizes quadradas triangulares inferiores, que são definidas da seguinte forma: para todos i e j , tais que $1 \leq i < j \leq n$, $a_{ij} = 0$;
- matrizes quadradas triangulares superiores, que são definidas da seguinte forma: para todos i e j , tais que $1 \leq i > j \leq n$, $a_{ij} = 0$;
- matrizes diagonais, que são ao mesmo tempo triangulares inferiores e triangulares superiores;
- matrizes de banda, ou seja, matrizes que tem p superdiagonais e q subdiagonais, $p, q \geq 1$; por exemplo, matrizes tridiagonais ($p = q = 1$), matrizes hessemberg superiores ($p = n - 1$ e $q = 1$) etc;
- matrizes simétricas, que são matrizes quadradas A que satisfazem $A = A^T$;
- matrizes antissimétricas, que são matrizes quadradas que satisfazem $A = -A^T$;
- matrizes hermitianas, que são matrizes quadradas A que satisfazem $A = A^H$.

Há várias matrizes especiais que podem ser definidas a partir de comandos do MATLAB. Abaixo, alguns exemplos:

compan	companheira
hankel	Hankel
hilb	Hilbert
invhilb	inversa de Hilbert
magic	quadrado mágico
pascal	triângulo de Pascal
toeplitz	Toeplitz
vander	Vandermonde

Vamos comentar um pouco sobre essas matrizes:

- A definição de matriz companheira fica melhor compreendida a partir do conceito de autovalor. Seja $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$,

$a_n \neq 0$, um polinômio em F . A matriz companheira associada a p é a matriz $C = \text{compan}([a_n, \dots, a_0])$, que é a matriz cuja primeira linha é $-a_{n-1}/a_n \dots -a_1/a_n - a_0/a_n$, a segunda linha é e_1 , o primeiro vetor canônico de \mathbb{F}^n , ..., a enésima linha é e_{n-1} . Exemplo: se $p(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1$, então

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o polinômio dado é o polinômio característico de C , isto é, $p(x) = \det(xI - C)$. Isso é um fato geral: dado um vetor $v = (a_n, \dots, a_0) \in F^n$, em que $a_n \neq 0$, o polinômio $x^n - \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} - \dots - \frac{a_1}{a_n}x - \frac{a_0}{a_n}$ é o polinômio característico de $C = \text{compan}(v)$.

- Matrizes de Hankel são matrizes retangulares $m \times n$ tais que para todo k , $0 \leq k \leq m + n - 2$, $h_{ij} = h_k$, em que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ são tais que $i - 1 + j - 1 = k$. Ou seja, são matrizes cujos elementos de cada diagonal paralela à diagonal secundária são todos iguais. Para gerar tais matrizes, basta sabermos sua primeira coluna e sua última linha. Em MATLAB, define-se uma matriz de Hankel pelo comando $\text{hankel}([h_0, h_1, \dots, h_{m-1}], [h_{m-1}, \dots, h_{m+n-2}])$.
- Um exemplo de matriz de Hankel é a matriz de Hilbert, que é uma matriz $n \times n$, $H = \text{hilb}(n)$, cujas entradas são definidas por $H_{i,j} = 1/(i + j - 1)$.
- O comando $\text{invhilb}(n)$ computa a inversa da matriz de Hilbert de ordem n usando uma fórmula algébrica, cuja aplicação dá resultados exatos em um computador de processamento de 32 bits para valores de n menor que 15. A inversa de Hilbert é uma matriz simétrica, cujas entradas são inteiras e de grandezas muito diversas.
- Um quadrado mágico² de ordem n é gerado pelo comando $\text{magic}(n)$.

²Um quadrado mágico simples de ordem n é uma matriz cujas entradas vão

- O comando $p = pascal(n)$ gera uma matriz simétrica que satisfaz a propriedade similar à que define um triângulo de Pascal: $p(i, 1) = p(1, j) = 1$ e $p(i+1, j+1) = p(i+1, j) + p(i, j+1)$ para $i, j \geq 1$. P_n , a matriz de Pascal triangular inferior de ordem n , é a matriz cujo elemento da linha i e coluna j é definida por

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & , \text{ se } i \geq j; \\ 0 & , \text{ se } i < j. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é gerada pelo comando $abs(pascal(n, 1))$.

- Matrizes de Toeplitz também são matrizes retangulares $m \times n$ tais que para todo k , $1 - n \leq k \leq m - 1$, $h_{ij} = h_k$, em que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ satisfazem $i - j = k$. Ou seja, são matrizes cujas entradas de cada diagonal paralela à diagonal principal são todas iguais. Uma matriz de Toeplitz é determinada se soubermos sua primeira coluna e sua primeira linha. Em MATLAB, uma matriz de Toeplitz é construída a partir do comando $toeplitz([h_0, h_1, \dots, h_{m-1}], [h_{-1}, \dots, h_1 - n])$.
- Dado um vetor $x = (x_1, \dots, x_n)$, diferentemente do que é gerado em MATLAB, $V = vander(x)$ denotará aqui a matriz de Vandermonde $n \times n$ cujos elementos são definidos por $V(i, j) = x_j^{i-1}$:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

de 1 a n^2 e estão dispostas de tal modo que a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal (principal e secundária) é sempre igual a um mesmo valor.

Outros tipos de matrizes aparecem citados no texto. Por exemplo, as matrizes hermitianas definidas positivas (hdp) e as matrizes diagonal-dominantes. Há várias formas de se definir uma matriz hermitiana definida positiva A . Se A é real, podemos chamá-la de simétrica definida positiva e é definida a seguir.

Definição 1.1.3. *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica definida positiva (sdp) se $A = A^T$ e se, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $x^T A x > 0$.*

Se a matriz for complexa, basta exigir que, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, $x^H A x > 0$, para que a matriz seja hermitiana definida positiva. Existem várias caracterizações para essas matrizes, conforme o teorema a seguir, cuja demonstração é deixada como exercício.

Teorema 1.1.4. *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então A é hermitiana definida positiva*

$$\begin{aligned} &\iff A = A^H \text{ e, para todo } i, 1 \leq i \leq n, \det A(1 : i, 1 : i) > 0 \\ &\iff \text{existe } P \text{ inversível tal que } A = P^H P \\ &\iff A = A^H \text{ e os autovalores de } A \text{ são positivos.} \end{aligned}$$

Note que, se A é hermitiana definida positiva (hdp), então $P^H A P$ é hermitiana definida positiva para toda matriz retangular de posto completo P . Em particular, os elementos da diagonal de A e todas as suas submatrizes principais $A(1 : i, 1 : i)$ são também hermitianas definidas positivas (ver lista de exercícios). O conceito de uma matriz A hermitiana definida não negativa (hdnn) corresponde à condição de $x^H A x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$. O enunciado do teorema correspondente ao Teorema 1.1.4 para matrizes hdnn é deixado como exercício.

Definição 1.1.5. *Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é dita diagonal-dominante (ou estritamente diagonal-dominante) se, para todo i , $1 \leq i \leq n$,*

$$|A(i, i)| > \sum_{j \neq i} |A(i, j)| \text{ e } |A(i, i)| > \sum_{j \neq i} |A(j, i)|.$$

A primeira condição diz que a matriz A é diagonal-dominante por linhas; a segunda, que A é diagonal-dominante por colunas. Há autores que fazem a distinção entre diagonal-dominante e estritamente

diagonal-dominante, permitindo-se à matriz diagonal-dominante que algum elemento da diagonal seja igual em valor absoluto à soma dos valores absolutos dos outros elementos da linha ou coluna. Um fato interessante, que merece ser demonstrado pelos leitores, é que se A é uma matriz simétrica real diagonal-dominante, cuja diagonal só tem números positivos, então A é uma matriz simétrica definida positiva (ver lista de exercícios).

1.1.2 Matrizes Especiais com Inversas Explícitas

Na descrição do comando *invhilb*(n), comentamos sobre uma fórmula algébrica exata para as matrizes de Hilbert. Essas matrizes pertencem a uma classe maior de matrizes, ditas matrizes de Cauchy.

Definição 1.1.6. *Sejam $\{a_1, \dots, a_m\}$ e $\{b_1, \dots, b_n\}$ dois conjuntos de números complexos tais que $a_i \neq b_j$ se $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Uma matriz de Cauchy $m \times n$ é uma matriz $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tal que cada elemento da linha i e coluna j é definido por $c_{ij} = 1/(a_i - b_j)$.*

O determinante de uma matriz de Cauchy C de ordem n é

$$\det C = \frac{\prod_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x_i - y_j)}.$$

A dedução da fórmula do determinante de uma matriz de Cauchy pode ser vista em [38]. Assim, a matriz de Cauchy de ordem n é inversível. Um fato interessante é que a inversa da matriz de Cauchy tem uma caracterização simples, conforme o lema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [45] ou em [38].

Lema 1.1.7. *Seja C uma matriz de Cauchy de ordem n . Então*

$$C^{-1} = UC^TV,$$

em que U e V são matrizes diagonais, cujas diagonais são as soluções dos sistemas $Cx = e$ e $C^T y = e$, respectivamente, e o vetor e é o vetor cujos elementos são todos iguais a 1. Esses vetores u e v são tais que

$$u_j = \prod_{i=1}^n (a_i - b_j) / \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (b_i - b_j), \quad j = 1, \dots, n$$

e

$$v_j = \prod_{i=1}^n (a_j - b_i) / \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (a_j - a_i), \quad j = 1, \dots, n.$$

Quando C é uma matriz de Hilbert, temos que $a_1 = 1, \dots, a_n = n$, $b_1 = 0, \dots, b_n = 1 - n$. Nesse caso, o vetor u , que é igual a v , é dado por $u_1 = (-1)^{n-1}n$, $u_2 = (-1)^{n-2}(n+1)n(n-1)$, $u_3 = (-1)^{n-3}(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)/(2!)^2$ etc. Ou seja,

$$u_k = (-1)^{n-k} \prod_{i=1-k}^{k-1} (n+i) / ((k-1)!)^2.$$

Se você digita o comando *type invhilb* em MATLAB, esse sistema lista a função usada para calcular a inversa da matriz de Hilbert de ordem n .

A matriz de Pascal triangular inferior P_n também tem uma inversa explícita:

$$(P_n)^{-1} = G_n(-1)P_nG_n(-1),$$

em que $G_n(-1)$ é a matriz diagonal tal que $(G_n(-1))_{ii} = (-1)^{i-1}$ para todo $i = 1 : n$. Essa matriz estudaremos mais aprofundadamente no Capítulo 2.

Na próxima seção, discutiremos uma decomposição de uma matriz inversível em fatores triangulares. Essa fatoração, às vezes, não é possível sem fazer antes uma permutação de linhas. A correspondência entre a fatoração e o processo de eliminação gaussiana, ou método de eliminação de variáveis, não é gratuita, como veremos a seguir.

1.2 Decomposição PA = LU

Nessa seção, discutiremos a resolução de sistemas algébricos lineares do ponto de vista de teoria de matrizes. Esses sistemas podem ser descritos por $Ax = b$, em que A é uma matriz quadrada de ordem n e inversível, x é um vetor-coluna (uma matriz $n \times 1$) de incógnitas e b é um vetor-coluna dado. Vamos analisar a seguir a álgebra matricial

envolvida no processo de eliminação gaussiana. Para isso, vamos utilizar o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 10 \\ 2x - y + 3z = -2 \end{cases} . \quad (1.1)$$

O primeiro passo é eliminar a variável x das duas últimas equações. O **pivô** dessa operação é o coeficiente de x na primeira equação. Algebricamente, isso é equivalente a

- (a) subtrair 3 vezes a primeira equação da segunda;
- (b) subtrair 2 vezes a primeira equação da terceira.

Essas operações elementares resultam no seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y - z = -2 \\ -3y + z = -10 \end{cases} , \quad (1.2)$$

que é equivalente ao anterior no sentido de ambos terem o mesmo conjunto de soluções. No próximo passo, ignoremos a primeira equação e consideremos apenas as duas últimas equações. O objetivo agora é eliminar a variável y da última equação. Com esse intuito, devemos subtrair dessa equação três vezes a segunda. Agora, o pivô é o coeficiente de y na segunda equação, (-1) . Chegamos então ao seguinte sistema triangular (superior)

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y - z = -2 \\ 4z = -4 \end{cases} .$$

Esse sistema se resolve facilmente por retrossubstituição: calcula-se o valor de z na terceira equação: $z = -1$; substitui-se esse valor na segunda equação e então calcula-se o valor de y : $y = 3$; finalmente, substituindo-se esses valores na primeira equação, obtemos $x = 2$.

Essa sistemática se generaliza para sistemas de n equações lineares com n variáveis: elimina-se uma variável após outra até que reste somente uma variável, x_n . Resolve-se então esta variável que, em seguida, é substituída na equação anterior. Esse procedimento se

repete assim por diante até que finalmente se resolve x_1 . Esse método de resolução de sistemas lineares, que é conhecido como eliminação gaussiana, é limitado aos casos em que os pivôs são não nulos. Um exemplo no qual o método falha é o seguinte:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 4y - z = 11 \\ 5x + 2y + 3z = 6 \end{cases} . \quad (1.3)$$

Para eliminar a variável x nas duas últimas equações, subtrai-se da segunda equação duas vezes a primeira, e da terceira, cinco vezes a primeira. O resultado dessas operações é o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ - 3z = 3 \\ - 8y - 2z = -14 \end{cases} . \quad (1.4)$$

Vemos que não é possível eliminar a variável y da terceira equação subtraindo-se dela um múltiplo da segunda, pois o pivô é zero. Contudo, esse problema pode se resolver simplesmente permutando-se as duas últimas equações:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ - 8y - 2z = -14 \\ - 3z = 3 \end{cases} . \quad (1.5)$$

1.2.1 Matrizes Elementares

Sejam C e A duas matrizes tais que seja possível calcular o seu produto CA . Então as linhas de CA serão combinações lineares das linhas de A , como se pode ver a seguir:

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= x (a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) + y (a_{21} \ a_{22} \ a_{23}) + z (a_{31} \ a_{32} \ a_{33}) .$$

Por exemplo, o seguinte produto transforma a matriz de coeficientes do sistema 1.4 na matriz de coeficientes do sistema 1.5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & -2 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} .$$

A matriz que multiplicou a matriz de coeficientes do sistema 1.4 à esquerda é uma matriz de permutação. Por definição, uma matriz de permutação é qualquer matriz cujas linhas (ou colunas) são exatamente os vetores da base canônica em alguma ordem. Elas serão vistas novamente na próxima seção. Outro exemplo de produto de matrizes é o que transforma o sistema 1.1 no sistema 1.2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

A transformação operada no sistema 1.1 e que resultou no sistema 1.2 é composta de duas operações elementares. Isso é traduzido em matrizes do seguinte modo: a matriz que multiplica a matriz das constantes numéricas do sistema 1.1 (ver acima) é o produto de duas matrizes elementares. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes elementares são matrizes quadradas que, multiplicadas à esquerda de uma matriz A , resultam em operações elementares nas linhas da matriz. Elas são de três tipos:

- diagonal, que equivale a multiplicar uma linha por um número;
- de permutação, que equivale a permutar duas linhas;
- do tipo $E_{ij} = I + k_{ij}e_i e_j^T$, com $i \neq j$, em que e_i é a matriz $n \times 1$ correspondente ao i -ésimo vetor da base canônica do \mathbb{R}^n , que equivale a somar à linha i um múltiplo da linha j .

Consideremos o sistema linear

$$Ax = b,$$

em que A é uma matriz $n \times n$ e b é uma matriz $n \times 1$. Seja $[A|b]$ a matriz aumentada correspondente ao sistema. A eliminação gaussiana do ponto de vista matricial corresponde à seguinte multiplicação

sucessiva de matrizes elementares do terceiro tipo, triangulares inferiores:

$$E_{n,n-1} \cdots E_{ni} \cdots E_{i+1,i} \cdots E_{n1} \cdots E_{21} [A | b] = [U | \hat{b}],$$

em que U é uma matriz triangular superior. O pivô do i -ésimo passo de eliminação é o elemento u_{ii} , da diagonal de U . Estamos supondo aqui que lidamos com uma matriz para o qual não foi necessário permutar linhas durante o processo.

Esse produto de matrizes que triangulariza A é uma matriz triangular inferior, com todas as entradas na diagonal iguais a 1 (é bom verificar essa informação). Vamos denotá-la por L^{-1} . Temos então que $L^{-1}A = U$ e, assim,

$$A = LU.$$

Observemos que

$$L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1},$$

em que $L_j = E_{j+1,j}^{-1} \cdots E_{nj}^{-1}$. Se $E_{ij} = I + k_{ij}e_i e_j^T$, temos que

$$L_j = I - \sum_{i=j+1}^n k_{ij}e_i e_j^T.$$

Logo,

$$L = I - \sum_{i>j} k_{ij}e_i e_j^T.$$

A cada passo da eliminação gaussiana, para eliminar uma variável de uma equação, subtraímos dela um múltiplo da equação pivô. L é a matriz triangular inferior formada por esses números e com todos os elementos da diagonal iguais a 1.

Se a matriz A é fatorada em LU , o sistema $Ax = b$ é agora equivalente a dois sistemas triangulares: $Lz = b$ e $Ux = z$. Observemos que L contém a informação de como A se transforma numa matriz triangular superior por operações elementares e U é o resultado dessas operações em A . Ao se resolver o sistema triangular $Lz = b$, transformamos o vetor b no vetor $z = \hat{b}$, que é a última coluna da matriz aumentada $[U|\hat{b}]$ após a eliminação gaussiana em $[A|b]$.

1.2.2 Pivôs e Determinantes

A decomposição LU de uma matriz é possível se os pivôs na eliminação gaussiana forem não nulos. Se $A = LU$,

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U).$$

Mais ainda, se denotarmos por $A(1 : i, 1 : i)$ a matriz $i \times i$ formada pelas entradas de A que estão ao mesmo tempo nas linhas e colunas de 1 a i (submatriz principal de A de ordem i), temos

$$\det A(1 : i, 1 : i) = \det U(1 : i, 1 : i) = u_{11} \cdots u_{ii}$$

Assim, $u_{11} = a_{11}$ e, para $i > 1$,

$$u_{ii} = \frac{\det A(1 : i, 1 : i)}{\det A(1 : i - 1, 1 : i - 1)}$$

Temos então o seguinte teorema:

Teorema 1.2.1. *Uma matriz inversível tem decomposição LU , em que L é uma matriz triangular inferior com 1 na diagonal e U é uma matriz triangular superior, se para todo i , $1 \leq i \leq n$,*

$$\det A(1 : i, 1 : i) \neq 0$$

Observação: chamamos esses determinantes de menores principais.

1.2.3 Fatoração $PA=LU$

Vimos anteriormente que uma matriz A inversível admite fatoração LU se, para todo i , a submatriz $A(1 : i, 1 : i)$ é inversível. Esse é o caso das matrizes hermitianas positivas definidas, como também o das matrizes diagonal-dominantes. Fato é que se uma matriz A é inversível existe uma permutação de linhas que transforma A em uma matriz cujas submatrizes principais são todas inversíveis. A demonstração desse fato é basicamente a descrição do algoritmo de eliminação gaussiana com permutação :

- Se a_{11} é zero permuta-se a primeira linha com uma linha cujo primeiro elemento seja não nulo. Isso é possível, pois A é não singular e, logo, não possui coluna formada por zeros.

- Suponha que já foram eliminadas as i primeiras variáveis, permutando-se eventualmente as linhas para se obter um pivô não nulo. A matriz de coeficientes do sistema agora é mais ou menos a seguinte :

$$U^{(i)} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & u_{ii} & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

Essa matriz é inversível. Logo, pelo menos algum elemento da primeira coluna do bloco $U^{(i)}(i+1 : n, i+1 : n)$, formado pelas $n-i$ últimas linhas e colunas, é não nulo. Se $U^{(i)}(i+1, i+1) \neq 0$, este é o novo pivô; caso contrário, permuta-se esta linha com a linha $i+k$, $1 < k < n-i+1$, em que $U^{(i)}(i+k, i+1) \neq 0$.

Demonstramos acima, por indução, o seguinte teorema:

Teorema 1.2.2 (Decomposição PA=LU). *Se A é uma matriz inversível então existe uma matriz de permutação P , uma matriz triangular inferior L com entradas diagonais iguais a 1 e uma matriz triangular superior U tais que $PA = LU$.*

Se a cada passo escolhermos o maior pivô possível em valor absoluto, apenas permutando linhas, esse procedimento é o que se chama de pivotamento parcial. Na resolução do sistema triangular $Ux = z$ ($z = L^{-1}b$), há n operações de divisão, que ocorrem quando dividimos expressões algébricas pelos pivôs. O algoritmo de pivotamento parcial procura pivôs grandes para melhorar o resultado numérico de todo o processo, pois quanto maior for a razão entre o divisor e o dividendo menor é o erro resultante do arredondamento da divisão.

Em geral, o comando $[L, U] = lu(A)$ no MATLAB não gera a "verdadeira" fatoração LU de A , e sim uma decomposição LU , em que

$$L = P^T * \hat{L} \quad \text{e} \quad U = \hat{U}.$$

Como padrão, o MATLAB faz a eliminação gaussiana usando o algoritmo de pivotamento parcial, ou seja, calcula uma decomposição $PA = \hat{L}\hat{U}$. Mas, se for dado o comando $[L, U, P] = lu(a)$, MATLAB exibe a matriz de permutação P , junto com a verdadeira L .

Podemos estender nosso estudo à resolução de equações do tipo $Ax = b$, em que $A \in C^{m \times n}$, uma matriz não necessariamente quadrada, e b é um vetor que pertence ao espaço coluna de A . O sistema será determinado se e só se os vetores-coluna de A são linearmente independentes. A fatoração triangular ainda é válida para matrizes retangulares:

Teorema 1.2.3. *Se $A \in C^{m \times n}$, existe uma matriz de permutação P , uma matriz quadrada triangular inferior L e uma matriz retangular triangular superior U (ou seja, tal que $u_{ij} = 0$ se $m \geq i > j \geq 1$) tais que $PA = LU$.*

1.2.4 Decomposição LDU

Uma variação da fatoração LU é a decomposição LDU , em que D é a matriz diagonal formada pelos pivôs e U é agora uma matriz triangular superior com 1 na diagonal. As matrizes hermitianas que têm menores principais não nulos se decompõem então em LDL^H . Observe que essas matrizes serão definidas positivas se e somente se $D > 0$ (ver exercícios) e, nesse caso, $A = LDL^H = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^H = PP^H$. Essa decomposição de uma matriz hermitiana definida positiva na forma $A = PP^H$, em que P é triangular inferior, é chamada de fatoração de Cholesky.

Um fato interessante é que a decomposição LDU de matrizes de banda (quando existem) preserva bandas. Por exemplo, os fatores triangulares L e U de uma matriz tridiagonal são bidiagonais; de uma pentadiagonal, tridiagonais; e assim por diante.

1.2.5 Matrizes Mal Condicionadas

Há uma classe de matrizes não singulares que, como matrizes de coeficientes de sistemas lineares, resultam em soluções imprecisas. Essas matrizes são muito sensíveis a pequenas perturbações de seus valores, no sentido que uma variação pequena de uma de suas entradas pode

resultar numa solução computada muito diferente da do sistema original. Essas matrizes são chamadas de matrizes mal condicionadas. Um exemplo interessante é o seguinte (ver [43]):

$$\begin{array}{rcl} u + & v = 2 & e \\ u + 1.0001v = 2 & & u + v = 2 \\ & & u + 1.0001v = 2.0001 \end{array}$$

A solução do primeiro sistema é $u = 2, v = 0$; a solução do segundo, $u = v = 1$. A variação relativa do vetor independente do primeiro para o segundo sistema foi $\Delta b/b = 10^{-4}\sqrt{2}/4$ e a variação relativa da solução, $\Delta x/x = \sqrt{2}/2$. Ou seja, a variação do vetor independente foi amplificada 20000 vezes! A seguir, veremos uma caracterização mais precisa do que é uma matriz mal condicionada em relação à inversão.

Dado $p \geq 1$, a p -norma de um vetor de \mathbb{C}^n é definida por

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Dois exemplos de p -normas são

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (x^H x)^{\frac{1}{2}} \quad e$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

As p -normas podem ser estendidas às matrizes do seguinte modo:

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

As p -normas satisfazem a seguinte propriedade (além obviamente das que definem uma norma num espaço vetorial):

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p,$$

quaisquer que sejam as matrizes $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times r}$.

Neste texto, diremos que uma norma é uma **norma de matriz** se satisfaz essa última condição. A 2-norma satisfaz ainda mais uma:

$$\|PAQ\|_2 \leq \|A\|_2 \quad (1.6)$$

quaisquer que sejam as matrizes unitárias $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dizemos que essa norma é invariante por matriz unitária.

Consideremos, agora, os sistemas

$$Ax = b \quad \text{e} \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Logo, $A\Delta x = \Delta b$. Ou seja, $\Delta x = A^{-1}\Delta b$. Então, obtemos

$$\|b\| \leq \|A\| \|x\| \quad \text{e} \quad \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|.$$

Logo,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|\Delta b\|} = \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|\Delta b\|}. \quad (1.7)$$

Dizemos que

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

é o número de condição da matriz A . Observe que esse número é sempre maior ou igual a 1. Quanto maior $\kappa(A)$, maior pode ser o erro relativo na solução do sistema, e mais mal condicionada é a matriz A . Se perturbarmos a matriz A no lugar de b ,

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b,$$

obtemos, supondo $Ax = b$, que

$$\Delta x = -A^{-1} \Delta A (x + \Delta x).$$

Tomando alguma norma de matriz, vemos que

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\|,$$

ou seja,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| = \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \quad (1.8)$$

Essas desigualdades revelam que os erros de arredondamento têm pelo menos duas fontes: a sensibilidade da matriz, que tem como uma medida o seu número de condição; e os erros Δb e ΔA . Esses erros podem ser cometidos, por exemplo, durante a fatoração LU feita em aritmética de ponto flutuante, em que computamos, na realidade, $A + \Delta A = \hat{L}\hat{U}$ (e não $A = LU$). Ou podem ser resultantes

da resolução computacional dos sistemas triangulares, em que computamos $\hat{x} = x + \Delta x$ e, então, $A\hat{x} = b + \Delta b$. Em MATLAB, o 2-número de condição de uma matriz A pode ser obtido a partir do comando $\text{cond}(A)$. Uma classe de matrizes mal condicionadas (número de condição grande) é a das matrizes de Hilbert (sugiro ao leitor que faça testes em MATLAB com matrizes de Hilbert de ordem variadas para verificar essa afirmação).

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz inversível. Sejam u e v dois vetores reais tais que $v^T A^{-1} u \neq -1$. Então

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}.$$

Essa é a fórmula de Sherman-Morrison para inversão de perturbações de posto 1 de uma matriz A . A aplicação dessa fórmula é interessante, por exemplo, no caso de uma matriz que, a menos de uma entrada não nula, é triangular superior (ver lista de exercícios).

Essa fórmula se generaliza a perturbações de posto maior que 1: se $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $V \in \mathbb{R}^{p \times n}$, então

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}.$$

1.2.6 Exercícios

1. Mostre que o produto de matrizes triangulares inferiores (resp. superiores) é uma matriz triangular inferior (resp. superior). Verifique que os elementos da diagonal do produto é igual ao produto dos elementos respectivos da diagonal de cada fator.
2. Mostre que a inversa de uma matriz triangular inferior (resp. superior) é uma matriz triangular inferior (resp. superior). Verifique que os elementos da diagonal da inversa são os inversos dos elementos respectivos da matriz original.
3. Mostre que, se A é hermitiana definida positiva, então $P^H A P$ é hermitiana definida positiva para toda matriz retangular de posto completo P .
4. Mostre que todas as submatrizes principais $A(1 : i, 1 : i)$ de uma matriz hdp A são também hdp.

5. Mostre que os elementos da diagonal de uma matriz hdp A são todos positivos.
6. Mostre que uma matriz A é hdnn se e só se existe uma matriz P tal que $A = P^H P$.
7. Mostre que a inversa de uma matriz hdp é hdp.
8. Mostre que a soma de matrizes hdp é hdp, e que a soma de matrizes hdnn é hdnn. Mostre, também, que a soma de uma matriz hdp com uma hdnn é hdp.
9. Mostre que se uma matriz é diagonal-dominante, então todas as suas submatrizes principais são também diagonal-dominantes.
10. Mostre que se uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é diagonal-dominante (no sentido estrito), então A é inversível (sugestão: mostre que, para todo vetor não nulo x , $|e_i^T Ax| > 0$, para $i = 1 : n$).
11. Mostre que toda matriz diagonal-dominante (no sentido estrito) tem decomposição LU .
12. Calcule a inversa de uma matriz elementar e verifique que ela também é uma matriz elementar.
13. Mostre que, fixada uma coluna j , quaisquer que sejam as linhas $i_1, i_2 > j$, $E_{i_1 j} E_{i_2 j} = E_{i_2 j} E_{i_1 j}$.
14. Mostre que se $E_{i_1 j_1}, E_{i_2 j_2}$ são matrizes elementares triangulares inferiores então

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} = E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1}, \text{ se } i_1 < i_2 \text{ e } j_1 \leq j_2.$$

15. Mostre que a eliminação gaussiana chega ao mesmo resultado se ela for computada de modo que, a cada linha i , são eliminadas as $i - 1$ primeiras variáveis, isto é,

$$E_{n1} \cdots E_{n, n-1} \cdots E_{i1} \cdots E_{i, i-1} \cdots E_{21} =$$

$$E_{n, n-1} \cdots E_{ni} \cdots E_{i+1, i} \cdots E_{n1} \cdots E_{21}.$$

16. Mostre que a decomposição LU de uma matriz inversível é única, quando existe. Ou seja, se $A = L_1U_1 = L_2U_2$, L_1, L_2 são triangulares inferiores com 1 na diagonal e U_1, U_2 são triangulares superiores então $L_1 = L_2$ e $U_1 = U_2$.
17. Mostre que, se existe decomposição LU de uma matriz inversível A , podemos escrever de modo único $A = LD\tilde{U}$, em que L e \tilde{U} são matrizes triangulares respectivamente inferior e superior, com todos as entradas diagonais iguais a 1, e D é uma matriz diagonal inversível.
18. Seja A uma matriz simétrica real inversível. Suponha que A tem decomposição LU . Mostre que a fatoração LDU de A é da forma LDL^T . Conclua ainda que a fatoração LDU de uma matriz hermitiana inversível A , quando existe, é da forma LDL^H .
19. Mostre que uma matriz real simétrica A é definida positiva se e só se $A = LDL^T$, com D positiva. Analogamente, mostre que uma matriz hermitiana A é definida positiva se e só se $A = LDL^H$, com D positiva.
20. Mostre que uma matriz real e simétrica (complexa e hermitiana) A é definida positiva se e só se $A = LL^T$ ($A = LL^H$), em que L é uma matriz triangular inferior (decomposição de Cholesky).
21. Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Mostre que, se $(\forall x \in \mathbb{C}^n) (x \neq 0) x^H Ax > 0$, então $A = A^H$.
22. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão n . Um produto interno complexo é uma função $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que
- para todos $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$;
 - para todos $u, v, w \in V$, $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
 - para todos $v, w \in V$, para todo $k \in \mathbb{C}$, $\langle kv, w \rangle = k \langle v, w \rangle$;
 - para todo $v \neq 0 \in V$, $\langle v, v \rangle > 0$.

Suponha que esteja definido em V um produto interno \langle, \rangle .
Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V .

- (a) Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$.
Mostre, por indução na dimensão de V que, para todos $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = (w_\alpha)^H A v_\alpha$. A é dita a matriz do produto interno em relação à base α . Mostre que A é hermitiana definida positiva.
- (b) Seja A a matriz definida no item anterior. Se existe uma matriz $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal para, todos $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = (w_\alpha)^H B v_\alpha$, mostre que $A = B$.
- (c) Seja β uma base de V . Seja B a matriz do produto interno em relação à base β . Mostre que $B = (I_\alpha^\beta)^H A I_\alpha^\beta$.
- (d) Mostre que α é ortonormal em relação ao produto interno se e somente se $A = I$.
- (e) Mostre que existe uma base ortonormal de V em relação ao produto interno, ou seja, que existe uma base α tal que a matriz do produto interno em relação a essa base seja a identidade.
23. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão n com produto interno \langle, \rangle . Mostre que uma matriz $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é hdp se e só se B é a matriz do produto interno em relação a alguma base de V , isto é, se e só se existe uma base α de V tal que, para todos $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = w_\alpha^H B v_\alpha$.
24. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão n com produto interno \langle, \rangle . Seja α uma base ortonormal de V . Mostre que β é uma base ortonormal de V se e só se a matriz de mudança de base I_α^β é unitária (lembrar que, dados um operador linear T em V e duas bases de V , $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$, então T_α^β é a matriz $n \times n$ tal que sua j -ésima coluna é formada pelas coordenadas do vetor $T(w_j)$ em relação à base α , isto é, $(T(w_j))_\alpha$).
25. Verifique a fórmula de Sherman-Morrison.

26. Mostre que se uma matriz A é hermitiana, diagonal estritamente dominante ($\forall i |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$) e, para todo i , $a_{ii} > 0$, então A é definida positiva .
27. Dê um exemplo de uma matriz simétrica real com a diagonal positiva, que não seja diagonal-dominante no sentido estrito (isto é, uma matriz A que satisfaz a condição de $\forall i |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$) e que não seja definida positiva.
28. Mostre que se uma matriz A é hermitiana com diagonal positiva, mas que não é diagonal-dominante no sentido estrito, então A é definida não negativa.
29. (a) Gere uma matriz A , 3×3 , randômica, e compute passo a passo as operações elementares para triangularizá-la ($U = A$, $U(2, :) = U(2, :) - U(2, 1)/U(1, 1) * U(1, :)$ etc).
- (b) Construa as matrizes elementares E , F e G correspondentes às operações acima.
- (c) Faça o produto $G * F * E * A$ e compare com U acima.
- (d) Para $i > 1$, calcule $\det(A(1 : i, 1 : i)) / \det(A(1 : i - 1, 1 : i - 1))$ e compare com U_{ii} .
30. Gere uma matriz real 4×4 , diagonal-dominante, e ache sua decomposição LDU .
31. Gere uma matriz tridiagonal simétrica definida positiva e encontre sua fatoração de Cholesky (comando $L = chol(A)$).
32. Compute os fatores P , L e U de uma matriz de Toeplitz (o comando $A = Toeplitz(c, r)$ gera uma matriz tal que $a_{ij} = c_{i-j+1}$, se $i \geq j$, e $a_{ij} = r_{j-i+1}$, se $i < j$).
33. Se b é um vetor, o comando $x = A \setminus b$ calcula a solução x do sistema $Ax = b$ por eliminação gaussiana com pivotamento parcial. Faça alguns testes com a matriz do exercício anterior.
34. De modo geral, se B é uma matriz $n \times p$, o comando

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$$

calcula a solução X do sistema $AX = B$ por eliminação gaussiana com pivotamento parcial. Inverta matrizes de Hilbert por esse comando. Compare com as inversas das matrizes de Hilbert computadas pelo comando *invhilb*.

35. O comando **inv(A)** inverte uma matriz quadrada A , por eliminação gaussiana com pivotamento parcial, computando primeiro *inv(L)* e *inv(U)*: $\text{inv}(A) = \text{inv}(U) * \text{inv}(L)$. Inverta matrizes de Hilbert com esse comando e compare os resultados com os obtidos no exercício anterior, com o comando $A \setminus \text{eye}(n)$.
36. Seja $n = 5$ e defina uma matriz segundo o *script* abaixo.

```
for i = 1:n
    for j = 1:n
        A(i,j) = 1/(i+j+1);
    end
end
```

Ache sua decomposição $PA = LU$, sua inversa e seu determinante.

37. O comando **cond(A)** computa o número de condição da matriz A , segundo a 2-norma. Teste-o com matrizes de Hilbert, matrizes de Pascal etc.
38. Seja A a parte triangular superior de uma matriz de Hilbert, por exemplo, 7×7 (comando **A=triu(hilb(7))**). Compute $A^{-1}v$, em que v é o vetor cujas coordenadas são todas iguais a 1 (lembre-se que, para calcular $A^{-1}v$, não se calcula A^{-1} e, sim, resolve-se $Ax = v$).
39. Seja B igual a A , a matriz do exercício anterior, a menos da entrada $(7,1)$: $B(7,1) = 1/3$. Resolva $Bx = v$, em que v é o mesmo vetor do exercício acima, por eliminação gaussiana. Depois resolva a mesma equação usando a fórmula de Sherman-Morrison.

1.3 Decomposição QR

O problema de resolver sistemas algébricos lineares pode ser encarado como um problema de minimização de uma forma quadrática. A solução desse problema se obtém facilmente se conhecemos uma outra fatoração da matriz de coeficientes - a fatoração QR .

1.3.1 O Problema de Quadrados Mínimos

Podemos observar que a resolução de um sistema de equações lineares do tipo

$$Ax = b,$$

em que A é uma matriz real $m \times n$, é equivalente à minimização da forma quadrática

$$E^2(x) = \|Ax - b\|_2^2.$$

Se o sistema acima é impossível, ainda assim podemos encontrar uma solução x de um sistema aproximado ao sistema original, mas que é possível. Essa solução tem a seguinte propriedade: a sua imagem p por A , isto é $p = Ax$, é o vetor mais próximo possível de b no sentido euclidiano. Geometricamente, isso significa que o vetor p corresponde à projeção ortogonal do vetor b sobre o espaço-coluna da matriz A . Vamos denotar por x_{qm} o vetor cuja imagem é p e tem a mínima norma euclidiana entre todos os vetores da imagem inversa de p (que é um conjunto compacto de \mathbb{R}^n). x_{qm} é dita a solução de quadrados mínimos. Se o posto da matriz A for n , verifica-se que

- $x_{qm} = (A^T A)^{-1} A^T b$;
- $p = A(A^T A)^{-1} A^T b$.

Calcular p torna-se uma tarefa simples se conhecemos uma base ortonormal do espaço-coluna de A . Nesse caso, p é a soma das projeções ortogonais de b sobre cada vetor da base. Em termos matriciais, se Q é a matriz cujas colunas são os vetores daquela base ortonormal,

$$p = QQ^T b.$$

Se as colunas da matriz A são linearmente independentes, x_{qm} é a única solução de $Ax = p$. Então, calcular x_{qm} se torna um problema

simples: basta fatorar A como um produto QR , em que Q é uma matriz com os vetores-coluna ortonormais e R , triangular inferior inversível. Assim, o sistema $Ax = p$ é equivalente ao sistema $QRx = QQ^T b$, ou seja,

$$Rx = Q^T b,$$

que é um sistema triangular e fácil de resolver por retrossubstituição. O problema de se aproximar uma função por um polinômio tem sentido como um problema de quadrados mínimos. Por exemplo, para ajustar os seguintes dados,

$$y = 2 \text{ em } t = 1, \quad y = 1 \text{ em } t = 2 \quad \text{e} \quad y = 3 \text{ em } t = 3,$$

por uma função do tipo $y = c + dt$, resolve-se por quadrados mínimos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c + d.1 = 2 \\ c + d.2 = 1 \\ c + d.3 = 3 \end{cases}$$

Se as colunas de uma matriz A são linearmente independentes, um método para se obter uma base ortonormal a partir de suas colunas é o método de Gram-Schmidt.

Exemplo: Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Por Gram-Schmidt,

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$q_2 = \frac{v_2 - q_1(v_2^T q_1)}{\|v_2 - q_1(v_2^T q_1)\|},$$

ou seja,

$$v_1 = \sqrt{3} q_1$$

$$v_2 = 2\sqrt{3} q_1 + \sqrt{2} q_2.$$

Em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

De modo geral, se A é uma matriz $m \times n$, de posto $1 \leq r \leq n$, pode-se ortonormalizar r colunas de A por Gram-Schmidt de tal modo que $AP = QR$, em que P é uma matriz de permutação $n \times n$, Q é uma matriz $m \times r$ com colunas ortonormais e R é uma matriz retangular $r \times n$ tal que $R_{ij} = 0$, se $i > j$. Se $r < n$, há várias soluções para o problema de quadrados mínimos e a determinação da solução x_{mq} é mais complicada (ver lista de exercícios).

A implementação computacional do método de ortogonalização de Gram-Schmidt pode ser feita de dois modos equivalentes em aritmética exata, mas com resultados diferentes computacionalmente, em aritmética de ponto flutuante. O primeiro, chamado de Gram-Schmidt Clássico, é o procedimento utilizado para ortonormalizar bases nos cursos usuais de Álgebra Linear. O segundo, o Gram-Schmidt Modificado, é uma reorganização dos cálculos do primeiro, que tem se mostrado mais eficiente que o Gram-Schmidt Clássico no que diz respeito à ortogonalidade dos vetores computados. A seguir são descritos os dois algoritmos, que decompõem uma matriz A , cujos vetores-coluna são denotados por v_i , $i = 1, \dots, n$, no produto QR . O segundo algoritmo sobrepõe a matriz Q à matriz A .

1. Gram-Schmidt Clássico

Para $k = 1$

$$r_{11} = \|v_1\|$$

$$q_1 := \frac{v_1}{r_{11}}$$

Para $k = 2, \dots, n$

$$s_{ik} := q_i^H v_k \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s_{ik} q_i$$

$$r_{kk} := \sqrt{w_k^H w_k}$$

$$q_k := w_k / r_{kk}$$

$$r_{ik} := s_{ik} / r_{kk} \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

2. Gram-Schmidt Modificado

$$\begin{aligned}
 &\text{Para } k = 1, \dots, n \\
 &\quad r_{kk} := \sqrt{v_k^H v_k} \\
 &\quad v_k := v_k / r_{kk} \\
 &\text{Para } j = k + 1, \dots, n \\
 &\quad r_{kj} := v_k^H v_j \\
 &\quad v_j := v_j - r_{kj} v_k
 \end{aligned}$$

Vimos acima como decompor uma matriz A , $m \times n$, de posto n , em um produto QR , em que Q tem colunas ortonormais e R é triangular superior. Na literatura, essa decomposição é chamada de decomposição QR econômica (por razões óbvias). Em MATLAB, isso é obtido dando-se o comando $[Q, R] = qr(A, 0)$. Porém, o que usualmente chamamos de decomposição QR de uma matriz é a sua decomposição em uma matriz ortogonal (unitária) Q e uma matriz triangular superior R , que em MATLAB é gerada pelo comando $[Q, R] = qr(A)$.

Vimos anteriormente que uma matriz ortogonal (unitária) é uma matriz real (complexa) **quadrada** tal que todas as suas colunas são ortonormais. Poderíamos completar os vetores ortonormais dados por Gram-Schmidt até formar uma base do R^m , mas tem um modo de decompor uma matriz A muito mais preciso no que diz respeito a ortogonalidade: Householder. Esse método aplica transformações unitárias seguidamente na matriz A até que todos os elementos abaixo da diagonal principal (linha = coluna) se anulem (ver [9], [21]).

O sucesso desse método se sustenta no fato de que essas transformações unitárias, chamadas de reflexões de Householder, são muito simples. O método constrói passo a passo uma sequência de matrizes unitárias

$$Q_1, \dots, Q_{n-1}$$

tais que

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

$$Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

$$Q_{n-1} \cdots Q_2 Q_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

As únicas condições impostas sobre a natureza de Q_1 são que ela seja unitária e que leve o primeiro vetor-coluna de A , v_1 , em um múltiplo do primeiro vetor da base canônica, e_1 . A simetria em relação a um hiperplano bissetor desses dois vetores satisfaz essas condições e, mais ainda, é muito simples: é uma perturbação de posto um da matriz identidade, como veremos a seguir.

Existem dois hiperplanos bissetores aos vetores v_1 e e_1 e para determinar as duas transformações correspondentes, H_1 e H_2 , basta calcular a normal de cada hiperplano, n_1 e n_2 . Como são unitárias (logo, $\|Hv\| = \|v\|$),

$$H_1(v_1) = \|v_1\|e_1,$$

$$H_2(v_1) = -\|v_1\|e_1.$$

Logo, as duas normais são

$$n_1 = v_1 - H_1(v_1) \quad \text{e} \quad n_2 = v_1 + H_2(v_1).$$

Um cálculo simples resulta em

$$H_1 = I - 2 \frac{n_1 n_1^H}{n_1^H n_1} \quad \text{e} \quad H_2 = I - 2 \frac{n_2 n_2^H}{n_2^H n_2}.$$

Essas transformações são ditas de **Householder**. Agora, um critério prático para a escolha de qual das duas transformações será Q_1 :

aquela que tiver o maior denominador na fração acima (o que ocasionará menor erro de arredondamento). Ou seja, escolhe-se a transformação definida pela normal

$$n = v_1 + \text{sign}(e_1^T v_1) \|v_1\| e_1.$$

Continuando a sequência, Q_2 deve preservar a primeira coluna de $Q_1 A$, além de satisfazer as condições impostas sobre Q_1 . Para isso, basta que

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{Q}_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

e \tilde{Q}_2 seja uma reflexão de Householder. Observemos que dessa forma a dimensão do problema diminui a cada passo de obtenção das matrizes da sequência. Assim, obtemos a seguinte proposição:

Teorema 1.3.1 (Decomposição QR). *Seja $A \in C^{m \times n}$, uma matriz de posto n . Então existem uma única matriz unitária Q e uma única matriz triangular superior R , ($\forall i \leq n$) $R_{ii} > 0$, tais que $A = QR$.*

1.3.2 QR com Pivotamento de Coluna

Se a matriz A , $m \times n$, é de posto $r < n$, o algoritmo acima com uma estratégia de pivotamento nos fornece uma decomposição do tipo $AP = QR$, em que P é uma matriz de permutação e

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com R_{11} , $r \times r$, triangular inferior. A estratégia é a seguinte: suponha que no passo k , $k < r$, temos

$$Q_k \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_k = R_k,$$

em que

$$R_k = \begin{pmatrix} R_{11}^{(k)} & R_{12}^{(k)} \\ 0 & R_{22}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$R_{11}^{(k)}$, $k \times k$, e

$$R_{22}^{(k)} = \begin{pmatrix} v_{k+1}^{(k)} & \cdots & v_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Seja $k+1 \leq s \leq n$ tal que

$$\|v_s^{(k)}\| = \max_{k+1 \leq i \leq n} \|v_i^{(k)}\|.$$

Seja P_{k+1} a matriz de permutação que troca as colunas s e $k+1$. Agora, é só obter pelo algoritmo acima a matriz Q_{k+1} . Ao final, temos que para todo $1 \leq i \leq r$, para todo $i+1 \leq j \leq n$,

$$r_{ii}^2 \leq \sum_{k=i}^j r_{kj}^2.$$

1.4 Decomposição em Valores Singulares e Pseudo-Inversa

Um teorema fundamental na Álgebra Linear é o Teorema da Decomposição em Valores Singulares (*Singular Value Decomposition*). Por esse teorema, para toda transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de posto p existem p vetores ortonormais do domínio, $\{v_1, \dots, v_p\}$ e p vetores ortonormais do contradomínio, $\{u_1, \dots, u_p\}$ tais que $T(v_1) = \sigma_1 u_1, \dots, T(v_p) = \sigma_p u_p$, e $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$. $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ são ditos os valores singulares de T . Como uma transformação linear é uma função contínua, a imagem da bola unitária, segundo a norma euclidiana, é ainda um compacto. Se a dimensão da imagem é maior que 1, a fronteira dessa imagem é o elipsóide $w_1^2/(\sigma_1)^2 + \dots + w_p^2/(\sigma_p)^2 = 1$, em que $w_1 = u_1^T y, \dots, w_p = u_p^T y$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Observe que os valores singulares são os tamanhos dos eixos do elipsóide (ver [11]). O enunciado do teorema é o seguinte.

Teorema 1.4.1 (Decomposição em Valores Singulares). *Se $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ é uma matriz de posto $p > 0$ então existem matrizes unitárias $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ tais que $A = U \Sigma V^H$, em que Σ é uma matriz $m \times n$ tal que $\Sigma_{11} \geq \Sigma_{22} \geq \dots \geq \Sigma_{pp} > 0$, e todos os outros elementos da matriz são nulos.*

Demonstração: Seja $\sigma_1 = \max\{\|Av\|; \|v\| = 1\}$. Sejam v_1 e u_1 tais que $Av_1 = \sigma_1 u_1$. Sejam V_1 e U_1 duas matrizes unitárias tais que suas primeiras colunas são respectivamente v_1 e u_1 . É fácil verificar que

$$U_1^H A V_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Repetindo o procedimento com a matriz A_1 e assim por diante, chega-se à matriz Σ .

□

Observação 1.4.2. Os valores $\sigma_i = \Sigma_{ii}$ são ditos os valores singulares de A ; os vetores colunas de U e de V são chamados respectivamente de vetores singulares à direita e de vetores singulares à esquerda. Observe que os valores singulares de uma matriz A são as raízes quadradas dos autovalores positivos da matriz $A^H A$.

Observação 1.4.3. Se $Ax = b$ e $A = U\Sigma V^H$, então

$$x_{mq} = V \Sigma^\dagger U^H b,$$

em que Σ^\dagger é a matriz diagonal tal que $(\forall i \leq r) \Sigma_{ii}^\dagger = \sigma_i$.

Definição 1.4.4. A matriz

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^H$$

é dita a **pseudoinversa** de A .

O problema de encontrar a DVS de uma matriz A é não linear, pois os valores singulares são as raízes quadradas dos autovalores não nulos de $A^H A$. Note que V e U são matrizes de autovetores ortonormais de $A^H A$ e AA^H , respectivamente.

Se $A = U\Sigma V^H$ é uma DVS da matriz A , temos que

$$\|A\|_2 = \sigma_1.$$

Se A é inversível, o número de condição de A em relação à 2-norma é então

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Uma interpretação geométrica para os valores singulares de uma matriz de posto r é a seguinte: o elipsóide dado pela equação $\|Ax\|_2 = 1$ tem os eixos principais na direção dos vetores coluna de V e os comprimentos desses eixos são $1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r$. Para vermos isso, notemos que

$$x^H A^H A x = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |y_i|^2,$$

em que $Vy = x$. Matrizes inversíveis mal condicionadas estão relacionadas a elipsóides muito achatados. As matrizes unitárias são as que têm melhor condicionamento, porque para essas matrizes o elipsóide é uma esfera.

Vimos anteriormente que a sensibilidade de um sistema linear $Ax = b$, A inversível, era medida pela desigualdade

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Se b está na direção do primeiro vetor coluna de U , $b = \alpha u_1$, e Δb , na direção do último vetor coluna de U , $\Delta b = \epsilon u_n$, temos pela DVS que

$$x = A^{-1}b = \alpha v_1/\sigma_1 \quad \text{e} \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b = \epsilon v_n/\sigma_n.$$

Logo,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \frac{\epsilon}{\alpha} = \kappa_2(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Isso é o pior que pode acontecer.

1.4.1 Inversas Generalizadas e Pseudo-Inversa

Vimos que, se $A = U\Sigma V^H$ é a DVS de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, então $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^H$, em que

$$\Sigma^\dagger = \text{diag}\left(\left[\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_p}, 0, \dots, 0\right]\right),$$

em que p é o posto de A . Um fato interessante é o seguinte:

Lema 1.4.5. *Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Então A^\dagger é a única matriz $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ que satisfaz as quatro condições de Moore-Penrose:*

$$\begin{aligned} (i) \quad AXA &= A & (iii) \quad (AX)^H &= AX \\ (ii) \quad XAX &= X & (iv) \quad (XA)^H &= XA \end{aligned}$$

Demonstração:

Vamos provar que, se existem X e Y que satisfazem as condições de Moore-Penrose, então $X = Y$. Primeiro, note que, se $AXA = AY A = A$, então $XA = XAY A$ e $AY = AXAY$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} XAY A &= (XA)^H(YA)^H = A^H X^H A^H Y^H = (AXA)^H Y^H = \\ &= A^H Y^H = (YA)^H = YA \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} AXAY &= (AX)^H(AY)^H = X^H A^H Y^H A^H = X^H (AY A)^H = \\ &= X^H A^H = (AX)^H = AX. \end{aligned}$$

Assim, $XA = YA$ e $AY = AX$. Logo, $XAX = YAX$ e $YAY = YAX$. Ou seja,

$$X = XAX = YAY = Y.$$

O trabalho de verificar que a pseudo-inversa satisfaz as condições de Moore-Penrose é deixado para o leitor.

□

Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Se $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ é uma matriz que satisfaz pelo menos uma das condições de Moore-Penrose, então X é dita uma inversa generalizada de A . Por exemplo, seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

em que R é uma matriz de ordem r inversível e S é uma matriz $(n-r) \times r$. Seja $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ tal que

$$X = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

X é uma inversa generalizada de A , pois satisfaz as condições (i) e (iii). Costuma-se dizer, nesse caso, que X é uma (1,3) pseudo-inversa de A ([21],[42]). Algumas propriedades da pseudo-inversa são listadas abaixo. A sua verificação é deixada para o leitor.

Lema 1.4.6. *Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Então:*

1. $(A^\dagger)^\dagger = A$.
2. $(\overline{A})^\dagger = \overline{(A^\dagger)}$.
3. $(A^T)^\dagger = (A^\dagger)^T$.
4. $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^\dagger) = \text{posto}(AA^\dagger) = \text{posto}(A^\dagger A)$.
5. Se $\text{posto}(A) = n$, então $A^\dagger = (A^H A)^{-1} A^H$ e $A^\dagger A = I_n$.
6. Se $\text{posto}(A) = m$, então $A^\dagger = A^H (A A^H)^{-1}$ e $AA^\dagger = I_m$.
7. Se $A = FG^H$, em que $\text{posto}(F) = \text{posto}(G) = \text{posto}(A)$, então $A^\dagger = G(F^H A G)^{-1} F^H$.

1.4.2 Compressão de Imagens via DVS

O problema de compressão de imagens digitalizadas pode ser abordado via decomposição em valores singulares da matriz da imagem A . Essa matriz pode ser gerada a partir de comandos de leitura de arquivos de imagem. Por exemplo, em MATLAB, o comando $A = \text{imread}('impa54g.jpg')$ gera essa matriz a partir do arquivo $impa54g.jpg$. A compressão via DVS consiste em armazenar apenas os maiores valores singulares e respectivos vetores singulares associados a A (à esquerda e à direita). Um *script* simples para a compressão via DVS é o seguinte:

Algoritmo 1.4.1 Compressão de imagens via DVS

```

A = imread('impa54g.jpg');
[m, n] = size(A);
% escolha k < min(m, n)
[U, S, V] = svd(A, 'econ');
colormap('gray');
U_k = U(:, 1 : k);
S_k = S(1 : k, 1 : k);
V_k = V(:, 1 : k);

```

Podemos ver o resultado desse *script* aplicado ao arquivo citado, para alguns valores de k , na Figura 1.1. A matriz associada à imagem é 600×800 .



Figura 1.1: Cartaz de Colóquio no IMPA com foto de 1954

Vamos denotar por S_k a matriz diagonal formada pelos k maiores

valores singulares, por U_k a matriz cujas colunas são os vetores singulares à esquerda associados respectivamente a esses valores singulares, e por V_k a matriz cujas colunas são os vetores singulares à direita associados respectivamente àqueles valores singulares. Essas matrizes representarão uma compressão da imagem original se k for menor que um determinado valor (qual??). Uma vez que a imagem é representada por essas três matrizes, para gerar a imagem basta executar em MATLAB o comando: $image(A_k)$, em que $A_k = U_k * S_k * V_k'$. A distribuição dos valores singulares da matriz A que representa a imagem original aparece na Figura 1.2.

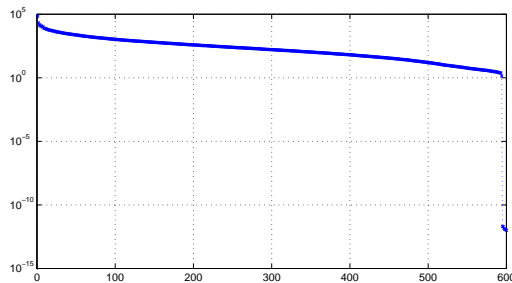


Figura 1.2: Valores singulares da matriz A em escala logarítmica

Se a imagem é colorida, a matriz associada à imagem é sempre uma matriz tridimensional, da forma $m \times n \times 3$, em que $A(:, :, 1)$ representa as intensidades da cor vermelha; $A(:, :, 2)$, as intensidades da cor verde; $A(:, :, 3)$, as intensidades da cor azul. Cada uma dessas matrizes $m \times n$ pode ser comprimida escolhendo-se um parâmetro k apropriado, obtendo-se no final uma matriz A_{rst} , $m \times n \times 3$, em que $A_{rst}(:, :, 1)$ é uma aproximação de posto r de $A(:, :, 1)$, $A_{rst}(:, :, 2)$ é uma aproximação de posto s de $A(:, :, 2)$ e $A_{rst}(:, :, 3)$ é uma aproximação de posto t de $A(:, :, 3)$. Imagens em preto e branco digitalizadas às vezes são armazenadas em matrizes tridimensionais. Por exemplo, a Figura 1.3 ilustra a imagem associada à matriz $A(:, :, 1)$ e algumas de suas compressões, em que A é uma matriz $400 \times 308 \times 3$ na qual a foto digitalizada original, em preto e branco, está armazenada.

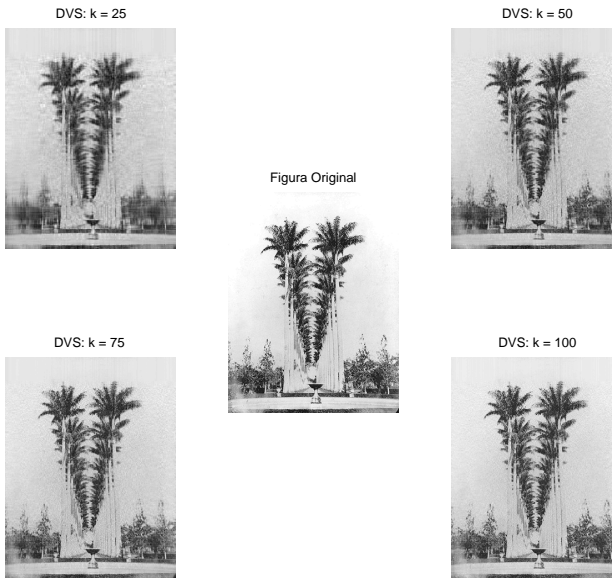


Figura 1.3: Jardim Botânico, por Georges Leuzinger, 1865

1.4.3 Uma Variação do Algoritmo de Compressão de Imagens via DVS: a DVSE

Vamos apresentar agora um algoritmo construído a partir da DVS para compressão de imagens, chamado de DVSE, abreviatura de Decomposição em Valores Singulares com Embaralhamento. Considere uma matriz A , $m \times n$, associada a uma imagem. Suponha que $m = a \cdot r$ e $n = b \cdot s$, em que r e s são inteiros maiores que 1. O algoritmo consiste dos seguintes passos:

1. Particione a matriz A em ab blocos $r \times s$ e enumeremo-los da esquerda para a direita, começando de cima;
2. Construa uma nova matriz X , $ab \times rs$, tal que para cada k ,

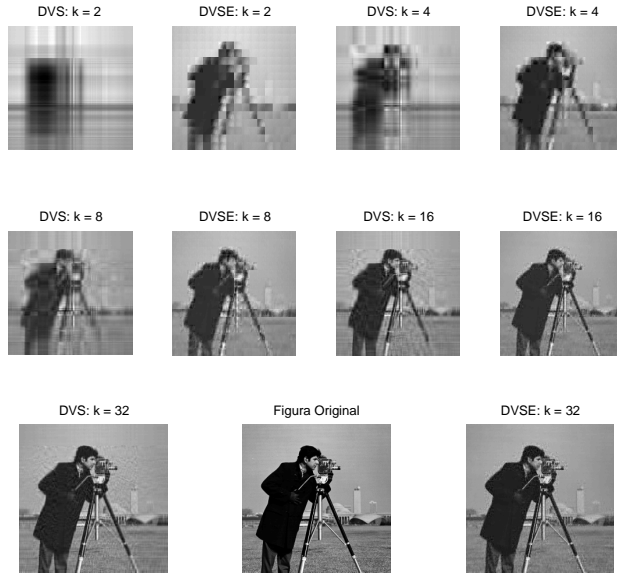


Figura 1.4: Compressões do arquivo Camaraman.tif

$1 \leq k \leq ab$, $X(k, :)$ é a linha formada por todos os elementos do k -ésimo bloco dispostos em linha. Isto é, se $k = tb + t'$, em que $0 \leq t \leq a - 1$ e $1 \leq t' \leq b$, então $X(k, (i - 1).s + j) = A((t.r + i, (t' - 1).s + j))$;

3. Compute a DVS de X e considere os p valores singulares dominantes e seus respectivos vetores singulares à esquerda e à direita, para se obter uma aproximação de posto p de X : X_p .

Para visualizar o arquivo compactado em p vetores $ab \times 1$, p vetores $rs \times 1$ e p valores singulares, é preciso fazer a reformatação inversa, ou seja, computar e então transformar X_p em uma matriz A_p , formada por ab bloco $r \times s$.

Observe que duas colunas consecutivas de X são quase iguais, pois os elementos de cada coluna de X pertencem a blocos distintos de A . Portanto, podemos especular que a matriz X deve ter um posto menor que o de A . Assim, esse processo pode gerar uma imagem com qualidade a partir de um arquivo mais comprimido.

Ilustramos uma aplicação desse algoritmo no arquivo `camaraman.eps`, que vem com a instalação do MATLAB. A matriz dessa imagem tem 256 linhas e 256 colunas. Vamos decompô-la em 256 blocos 16×16 . Podemos observar nas imagens da Figura 1.4 que a DVSE obteve um resultado melhor que usando apenas a DVS.

1.4.4 Exercícios

1. Mostre que $E^2(x) = \|Ax - b\|_2^2$ tem um mínimo absoluto e verifique que $E(x)$ é um mínimo absoluto se e só se $A^T Ax = A^T b$.
2. Seja $M = \{\|x\|_2 \mid E(x) \text{ é mínimo}\}$. Mostre que M tem um único mínimo.
3. Mostre que as colunas de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são linearmente independentes se e só se $A^T A$ é inversível.
4. Mostre que um operador linear P em \mathbb{R}^n é uma projeção ortogonal de \mathbb{R}^n sobre um subespaço vetorial W se e só se $Im P = W$, P é simétrica e $P^2 = P$. Verifique que $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ é uma projeção ortogonal.
5. Qual é a reta que melhor ajusta os seguintes dados:

$y = 2$ em $t = -1$,	$y = 0$ em $t = 0$,
$y = -3$ em $t = 1$,	$y = -5$ em $t = 2$?
6. Qual é a parábola que melhor ajusta os seguintes dados:

$y = 2$ em $t = -1$,	$y = 0$ em $t = 0$,
$y = 2$ em $t = 2$,	$y = 6$ em $t = 3$?
7. A tabela abaixo fornece dados experimentais obtidos com machos albinos de tilápia do Nilo pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas de Pentecostes (CE):

tempo t (mês)	comprimento médio (cm)
0	11.0
1	15.0
2	17.4
3	20.5
4	22.7
5	25.3
6	27.4
7	28.0
8	29.3

Encontre a função linear que melhor ajusta esses dados. ³

8. Qual a função da forma $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, mais próxima de $y = \cos x$, em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

$$\left(\|f - g\| = \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f - g)^2(x) dx} \right)$$

9. Faça o seguinte teste com os dois algoritmos *GS* acima: seja D uma matriz diagonal 20×20 formada pelos números de 1 a 20, nessa ordem. Vamos construir uma matriz A , 20×20 , do seguinte modo recursivo: $A(:, 1) = (1 \dots 1)^T$; para $i = 2, \dots, 20$, $A(:, i) = DA(:, i-1) / \|DA(:, i-1)\|$. Compute os fatores Q e R da matriz A , por cada método e verifique o quanto cada Q calculado é ortogonal, calculando $\text{norm}(Q^T Q - \text{eye}(20))$.
10. Calcule a expressão da reflexão de Householder e verifique que ela é ortogonal e simétrica (unitária e hermitiana, no caso complexo).
11. Mostre que a matriz de Fourier F definida por

$$F_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(i-1)(j-1)},$$

em que $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ é unitária.

³Exercício retirado de [3]

12. Seja A uma matriz $m \times n$ de posto r e

$$A = U\Sigma V^H = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^H,$$

a sua decomposição em valores singulares. Verifique que

$$\|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i y_i - u_i^H b)^2 + \sum_{i=r+1}^m (u_i^H b)^2,$$

em que $y = V^H x$. Mostre que x é uma solução para o problema de quadrados mínimos se e só se

$$y_i = u_i^H b / \sigma_i, \text{ para } i = 1, \dots, r.$$

Conclua que $x_{qm} = Vy$ é a solução de quadrados mínimos se $y_i = u_i^H b / \sigma_i$, para $i = 1, \dots, r$ e $y_i = 0$, para $i = r + 1, \dots, n$.

13. Dada uma matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, mostre que existem matrizes unitárias U e V tais que

$$A = U\Theta V^H,$$

em que Θ é bidiagonal (sugestão: multiplique os dois lados de A por matrizes de Householder apropriadas).

14. (**Decomposição Polar**) Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Mostre que existe matriz unitária Q e matriz hermitiana não negativa P (ou seja, $P = P^H$ e espectro formado por autovalores não negativos) tais que $A = QP$.
15. O comando $[Q, R, P] = qr(A)$ computa a fatoração QR com pivotamento de colunas de A . Teste-o com a matriz A , 4×3 , tal que $A_{ij} = i + j$.
16. Compute a decomposição QR da matriz de Hilbert de ordem 5.
17. O comando $[U, S, V] = svd(A)$ computa a DVS de A . Teste-o com as matrizes acima.

18. O comando $Q = orth(A)$ computa uma base ortonormal para o espaço coluna de A e o comando $Q = null(A)$, uma base ortonormal para o núcleo. Teste-os, pelo menos com as matrizes acima.
19. Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Mostre que A^\dagger satisfaz as condições de Moore-Penrose.
20. Ache exemplos de matrizes $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times r}$ tais que $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$.
21. Ache exemplo de uma matriz A de ordem n tal que $(A^k)^\dagger \neq (A^\dagger)^k$.
22. O comando $B = pinv(A)$ computa a pseudoinversa de A . Teste-o em matrizes retangulares.
23. Ache o plano $z = ax + by + c$ que melhor ajuste os seguintes dados: $z = 0$ em $x = y = 0$, $z = 1$ no mesmo ponto, e $z = 1$ em $x = y = 1$.
24. Computar uma transformação de Householder H tal que Hx é zero abaixo da sua primeira coordenada, em que x é uma matriz $n \times 1$, é feito em MATLAB a partir do comando $[H, R] = qr(x)$. Tome uma matriz A real. Compute sua fatoração QR. Em seguida, bidiagonalize R^T por transformações de Householder. Uma dica: para gerar uma matriz em blocos do tipo

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix},$$

em que I é a matriz identidade $r \times r$ e H , uma matriz de ordem $n - r$ anteriormente definida, dê o comando

$$a = [eye(r)zeros(1, n - r); zeros(n - r, 1)H].$$

Seja P o produto dessas matrizes de Householder. Verifique que $Q^T A P^T$ é bidiagonal superior.

1.5 Autovalores

Calcular autovalores de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é equivalente a resolver o problema não linear de achar as raízes do seu polinômio característico,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Para cada raiz λ dessa equação, temos então que $A - \lambda I$ é uma matriz singular e o espaço solução do sistema homogêneo a ela associado, o núcleo de $A - \lambda I$, tem dimensão maior que zero. Chamamos esse espaço de autoespaço associado ao autovalor λ . Cada vetor não nulo pertencente a esse autoespaço é dito um autovetor de A associado ao autovalor λ .

O polinômio característico é um polinômio de grau n (com coeficiente ± 1). Logo, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, esse polinômio tem n raízes complexas, ou seja, n autovalores. Seja λ um autovalor. Suponha que λ seja uma raiz do polinômio característico de multiplicidade r . Dizemos, então, que a **multiplicidade algébrica** de λ é r . Se a dimensão do autoespaço associado a λ é s , dizemos que a **multiplicidade geométrica** de λ é s . Um resultado clássico diz que a multiplicidade geométrica de um autovalor é sempre menor ou igual a sua multiplicidade algébrica (ver lista de exercícios).

Definição 1.5.1. *Uma matriz é diagonalizável se existe uma matriz inversível P tal que*

$$AP = PD,$$

em que D é diagonal.

É fácil concluir que uma matriz é diagonalizável se e só se cada coluna j de P é autovetor de A associado ao autovalor d_{jj} . Ou seja, que A é diagonalizável se e só se existe uma base de \mathbb{C}^n formada por autovetores de A . Um resultado interessante, deixado para o leitor demonstrar, é que uma matriz A é diagonalizável se e só se a multiplicidade algébrica de cada autovalor é igual a sua multiplicidade geométrica. Vamos ver, a seguir, um exemplo de uma matriz diagonalizável e algumas implicações desse fato. Considere a famosa sequência de Fibonacci

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \quad \text{e, para } k > 1, \quad x_k = x_{k-1} + x_{k-2}.$$

Em termos matriciais, para $k \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

ou seja, $u_k = A^k u_0$. Os autovalores de A são $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Note que $(1, \lambda_1)$ e $(1, \lambda_2)$ são dois autovetores de A associados respectivamente a λ_1 e a λ_2 . Assim,

$$A = SDS^{-1},$$

em que

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, $u_k = SD^k S^{-1} u_0$ e, como

$$S^{-1} u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix},$$

$$u_k = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^k - \lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$x_k = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Agora, para todo k , $\frac{|\lambda_2|^k}{\sqrt{5}} < 0.5$. Concluimos então que x_k é o inteiro mais próximo de $\frac{\lambda_1^k}{\sqrt{5}}$.

Vemos no exemplo acima que, se uma matriz é diagonalizável, as potências da matriz são facilmente computadas, uma vez que conheçamos sua decomposição espectral $A = PDP^{-1}$. Mas como calcular os autovalores de uma matriz? Mesmo se conhecemos os coeficientes do polinômio característico da matriz, por exemplo se a matriz for companheira, calcular suas raízes deve ser feito por métodos iterativos se a ordem da matriz for maior que 4, pois não há fórmulas

algébricas de resolução de polinômios de grau ≥ 5 , conforme teoria de Galois. Os métodos para a computação de autovalores são baseados em álgebra matricial e duas abordagens se destacam na literatura: uma, os métodos de potência direta ou inversa, com ou sem *shift*, que calculam um número pequeno de autovalores da matriz; outra, o método QR, que computa a forma de Schur da matriz a partir de uma forma Hessenberg (ver [21]) da matriz original. Vamos mostrar então o seguinte teorema, que garante que toda matriz é unitariamente similar a uma matriz triangular superior, chamada de forma triangular ou forma de Schur da matriz:

Teorema 1.5.2 (Teorema de Schur). *Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ então existe uma matriz unitária U e existe uma matriz triangular superior T tais que $A = UTU^H$.*

Demonstração:

Esse teorema é obviamente válido para $n = 1$. Vamos supor, por indução, que o teorema é válido para todo k , $1 \leq k < n$. Seja A uma matriz complexa de ordem n . Então A tem um autovetor v , $\|v\|_2 = 1$, associado a um autovalor λ . Seja U_0 uma matriz unitária tal que a primeira coluna seja o vetor v . Então $T_0 = U_0^H A U_0$ é uma matriz tal que $T_0(2 : n, 1) = 0$. Pela hipótese de indução aplicada à matriz $A_1 = T_0(2 : n, 2 : n)$, existe matriz unitária V de ordem $n - 1$ e existe uma matriz triangular T_1 tais que $T_1 = V^H A_1 V$. Seja $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. Note que U_1 é unitária. Seja $U = U_0 U_1$. Então

$$U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda & w^T \\ 0 & T_1 \end{pmatrix},$$

para algum vetor $w \in \mathbb{C}^{n-1}$.

□

Uma consequência interessante do Teorema de Schur é a seguinte: **os autovalores dependem continuamente das entradas da matriz**. Para provar esse fato, considere uma sequência $\{A_k\}$ de matrizes que convergem para A quando $k \rightarrow \infty$. Seja $A_k = Q_k T_k Q_k^H$, em que Q_k é unitária e T_k , triangular superior (forma de Schur de A_k). O conjunto das matrizes unitárias é um conjunto compacto de

$\mathbb{C}^{n \times n}$. Portanto, existe uma subsequência $\{Q_{k_i}\}$ de $\{Q_k\}$ tal que Q_{k_i} converge a uma matriz unitária Q . Por conseguinte,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k^H A_k Q_k = \lim_{k_i \rightarrow \infty} Q_{k_i}^H A_{k_i} Q_{k_i} = Q^H A Q$$

Como $\forall k Q_k^H A_k Q_k$ é triangular superior, $Q^H A Q$ só pode ser triangular superior. Conclusão: os autovalores de A_k , que são as entradas diagonais de T_k , convergem para os autovalores de A , que estão todos na diagonal de $Q^H A Q$.

Outra consequência do teorema de Schur é o famoso teorema de Cayley-Hamilton, que afirma que o polinômio característico de uma matriz A , $p_A(x)$, se anula em A .

Teorema 1.5.3. *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e seja $p_A(x)$ o seu polinômio característico. Então $p_A(A) = 0$.*

Demonstração: Seja UTU^H uma forma de Schur de A . Logo, temos que $p_A(A) = 0$ se e só se $p_A(T) = 0$. Suponha que $p_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$. Então T é uma matriz triangular superior em blocos, cujos blocos diagonais T_{i_i} são matrizes triangulares superiores $n_i \times n_i$ com todos os elementos da diagonal iguais a λ_i , para cada $1 \leq i \leq k$. Note que, para cada i , $(T - \lambda_i I)^{n_i}$ é uma matriz triangular em blocos cujo i -ésimo bloco diagonal é zero (ver lista de exercícios). Não é difícil ver que, então, $(T - \lambda_1 I)^{n_1} \dots (T - \lambda_k I)^{n_k} = 0$ (ver também na lista de exercícios). Ou seja, $p_A(T) = 0$.

□

O conjunto dos polinômios que se anulam em A contém um polinômio mônico (coeficiente do termo de maior grau igual a 1) cujo grau é o mínimo entre os graus dos polinômios desse conjunto. Esse polinômio, que é único (ver lista de exercícios), é chamado de **polinômio mínimo** de A : $p_A^{(m)}(x)$. Esse polinômio divide o polinômio característico e, se λ é autovalor de A , $(x - \lambda)$ divide $p_A^{(m)}(x)$.

1.5.1 Forma de Jordan

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e considere uma forma de Schur de A : $T = U^H A U$, em que U é unitária e T é triangular superior. Seja $p_A(x) = (x -$

$\lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ o polinômio característico de A , em que $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Como o polinômio característico de T é igual ao de A , T pode ser vista como uma matriz triangular superior em blocos, em que cada bloco diagonal é um bloco triangular superior $n_i \times n_i$, com λ_i na diagonal. Note que $(T - \lambda_1 I)^{n_1} x = 0$ se e só se $x \in [e_1, \dots, e_{n_1}]$. Além disso, para cada $i > 1$, $(T - \lambda_i)^{n_i} x = 0$ é um sistema triangular cujo espaço solução é gerado por n_i vetores linearmente independentes, v_{i1}, \dots, v_{in_i} , cujas coordenadas, de $(n_1 + \dots + n_i) + 1$ até n , são todas nulas; e, para cada $r = 1 : n_1$, $v_{ir}(n_1 + \dots + n_{i-1} + r) = 1$ e $v_{ir}(n_1 + \dots + n_{i-1} + s) = 0$, se $s \neq r$. A união dessas bases, $\cup_{i=1}^k \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$ forma uma base α para \mathbb{C}^n . Assim,

$$\mathbb{C}^n = \ker(T - \lambda_1 I)^{n_1} \oplus \dots \oplus \ker(T - \lambda_k I)^{n_k}.$$

Como $x \in \ker(T - \lambda_i I)^{n_i}$ se e somente se $Ux \in \ker(A - \lambda_i I)^{n_i}$, temos também que:

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda_1 I)^{n_1} \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_k I)^{n_k}.$$

Note que, se P é a matriz cujas colunas são os vetores da base α ,

$$AUP = UPD_k, \text{ em que } D_k \text{ é uma matriz diagonal em blocos.}$$

Vamos denotar Pv_{ir} por w_{ir} , $r = 1 : n_i$, $i = 1 : k$.

Lema 1.5.4. *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Seja $p_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ o polinômio característico de A , em que $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Considere uma base de \mathbb{C}^n , $\cup_{i=1}^k \{w_{i1}, \dots, w_{in_i}\}$, relacionada com a matriz A como acima. Então, dado $i \in \{1, \dots, k\}$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq i$, temos que $(A - \lambda_j I)^{n_j} v_{i1}, \dots, (A - \lambda_j I)^{n_j} v_{in_i}$ formam uma base para $\ker(A - \lambda_i I)^{n_i}$.*

Demonstração:

É fácil ver que, para cada $r = 1 : n_i$, $(A - \lambda_j I)^{n_j} v_{ir}$ pertence a $\ker(A - \lambda_i I)^{n_i}$ (multiplique-os). Vamos mostrar, então, que o conjunto desses vetores é l.i.. Suponha, por absurdo, que não. Então, sem perda de generalidade, vamos supor que $(A - \lambda_j I)^{n_j} v_{i1} = \sum_{r=2}^{n_i} (A - \lambda_j I)^{n_j} v_{ir}$. Mas isso significa que

$$(A - \lambda_j I)^{n_j} \left(v_{i1} - \sum_{r=2}^{n_i} v_{ir} \right) = 0.$$

Ou seja, que $v_{i1} - \sum_{r=2}^{n_i} v_{ir} \in \ker(A - \lambda_j I)^{n_j}$. Mas como esses espaços só têm o vetor zero em comum, $v_{i1} - \sum_{r=2}^{n_i} v_{ir} = 0$, o que é um absurdo, pois esses vetores são linearmente independentes. \square

Vamos usar esse lema para mostrar que, se m_i é o expoente de $(x - \lambda_i)$ no polinômio mínimo, então $\ker(A - \lambda_i I)^{n_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$.

Lema 1.5.5. *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Seja $p_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ o polinômio característico de A , em que $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Seja $p_A^{(m)}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ o polinômio mínimo de A . Então, para todo $i = 1 : k$, $\ker(A - \lambda_i I)^{n_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade, vamos supor $i = 1$. Para mostrar que $\ker(A - \lambda_1 I)^{m_1} \subset \ker(A - \lambda_1 I)^{n_1}$, notemos que um conjunto li de vetores de $\ker(A - \lambda_1 I)^{n_1}$ é levado em outro conjunto li de vetores de $\ker(A - \lambda_1 I)^{n_1}$ pela multiplicação por $(A - \lambda_i I)^{n_i}$, se $i \neq 1$. Como $(A - \lambda_1 I)^{m_1} \dots (A - \lambda_k I)^{m_k} = 0$, temos também que $(A - \lambda_1 I)^{m_1} (A - \lambda_2 I)^{n_2} \dots (A - \lambda_k I)^{n_k} = 0$. Qualquer que seja o conjunto li de vetores de $\ker(A - \lambda_1 I)^{n_1}$, a multiplicação por $(A - \lambda_2 I)^{n_2} \dots (A - \lambda_k I)^{n_k}$ o transformará em outro conjunto li de vetores de $\ker(A - \lambda_1 I)^{n_1}$, que é levado em zero pela multiplicação por $(A - \lambda_1 I)^{m_1}$. \square

Um resultado que resume o que foi feito acima é o seguinte:

Teorema 1.5.6 (Teorema de decomposição primária). *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Seja $p_A^{(m)}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ o polinômio mínimo de A , em que $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Então*

$$\mathbb{C}^n = \ker(T - \lambda_1 I)^{m_1} \oplus \dots \oplus \ker(T - \lambda_k I)^{m_k}.$$

Um corolário do teorema (ou do lema), cuja demonstração é deixada como exercício, é o seguinte:

Corolário 1.5.7. *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Seja $p_A^{(m)}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ o polinômio mínimo de A . Então A é diagonalizável se e somente se, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, $m_i = 1$.*

Seja $v \in \mathbb{C}^n$. Seja $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Vamos definir $Z(v, B)$, o subespaço cíclico gerado por v e B .

Definição 1.5.8. *Seja $v \in \mathbb{C}^n$. Seja $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então $Z(v, B) = \{q(B)v \mid q \text{ é polinômio complexo}\}$. Se existe um vetor $w \neq 0$ tal que $Z(w, B) = \mathbb{C}^n$, w é dito um vetor cíclico de B .*

Observe que os vetores $v, Bv, B^2v, \dots, B^{n-1}v$ geram $Z(v, B)$ pois, pelo polinômio característico, $B^n v$ é uma combinação linear desses vetores e, logo, para todo $m > n$, $B^m v$ é gerado por aqueles vetores. Assim, $v, Bv, B^2v, \dots, B^r v$ é uma base de $Z(v, B)$ para algum r .

Vamos supor agora que A é uma matriz tal que $(x - \lambda)^n$ é o seu polinômio característico e $(x - \lambda)^m$, o seu polinômio mínimo. Nesse caso, vemos que, para qualquer $v \neq 0$, uma base de $Z(v, A - \lambda I)$ tem no máximo m elementos.

Lema 1.5.9. *Seja A uma matriz tal que $(x - \lambda)^n$ é o seu polinômio característico e $(x - \lambda)^m$, o seu polinômio mínimo. Então existe, pelo menos, um vetor $v \neq 0$ tal que a dimensão de $Z(v, A - \lambda I)$ seja m .*

Demonstração:

Primeiro, vemos que $(A - \lambda I)^{m-1} \neq 0$ (por que?). Assim, existe $v \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)^{m-1}v \neq 0$. Também, temos que, para todo $0 \leq i \leq m-2$, $v_{1,m-i} = (A - \lambda I)^i v \neq 0$. Além disso, eles são linearmente independentes, pois se $a_0 v + a_1 (A - \lambda I)v + \dots + a_{m-1} (A - \lambda I)^{m-1}v = 0$ então, multiplicando os dois lados por $(A - \lambda I)^{m-1}$, obtenho que $a_0 = 0$; multiplicando os dois lados por $(A - \lambda I)^{m-2}$, obtenho que $a_1 = 0$; e, assim por diante, obtenho que $a_{m-1} = 0$.

□

Seja $v \neq 0$. Seja $\{v, (A - \lambda I)v, \dots, (A - \lambda I)^{r-1}v\}$ uma base para $Z(v, A - \lambda I)$. Então $(A - \lambda I)^r v$ é uma combinação desses vetores. Ou seja, existem a_{r-1}, \dots, a_1, a_0 tais que $(A - \lambda I)^r v + a_{r-1} (A - \lambda I)^{r-1}v + \dots + a_1 (A - \lambda I)v + a_0 v = 0$. O polinômio $q(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é chamado de polinômio anulador de v por $(A - \lambda I)$.

Teorema 1.5.10 (Teorema da Decomposição Racional). *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então existem r vetores não nulos v_1, \dots, v_r , com seus respectivos anuladores q_1, \dots, q_r por A , tais que*

$$(a) \mathbb{C}^n = Z(v_1, A) \oplus \dots \oplus Z(v_r, A);$$

(b) q_1 é o polinômio mínimo de A e, se $1 \leq i \leq r-1$, então q_{i+1} divide q_i .

Além disso, o inteiro r e os anuladores são determinados de modo único, isto é, se $\mathbb{C}^n = Z(w_1, A) \oplus \dots \oplus Z(w_s, A)$ com anuladores f_1, \dots, f_s que satisfazem (b), então $r = s$ e, para todo i , $q_i = f_i$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [25]. Por outro lado, observe que, se v é um vetor cíclico de A , então a matriz do operador linear definido por A , em relação à base cíclica, é uma matriz tipo companheira:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

em que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ é o polinômio característico (e mínimo) de A .

Agora, vamos a uma demonstração da forma de Jordan para A , pelo teorema da decomposição racional. Para isso, vamos considerar, sem perda de generalidade (pelo teorema da decomposição primária), que nossa matriz só tem um autovalor λ .

Teorema 1.5.11 (Forma de Jordan). *Seja A uma matriz tal que $(x - \lambda)^n$ é o seu polinômio característico e $(x - \lambda)^m$, o seu polinômio mínimo. Seja p a multiplicidade geométrica de λ . Então existe uma base de \mathbb{C}^n , em relação à qual a matriz $(A - \lambda I)$ é uma matriz diagonal em blocos, com p blocos na diagonal do tipo*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Existe pelo menos um bloco de ordem m , todos os outros têm ordem menor ou igual a m .

Demonstração:

Se $(x - \lambda)^m$ é o polinômio mínimo de A , então o polinômio mínimo de $A - \lambda I$ é x^m . Seja $Z(v_1, A - \lambda I) \oplus \dots \oplus Z(v_r, A - \lambda I)$ uma decomposição racional de \mathbb{C}^n , com seus respectivos anuladores q_1, \dots, q_r . Como $q_1 = p_1 = x^m$, para cada $2 \leq i \leq r$, q_i é da forma x^{k_i} para algum $k_i \leq m$. Considere a seguinte base ordenada de \mathbb{C}^n :

$$\alpha = \cup_{i=1}^r \{(A - \lambda I)^{k_i-1} v_i, \dots, (A - \lambda I) v_i, v_i\}.$$

Para cada i , $(A - \lambda I)^{k_i} v_i = 0$. Logo, o operador, que é representado na base canônica por $(A - \lambda I)$, em relação à base α é descrito por uma matriz bidiagonal N , como no enunciado do teorema. O primeiro bloco, que é o de maior ordem, é de ordem m . Vamos mostrar que $r = p$. Como, para cada $1 \leq i \leq r$, $(A - \lambda I)^{k_i-1} v_i \neq 0$ e $(A - \lambda I)^{k_i} v_i = 0$, temos que $r \leq p$, pois $(A - \lambda I)^{k_i-1} v_i$, $i = 1, \dots, r$ é um autovetor de A . Por outro lado, p é a dimensão do núcleo de $(A - \lambda I)$, que coincide com o número de colunas nulas de N , que é r .

□

Assim, existe uma matriz P inversível (cujas colunas são os vetores de α) tal que $(A - \lambda I)P = PN$, ou seja, que

$$A = P(\lambda I + N)P^{-1}.$$

$\lambda I + N$ é dita a forma de Jordan de A .

Na próxima subseção, discutimos uma classe de matrizes diagonalizáveis, as matrizes normais.

1.5.2 Matrizes Normais

Um resultado clássico de Álgebra Linear é que, dado um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V com produto interno \langle, \rangle , existe um único operador linear T^* em V tal que, para todos $v, w \in V$, $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$. T^* é chamado de **operador adjunto** de T (ver lista de exercícios). Um fato interessante é que, se α é uma base ortonormal de V em relação ao produto interno \langle, \rangle , então $T_\alpha^* = T_\alpha^H$ (ver lista de exercícios).

Definição 1.5.12. *Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno. Um operador linear T em V é dito normal se $T \circ T^* = T^* \circ T$.*

Essa definição tem uma contrapartida em matrizes, conforme o lema a seguir, cuja demonstração é deixada para o leitor.

Lema 1.5.13. *Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno. Um operador linear T em V é normal se e só se, para toda base α ortonormal em V (em relação ao produto interno definido em V), $T_\alpha T_\alpha^H = T_\alpha^H T_\alpha$.*

Esse lema motiva a definição de matrizes normais:

Definição 1.5.14. *Matrizes normais são matrizes quadradas que comutam com sua hermitiana, isto é, são matrizes $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que $AA^H = A^H A$.*

As matrizes simétricas reais, as matrizes hermitianas e as matrizes unitárias são exemplos de matrizes normais. Um teorema central em Álgebra Linear é o famoso Teorema Espectral para operadores em espaços de dimensão finita com produto interno, que estabelece que um operador é normal se e somente se existe uma base ortonormal (em relação ao produto interno) formada por autovetores do operador. Vamos mostrar aqui esse teorema a partir de teoria de matrizes. Primeiro, vamos mostrar o teorema espectral para matrizes normais. Para isso, precisamos do lema a seguir.

Lema 1.5.15. *Uma matriz triangular é normal se e só se é diagonal.*

A prova desse lema é deixada para o leitor como exercício (ver lista de exercícios).

Teorema 1.5.16 (Teorema Espectral para Matrizes Normais). *Uma matriz A é normal se e somente se existe uma matriz unitária U e existe uma matriz diagonal D tais que $A = UDU^H$.*

Demonstração:

A recíproca é obviamente verdadeira. Vamos supor então que A é normal. Seja $A = USU^H$ uma decomposição de Schur de A . Logo, $A^H = US^H U^H$. Como A é normal, concluímos que $S.S^H = S^H.S$. Pelo lema acima, S é diagonal.

□

Finalmente, podemos demonstrar a versão do Teorema Espectral para operadores:

Teorema 1.5.17 (Teorema Espectral para Operadores Lineares Normais). *Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. T é normal se e só se existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T .*

Demonstração:

Se T é normal então, pelo Lema 1.5.13, se α é uma base ortonormal de V , T_α é normal. Logo, existem uma matriz unitária U e uma matriz diagonal D tais que $T_\alpha = UDU^H$. Seja β a base de V tal que $I_\alpha^\beta = U$. Logo,

$$T_\beta = I_\beta^\alpha T_\alpha I_\alpha^\beta = U^H U D U^H U = D.$$

Para ver que β é ortonormal em relação ao produto interno de V , basta ver que a matriz do produto interno em relação à base β é $I_\beta^\alpha I I_\alpha^\beta = U^H U = I$. Como T_β é diagonal, os vetores da base β são autovetores de T .

Para mostrar que a recíproca é verdadeira, basta ver que, como T_β é diagonal, T_β é normal.

□

1.5.3 Exercícios

1. Ache os autovalores, e respectivos autoespaços, da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Seja $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Seja $A = [e_2^T; e_3^T a^T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$.

Mostre que $\det(A - \lambda I) = (-1)^3 (\lambda^3 - a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0)$.

3. Seja $a^T = (a_0 a_1 \dots a_{n-1})$. Mostre, por indução na ordem da matriz, que, para todo $n \geq 2$, o polinômio característico da matriz companheira $A = [e_2^T; e_3^T; \dots; e_n^T; a^T]$ é

$$(-1)^n (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0).$$

4. Mostre que se A é uma matriz quadrada então existe matriz P tal que $AP = PD$, D diagonal, se e só se as colunas de P são autovetores de A . Conclua então que A é diagonalizável se e só se existe uma matriz P cujos vetores coluna são uma base de autovetores de A .
5. Mostre que a multiplicidade geométrica de um autovalor é sempre menor ou igual a sua multiplicidade algébrica (sugestão: seja s a multiplicidade geométrica de um autovalor λ . Seja α uma base de \mathbb{C}^n tal que os s primeiros vetores formam uma base para o autoespaço associado a λ . Verifique que a matriz $B = [I]_{can}^\alpha A [I]_{can}^\alpha$ é uma matriz triangular superior em blocos e, assim, $\det(A - xI) = \det(B - xI) = (\lambda - x)^s q(x)$.
6. Mostre que uma matriz é diagonalizável se e só se a multiplicidade algébrica de cada autovalor de A é igual a sua multiplicidade geométrica.
7. Seja T uma matriz triangular $n \times n$ tal que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $T_{ii} = \lambda$, para algum escalar λ . Mostre que $(T - \lambda I)^n = 0$.
8. Seja T uma matriz $n \times n$ triangular superior em blocos, isto é,

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \cdots & \mathbf{T}_{1k} \\ 0 & \mathbf{T}_{22} & \cdots & \mathbf{T}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{T}_{kk} \end{bmatrix},$$

em que T_{ii} é uma matriz $n_i \times n_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, e $n_1 + \dots + n_k = n$.

- (a) Mostre por indução que, para todo inteiro $m > 0$, T^m é uma matriz diagonal em blocos de tamanhos idênticos tal que, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, $(T^m)_{ii} = (T_{ii})^m$.

- (b) Suponha que, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$, o bloco T_{ii} , $n_i \times n_i$, seja uma matriz triangular superior com todos os elementos da sua diagonal iguais a um escalar λ . Conclua, usando o exercício anterior e o item anterior deste exercício, que $(T - \lambda I)^m$ é uma matriz com o i -ésimo bloco da diagonal igual a zero para $m \geq n_i$.
9. Sejam T_1, \dots, T_k matrizes triangulares em blocos, como no exercício anterior, tais que $(T_i)_{ii} = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Mostre que $T_1 T_2 \cdots T_k = 0$.
10. Mostre que, se A é diagonalizável, então $p_A(A) = 0$.
11. (Uma outra demonstração do teorema de Cayley-Hamilton) Suponha que A não é diagonalizável. Como as matrizes diagonalizáveis formam um subconjunto denso do conjunto das matrizes complexas, então existe uma sequência de matrizes diagonalizáveis que converge para A , isto é, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Como o determinante é uma função contínua de $\mathbb{C}^{n \times n}$ em \mathbb{C} (na verdade, analítica), verifique que as funções polinomiais $f_n(x) = \det(xI - A_n)$ convergem uniformemente para a função $f(x) = \det(xI - A)$. Considere, agora, F_n , a extensão de cada função f_n de \mathbb{C} a $\mathbb{C}^{n \times n}$. Obviamente, a convergência de F_n a F (a extensão de f) é uniforme. Logo, a sequência $F_n(A_n)$, que é constante e igual a zero, converge a $F(A)$.
12. Mostre que, se p e q são dois polinômios complexos de grau m que se anulam em uma matriz A de ordem n e m é o menor grau em que isso acontece, então $p = aq$, em que $a \in \mathbb{C}$ (sugestão: use o algoritmo de Euclides de divisão de polinômios). Conclua que o polinômio mínimo é único.
13. Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Seja $p_A^{(m)}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ o polinômio mínimo de A . Mostre que A é diagonalizável se e somente se, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, $m_i = 1$.
14. Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Seja m a ordem do polinômio mínimo de A . Mostre que se A é inversível então A^{-1} é um polinômio em A de grau $m - 1$.

15. Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $(x - \lambda)^n$ é o seu polinômio característico e $(x - \lambda)^m$, o seu polinômio mínimo. Mostre que, para qualquer $v \neq 0$, uma base de $Z(v, A - \lambda I)$ tem no máximo m elementos.
16. Seja $(x - \lambda)^m$ o polinômio mínimo de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Suponha que existam dois vetores $v, w \in \mathbb{C}^n$, ambos não nulos, tais que $(A - \lambda I)^{m-1}v$ e $(A - \lambda I)^{m-1}w$ sejam linearmente independentes. Mostre que, então, $\{v, (A - \lambda I)v, \dots, (A - \lambda I)^{m-1}v\} \cup \{w, (A - \lambda I)vw, \dots, (A - \lambda I)^{m-1}w\}$ é linearmente independente.
17. Mostre que existe um vetor cíclico de A se e só se o polinômio característico de A é também o seu polinômio mínimo (sugestão: use o teorema da decomposição racional).
18. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão n com produto interno. Seja α uma base ortonormal de V em relação ao produto interno. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear.
- (a) Mostre que existe um único operador linear $T^* : V \rightarrow V$ tal que, para todos $v, w \in V$, $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$ (sugestão: seja T^* o operador tal que $T^*_\alpha = (T_\alpha)^H$. Mostre que T^* definido assim satisfaz a propriedade).
- (b) Mostre que T é normal se e só se, para toda base ortonormal α em relação ao produto interno, T_α é uma matriz normal.
19. Mostre que uma matriz triangular é normal se e só se é diagonal.
20. Mostre que se A é uma matriz real e simétrica então existe uma matriz ortogonal Q tal que $Q^T A Q$ é diagonal. Conclua então que os autovalores de uma matriz simétrica são reais e associados a eles existe uma base ortonormal do \mathbb{R}^n de autovetores (sugestão: use o teorema espectral para matrizes normais).
21. Mostre que, se P é inversível, então A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinômio característico.
22. Mostre que se T é uma matriz triangular (superior ou inferior) e $p(x)$ é o seu polinômio característico, $p(T) = 0$.

23. O polinômio mínimo de uma matriz A é o polinômio mônico de menor grau que se anula em A (logo, divide p_A). Mostre que se P é inversível, as matrizes A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinômio mínimo.

Capítulo 2

Matrizes Especiais

2.1 Matrizes tipo Pascal: Bernstein, Pascal Generalizada etc

No primeiro capítulo, definimos P_n , a matriz de Pascal triangular inferior de ordem n :

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & , \text{ se } i \geq j; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

O primeiro teorema nos dá uma outra caracterização da matriz de Pascal.

Teorema 2.1.1. $P_n = e^{H_n}$, em que

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & \\ & 2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & n-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração:

Sabemos que, para cada $1 \leq i \leq n$, a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) = H_n y(t), \quad y(0) = e_i,$$

em $t = 1$ é $e^{H_n} e_i$, a i -ésima coluna de e^{H_n} . Por outro lado, este sistema tem a seguinte solução, calculada diretamente:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 0 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ y_i(t) &= 1 \\ y_{i+1}(t) &= it \\ y_{i+2}(t) &= \frac{(i+1)i}{2} t^2 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ y_n(t) &= \binom{n-1}{n-i} t^{n-i} \end{aligned}$$

que, avaliada em $t = 1$, resulta no vetor

$$\left(0 \dots 0 \binom{i-1}{0} \binom{i}{1} \dots \binom{n-1}{i-1} \right)^T,$$

que é a i -ésima coluna de P_n .

□

Para apresentar outras propriedades dessa matriz, vamos inserir essa matriz em uma classe de matrizes, que chamamos de matrizes de Pascal generalizadas.

Definição 2.1.2. *Seja $t \in \mathbb{R}$. A matriz $P_n[t]$ é a matriz $n \times n$ triangular inferior definida para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ por*

$$(P_n[t])_{ij} = \begin{cases} t^{i-j} \binom{i-1}{j-1} & , \text{ se } i \geq j; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

No lema abaixo, vemos alguns resultados sobre essa classe de matrizes. A demonstração de alguns desses resultados estão em [1], [10], [16].

Lema 2.1.3. *Seja $P_n[t]$ uma matriz de Pascal triangular inferior generalizada. Então*

- (a) $P_n[0] = I_n$ e $P_n[1] = P_n$;
- (b) $P_n[t]P_n[s] = P_n[t + s]$;
- (c) $(P_n[t])^{-1} = P_n[-t]$;
- (d) *Suponha $t \neq 0$ e seja $G_n(t)$ a matriz diagonal $n \times n$ tal que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $(G_n(t))_{ii} = t^{i-1}$. Então $P_n[t] = G_n(t)P_nG_n(t^{-1})$. Em particular, $P_n^{-1} = G_n(-1)P_nG_n(-1)$.*
- (e)
$$P_n[t] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} H_n^i$$
- (f) *Se $v = (1 t t^2 \dots t^{n-1})^T$, então, para todo inteiro k , temos que $P_n^k v = (1 (t+k) (t+k)^2 \dots (t+k)^{n-1})^T$.*

Note que no item (d) do lema, vemos uma fórmula explícita da inversa de P_n ; no item (e), vemos uma expressão da potência t de P_n , para qualquer t real:

$$P_n^t = P_n[t].$$

As matrizes de Pascal estão intimamente ligadas às matrizes de Bernstein, denotadas por $B_n^e(s)$, que são as matrizes triangulares inferiores tais que, para cada $n \geq i \geq j \geq 1$,

$$(B_n^e)_{ij}(s) = \binom{i-1}{j-1} s^{j-1} (1-s)^{i-j}.$$

Por exemplo,

$$B_4^e(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-s) & s & 0 & 0 \\ (1-s)^2 & 2(1-s)s & s^2 & 0 \\ (1-s)^3 & 3(1-s)^2s & 3(1-s)s^2 & s^3 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que

Lema 2.1.4.

$$B_n^e(s) = G_n(1-s)P_nG_n(s)G_n(1/(1-s)) =$$

$$\begin{aligned}
&= G_n(1-s)P_nG_n(s)G_n(1-s)^{-1} = \\
&= G_n(1-s)P_nG_n(s/(1-s)),
\end{aligned}$$

em que $G_n(s)$ é a matriz diagonal tal que $(G_n(s))_{ii} = s^{i-1}$, para todo $i = 1 : n$.

Um teorema importante, que conecta as matrizes de Pascal e as matrizes de Bernstein, é o seguinte:

Teorema 2.1.5. *Seja $B_n^e(s)$ uma matriz de Bernstein de ordem n . Então*

$$B_n^e(s) = P_nG_n(s)P_n^{-1},$$

em que P_n é a matriz de Pascal triangular inferior e $G_n(s)$ é a matriz diagonal tal que $(G_n(s))_{ii} = s^{i-1}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

A demonstração desse teorema fica a cargo do leitor, mas pode ser encontrada em [1].

2.1.1 Curvas de Bézier

Uma curva muito utilizada em CAGD (Computer-Aided Geometric Design) é a curva de Bézier. Esta curva foi descoberta independentemente por Bézier e Casteljau, dois engenheiros que trabalhavam em duas indústrias automobilísticas francesas nas décadas de 50 e 60. Bézier levou o crédito do nome da curva, enquanto que Casteljau ficou com o crédito de um algoritmo que computa essas curvas de modo muito eficiente. Dados n pontos $Q_0 = (x_0, y_0)$, ..., $Q_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$, a curva de Bézier de grau $n-1$ definida por esses pontos é o conjunto de pontos $B(s) = (x(s), y(s))$, satisfazendo para todo $s \in [0, 1]$ a seguinte equação:

$$B(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} s^i (1-s)^{n-1-i} Q_i.$$

Outra forma de representar essa curva é via matriz de Bernstein:

$$(x(s) \ y(s)) = e_n^T B_n^e(s) Q$$

em que Q é a matriz $n \times 2$ tal que $Q(i, :) = (x_i \ y_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, e $B_n^e(s)$ é uma matriz de Bernstein de ordem n .

Algoritmo 2.1.1 Algoritmo de Casteljaun

```

n = length(x);
x = x(:);
ss = 1 - s;
for k = 2 : n do
    for t = n : -1 : k do
        x(t) = ss * x(t - 1) + s * x(t);
    end for
end for
b(s) = x(n)

```

O famoso algoritmo de Casteljaun é, na realidade, um algoritmo de multiplicação de uma matriz de Bernstein por um vetor. Para cada $s \in [0, 1]$, o algoritmo calcula recursivamente cada entrada. Assim, a n ésima entrada, que é o valor da curva de Bézier em s , depende de todos os valores obtidos para as suas entradas anteriores.

Observe que, pelo lema 2.1.4, a curva de Bézier pode também ser representada por

$$B(s) = (1 - s)^{n-1} e_n^T P_n G_n(s/(1 - s)) Q.$$

Note que, por essa formulação, se eu quero calcular o ponto da curva em s , preciso avaliar o seguinte polinômio vetorial em $s/(1 - s)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x_i \frac{s}{1-s}^i.$$

A avaliação desse polinômio pode ser feita pelo singelo esquema de Horner, descrito no algoritmo 2.1.2.

Algoritmo 2.1.2 Esquema de Horner

```

n = length(a);
b = a(n);
for k = n - 1 : -1 : 1 do
    b = a(k) + s * b;
end for

```

Algoritmo 2.1.3 Algoritmo VS

```

n = size(Q, 1);
P = abs(pascal(n, 1));
v = P(end, :);
B = Q(1, :);
for k = 1 : n - 1 do
    B = [B; v(k + 1) * Q(k + 1, :)];
end for
s1 = s(s < 1/2);
t = s1 ./ (1 - s1);
aux1 = B(n, 1);
aux2 = B(n, 2);
for k = 1 : n - 1 do
    aux1 = t * aux1 + B(n - i, 1);
    aux2 = t * aux2 + B(n - i, 2);
end for
f1 = (1 - s1).^(n - 1) * aux1;
f2 = (1 - s1).^(n - 1) * aux2;
s2 = s(s >= 1/2);
t = (1 - s2) ./ s2;
aux1 = B(1, 1);
aux2 = B(1, 2);
for k = 2 : n do
    aux1 = t * aux1 + B(i, 1);
    aux2 = t * aux2 + B(i, 2);
end for
f1 = [f1; s2.^(n - 1) * aux1];
f2 = [f2; s2.^(n - 1) * aux2];
f = [f1 f2];

```

A avaliação de polinômios por Horner fica instável, em geral, para $s > 1$. Para evitar a instabilidade decorrente disso, podemos dividir o processo de avaliação em dois subintervalos: $[0, 1/2)$ e $[1/2, 1]$. Note que $s/(1-s) < 1$ se e somente se $s < 1/2$. Então, no intervalo $[0, 1/2)$, avaliamos o polinômio $(1-s)^{n-1} e_n^T P_n G_n(s/(1-s)) Q$.

Note que a curva $B(s)$ corresponde à curva $B_r(1-s)$, que é a curva definida a partir dos pontos na ordem inversa. Isso é traduzido

matricialmente por

$$B_n^e(s)Q = B_n^e(1-s)Q_r, \text{ em que } Q_r = Q(n : -1 : 1, n : -1 : 1).$$

Portanto, no intervalo $[1/2, 1]$, avaliaremos o polinômio

$$s^{n-1}e_n^T P_n G_n((1-s)/s)Q_r.$$

Temos, então, outro algoritmo de computação da curva de Bézier, mais eficiente que o de Casteljau em tempo de computação, que aparece na literatura como algoritmo VS [39].

Na Figura 2.1, podemos ver uma curva de Bézier computada pelo método de Casteljau. Essa curva fica bem definida a partir dos seus chamados pontos de controle, que aparecem conectados por uma linha pontilhada. Observe que a curva passa obrigatoriamente pelos pontos inicial e final.

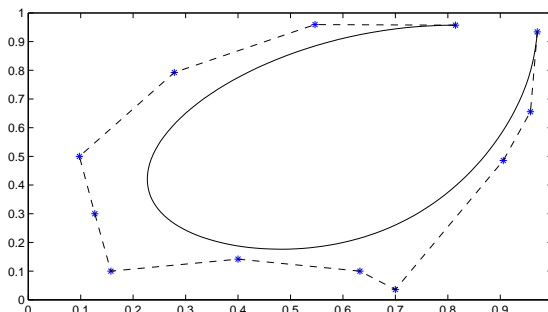


Figura 2.1: Curva de Bézier - curva sólida: curva de Bézier de grau 11; curva pontilhada: curva poligonal definida pelos 12 pontos

2.2 Matrizes de Vandermonde

Vimos que um problema de quadrados mínimos recai em encontrar uma solução para um sistema impossível do tipo $V^T x = b$, em que V é uma matriz de Vandermonde $n \times p$ formada a partir das p amostras do domínio. Procura-se uma solução x , cujas coordenadas são os

coeficientes do polinômio de grau $n - 1$ mais próximo aos pontos da imagem, representada por b , no sentido da soma dos quadrados das diferenças entre as ordenadas dos pontos da imagem e as ordenadas respectivas obtidas pela avaliação do polinômio ser mínima.

Na seção sobre matrizes de Hankel veremos que uma matriz de Hankel H , construída com amostras tomadas em tempos igualmente espaçados de funções do tipo $h(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{(a_j + ib_j)t}$, tem uma decomposição $H = VDV^T$, em que V é de Vandermonde e D é diagonal. A pergunta natural que surge é a seguinte: toda matriz de Hankel H tem fatoração VDV^T , como essa? A resposta é, em geral, não. Mas, se as matrizes de Hankel forem inversíveis, a resposta é sim. A demonstração desse teorema foi feita no primeiro meado do século XX, usando técnicas de Álgebra de Polinômios. Uma demonstração via Teoria de Matrizes desse teorema e aplicações dessa fatoração em CAGD (Computer-Aided Geometric Design) podem ser vistas em [5].

Um fato interessante é que matrizes de Vandermonde quadradas de ordem n , $V = \text{vander}[b_1, \dots, b_n]$, são sempre inversíveis, se $b_i \neq b_j$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Isso é demonstrado a seguir.

Teorema 2.2.1. *Seja $V = \text{vander}[b_1, \dots, b_n]$ uma matriz de Vandermonde de ordem $n \geq 2$. Se, para todos $1 \leq i < j \leq n$, $b_i \neq b_j$, então o determinante de V é igual a*

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i).$$

Demonstração: A prova é por indução em n . Para $n = 2$,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = b_2 - b_1.$$

Suponha que o teorema é verdadeiro para todo $n \geq 2$. Seja V a matriz de Vandermonde de ordem $(n + 1)$ definida por

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & \cdots & b_n & x \\ b_1^2 & \cdots & b_n^2 & x^2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_1^n & \cdots & b_n^n & x^n \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é um polinômio p de grau n em x . Mais: o coeficiente de x^n , pela expansão de Laplace, é $\det(\text{vander}[b_1, \dots, b_n])$ que, por hipótese de indução, é $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)$. Note que $p(x)$ se anula em b_1, \dots, b_n , pois se x assume esses valores a matriz V fica com duas colunas iguais, anulando assim o determinante de V . Ou seja,

$$p(x) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right) (x - b_1) \dots (x - b_n).$$

□

2.2.1 Interpolação Polinomial

As matrizes de Vandermonde surgem naturalmente na interpolação polinomial. Por exemplo, considere o problema de encontrar uma função cúbica que passa pelos pontos $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ e $(4, 7)$. Temos que achar então $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que a função polinomial $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ passe por esses pontos. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Esse sistema está na forma $V^T x = f$, em que $V = \text{vander}[1, 2, 3, 4]$ e $f = (2\ 3\ 5\ 7)^T$.

Um algoritmo de resolução de um sistema da forma $V^T x = f$ é descrito em [21]. Nesse algoritmo, o primeiro passo para calcular os coeficientes a_0, \dots, a_n de um polinômio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ tal que $p(x_i) = f_i$ é calcular os coeficientes da representação de Newton desse polinômio:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i).$$

Esses coeficientes podem ser calculadas pelo seguinte algoritmo:

O próximo passo é computar a a partir de c . Não vamos explicar aqui como isso é feito. Contudo, em [21], podemos ver como isso é

Algoritmo 2.2.1 Esquema de Newton

```

c = f;
for k = 0 : n - 1 do
  for i = n : -1 : k + 1 do
    ci = (ci - ci-1)/(xi - xi-k-1);
  end for
end for

```

Algoritmo 2.2.2 Resolução de $V^T a = f$

```

for k = 0 : n - 1 do
  for i = n : -1 : k + 1 do
    f(i) = (f(i) - f(i - 1))/(x(i) - x(i - k - 1));
  end for
end for
for k = n - 1 : -1 : 0 do
  for i = k : n - 1 do
    f(i) = f(i) - f(i + 1)x(k);
  end for
end for

```

construído. O resultado final é o algoritmo 2.2.2, em que fica gravado sobre f a solução a do sistema.

Outro sistema importante é o $Vx = b$, sistema esse que aparecerá na seção sobre matrizes de Hankel. Um algoritmo de resolução desses sistemas é o algoritmo 2.2.3.

2.3 Matrizes de Hankel

Vários sistemas mecânicos lineares complexos podem ser modelados como um sistema equivalente massa-mola amortecedor com um grau de liberdade. Usualmente, considera-se modelos em que o amortecimento é viscoso, proporcional à velocidade da mola. A equação de movimento oscilatório livre amortecido é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

Algoritmo 2.2.3 Sistema $Vw = x$

```

n = length(a);
w = x(:);
for k = 1 : n - 1 do
    for i = n : -1 : k + 1 do
        w(i) = w(i) - a(k) * w(i - 1);
    end for
end for
for k = n - 1 : -1 : 1 do
    for i = k + 1 : n do
        w(i) = w(i) / (a(i) - a(i - k));
    end for
    for i = k : n - 1 do
        w(i) = w(i) - w(i + 1);
    end for
end for

```

em que m é a massa, $c \geq 0$ é o coeficiente de amortecimento e $k > 0$ é o coeficiente de rigidez. Dizemos que o movimento é livre para significar que o sistema vibra nas suas frequências naturais, sem força de excitação externa. A solução geral dessa equação é

$$ae^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c}{2m}^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + be^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c}{2m}^2 - \frac{k}{m}}\right)t} =$$

$$ae^{(\alpha+\beta)t} + be^{(\alpha-\beta)t},$$

em que $\alpha = -\frac{c}{2m}$ e $\beta = \sqrt{\frac{c}{2m}^2 - \frac{k}{m}}$. Suponha que queremos resolver o problema inverso de determinar a massa, o coeficiente de amortecimento e a constante de rigidez a partir de amostras da resposta x (ver [23]). Como a equação acima é homogênea, o melhor que podemos esperar é determinar as razões c/m e k/m . Observe que, se calculamos α e β , obteremos essas razões.

Vamos supor que sabemos os deslocamentos em $t = 0$, $t = \Delta t$, $t = 2\Delta t$ e $t = 3\Delta t$: x_0 , x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente. Considere a matriz

$$H = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

H é uma matriz de Hankel. Note que $x_0 = a + b$, $x_1 = ae^{(\alpha+\beta)\Delta t} + be^{(\alpha-\beta)\Delta t}$ e $x_2 = ae^{2(\alpha+\beta)\Delta t} + be^{(\alpha-\beta)\Delta t}$, para alguns escalares a, b . Sejam $\lambda_1 = e^{(\alpha+\beta)\Delta t}$ e $\lambda_2 = e^{(\alpha-\beta)\Delta t}$. Não é muito trabalhoso verificar que

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz de Vandermonde, que corresponde a $vander(\lambda_1, \lambda_2)$ em MATLAB. Um resultado interessante é o seguinte:

Lema 2.3.1. *Seja H uma matriz de Hankel $n \times n$ não singular, $H = (h_i)_{i=0:2n-2}$. Seja VDV^T uma fatorização de Vandermonde de H , em que $V = vander(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e D é uma matriz diagonal. Então $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ é o espectro da matriz companheira $C = [e_2; \dots; e_n; x]$, em que x é a solução do sistema linear*

$$Hx = (h_{n+1} \dots h_{2n-2} h_{2n-1})^T$$

$$\text{e } h_{2n-1} = \sum_{i=1}^n d_{ii} \lambda_i^{2n-1}.$$

Demonstração: A demonstração desse lema decorre do fato que

$$VDV^T C = V D \Lambda V^T,$$

em que $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Logo, como V é inversível, $V^T C = \Lambda V^T$. Ou seja, λ_i é autovalor de C para todo i .

□

Aplicando esse lema no problema inverso acima, se a gente computar os autovalores da matriz $[e_2; x]$, em que x é a solução do sistema

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

obteremos λ_1 e λ_2 . A partir desses valores, obtemos então c/m e k/m .

2.3.1 Estimação de Sinais Senoidais

No caso de sistemas com múltiplos graus de liberdade, digamos m , a equação que descreve um sistema com um vetor de força de excitação F se generaliza para

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = F,$$

em que M é a matriz de massa (inversível), C é a matriz de amortecimento e K , a de rigidez. Se conhecemos essas matrizes, uma técnica de resolução do sistema, supondo $x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, é por Transformada de Laplace (ver, e se for possível compre em algum sebo, o excelente livro [30]):

$$(Ms^2 + Cs + K)\mathcal{L}(x)(s) = \mathcal{L}(F)(s).$$

A matriz de receptância do sistema é

$$H(s) = (Ms^2 + Cs + K)^{-1}.$$

Uma vez obtido $H(s)$, a solução $x(t)$ é a inversa da transformada de Laplace aplicada a $H(s)F(s)$. A análise modal experimental procura estimar a matriz $H(s)$ a partir do conhecimento de sinais de resposta à excitação F . Resumindo ao que nos interessa no momento, o problema acaba se transformando em estimar os parâmetros de funções do tipo:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{2m} a_k e^{b_k t},$$

isto é, as amplitudes a_k e as frequências b_k , que são complexas, mas aparecem aos pares com suas conjugadas.

Considere o problema matemático de determinar esses parâmetros a partir de várias amostras consecutivas tomadas em múltiplos de um intervalo de tempo Δt . Ou seja, digamos que se conhecem $h_0 = h(0)$, $h_1 = h(\Delta t)$, $h_2 = h(2\Delta t)$, ..., h_{2m-1} , h_{2m} etc. Pode ser que não conheçamos o valor de m . Nesse caso, podemos construir uma matriz de Hankel superdimensionada, ou seja, uma matriz de ordem n , com $n \gg 2m$ (na nossa quase santa ignorância). Como as amostras são de uma função que é uma combinação de exponenciais, então é fácil concluir o seguinte lema, a partir do Lema 2.3.1.

Lema 2.3.2. *Considere, para todo inteiro não negativo r , $h_r = \sum_{k=1}^m [a_k e^{r b_k \Delta t} + \bar{a}_k e^{r \bar{b}_k \Delta t}]$, em que $a_k \neq 0$ e b_k distintos para $k = 1 : m$. Seja $H = \text{hankel}([h_s, \dots, h_{s+n-1}], [h_{s+n-1}, \dots, h_{s+2n-2}])$ para algum inteiro não negativo s , em que $n \geq 2m$. Então o posto de H é $2m$.*

Costuma-se usar a DVS para estimar o posto de uma matriz. Uma vez computado o posto $M = 2m$, construímos a matriz $H = \text{hankel}([h_0, \dots, h_{M-1}], [h_{M-1}, \dots, h_{2M-1}])$. Calculamos, então, os autovalores da matriz companheira formada a partir da solução do sistema $Hx = (h_M \dots h_{2M})^T$. Esses serão as exponenciais procuradas. Para calcular as amplitudes, resolvemos o sistema $Vx = He_1$, por exemplo, pelo algoritmo 2.2.3. Um problema surge quando a detecção numérica do posto de H não é confiável. O lema a seguir vai nos ajudar.

Lema 2.3.3. *Sejam $H_0 = \text{hankel}([h_0, \dots, h_{n-1}], [h_{n-1}, \dots, h_{2n-2}])$ e $H_1 = \text{hankel}([h_1, \dots, h_n], [h_n, \dots, h_{2n-1}])$ duas matrizes de Hankel de ordem $n \geq 2m$ construídas a partir de um sinal composto de $2m$ exponenciais, como na hipótese do lema anterior. Então, para toda solução X do sistema $H_1 = H_0 X$, para toda solução Y do sistema $H_0 = H_1 Y$, temos:*

$$\{e^{b_1 \Delta t}, e^{\bar{b}_1 \Delta t}, \dots, e^{b_m \Delta t}, e^{\bar{b}_m \Delta t}\} \subset \lambda(X)$$

e

$$\{e^{-b_1 \Delta t}, e^{-\bar{b}_1 \Delta t}, \dots, e^{-b_m \Delta t}, e^{-\bar{b}_m \Delta t}\} \subset \lambda(Y).$$

Demonstração:

Sejam

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ e^{b_1 \Delta t} & e^{\bar{b}_1 \Delta t} \dots & e^{b_m \Delta t} & e^{\bar{b}_m \Delta t} & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ e^{(n-1)b_1 \Delta t} & e^{(n-1)\bar{b}_1 \Delta t} \dots & e^{(n-1)b_m \Delta t} & e^{(n-1)\bar{b}_m \Delta t} & \end{pmatrix},$$

$$D_{2m} = \text{diag}([a_1, \bar{a}_1, \dots, a_m, \bar{a}_m]) \text{ e}$$

$$E_{2m} = \text{diag}([e^{b_1 \Delta t}, e^{\bar{b}_1 \Delta t}, \dots, e^{b_m \Delta t}, e^{\bar{b}_m \Delta t}]).$$

Então $H_0 = V_n D_{2m} V_n^T$ e $H_1 = V_n E_{2m} D_{2m} V_n^T$. Se X é uma solução de $H_1 = H_0 X$, então $V_n E_{2m} D_{2m} V_n^T = V_n D_{2m} V_n^T X$. Logo,

$$E_{2m} V_n^T = V_n^T X, \text{ ou seja,}$$

$$\{e^{b_1 \Delta t}, e^{\bar{b}_1 \Delta t}, \dots, e^{b_m \Delta t}, e^{\bar{b}_m \Delta t}\} \subset \lambda(X^T) = \lambda(X).$$

Analogamente, podemos obter que os inversos desses autovalores são autovalores de qualquer solução Y de $H_0 = H_1 Y$.

□

Observação 2.3.4. *Observe que, além dos $2m$ autovalores listados no lema acima, $\lambda(X)$, assim como $\lambda(Y)$, contém mais outros $(n-2m)$ autovalores estranhos. Vamos supor que, para todo $k = 1 : m$, a parte real de b_k (e de \bar{b}_k) é negativa, isto é, para todo k , $|e^{b_k \Delta t}| < 1$. Por um teorema demonstrado tanto em [4] (de um modo), como em [6] (de outro modo), se $X = [e_2, \dots, e_n, v]$ e $Y = [w, e_1, \dots, e_{n-1}]$ são soluções, respectivamente, dos sistemas $H_1 = H_0 X$ e $H_0 = H_1 Y$, em que $v = H_0^\dagger H_1 e_n$ e $w = H_1^\dagger H_0 e_1$, então os outros $(n-2m)$ autovalores, tanto de X como de Y , estão no interior da bola unitária complexa.*

Pela observação acima, podemos concluir que podemos separar melhor os autovalores estranhos dos autovalores naturais do sinal se calcularmos os autovalores de

$$Y = [w, e_1, \dots, e_{n-1}], \text{ em que } w = H_1^\dagger H_0 e_1.$$

Uma vez calculados os autovalores naturais do sinal (que chamamos de frequências), podemos calcular os parâmetros a_k e \bar{a}_k , $k = 1 : m$ (que chamamos de amplitudes do sinal): $d = D_{2m} e = V_n^\dagger H_0 e_1$, em que $e = \text{ones}(2m, 1)$. Outro modo é construir

$$V = \text{vander}([e^{b_1 \Delta t}, e^{\bar{b}_1 \Delta t}, \dots, e^{b_m \Delta t}, e^{\bar{b}_m \Delta t}])$$

e resolver o sistema $Vd = [h_0; \dots; h_{2m-1}]$.

Note que supormos que a parte real de b_k (e de \bar{b}_k) é negativa para todo k significa que estamos lidando com um sinal que tende a se esvanecer com o tempo, afinal o amortecimento é usualmente observado na natureza. Esse esquema funciona para um sinal com poucas exponenciais e sugiro ao leitor testar em alguma simulação (ver lista de exercícios). Para sinais mais complexos, vejamos a próxima subseção.

2.3.2 Exemplo: sinais musicais

Seja $x(t)$ uma função real que representa um som monofônico, por exemplo, uma melodia reproduzida por um único instrumento. Quando digitalizados, trechos bem pequenos desse som, os quais chamamos de janelas, podem ser analisados matematicamente a partir do modelo que chamamos de senoidal com amortecimento exponencial (Exponentially Damped Sinusoids). Nesse modelo, o sinal é descrito na seguinte forma:

$$x(t) = \sum_{k=1}^m [\alpha_k e^{-d_k t + i2\pi f_k t} + \bar{\alpha}_k e^{-d_k t - i2\pi f_k t}],$$

em que $d_k > 0$ para todo $k = 1 : m$. Denotando $e^{-d_k + i2\pi f_k}$ por z_k , temos que

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k z_k^t + \bar{\alpha}_k \bar{z}_k^t$$

Um pouco de história do uso de modelagem senoidal na música pode ser vista em [31]. Suponha, agora, que temos amostras desse som digitalizado: $h_k = x(k \cdot \Delta t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, com Δt fixo. Há, pelo menos, dois modos de se trabalhar com janelas: uma é deslizando ponto a ponto do sinal, tentando aproveitar o máximo da matemática da janela imediatamente anterior para não ter que refazer todas as contas; outra é analisar independentemente janelas com alguma interseção e tentar algum modo de interpolação de dados ao sobrepor essas janelas. Esta técnica é a que se usa frequentemente em métodos no domínio da frequência; a outra, em métodos no domínio do tempo. Vamos ser bem humildes aqui. Vamos usar um método no domínio do tempo para analisar um sinal sonoro simples, que reproduz uma nota tocada em um instrumento, como um piano, uma flauta, um violino, um violão.

Considere que n seja um número ímpar de amostras. Seja $L = \frac{n+1}{2}$. Vamos supor que $L > 2m$, o número de exponenciais complexas que compõem o sinal. Vamos considerar a matriz de Hankel H , cuja primeira coluna é $[h_0 \dots h_{L-1}]$ e cuja última linha é $[h_{L-1} \dots h_{2L-2}]$. Em aritmética exata, isso significaria que $H = WDW^T$, em que W é uma matriz de Vandermonde de posto $2m$. Nesse caso, o espaço gerado pelas colunas de W correspondem ao espaço gerado pelas

colunas do fator U da DVS econômica de H ($H = U\Sigma V^T$). Isto é, $ImU = ImW$. Logo, existe uma matriz C inversível tal que $U = WC^{-1}$.

Outro modo de imaginar esse espaço é o seguinte: é o subespaço associado aos $2m$ autovalores não nulos de H . Na prática da vida real, em que trabalhamos em aritmética de ponto flutuante, procuramos um subespaço associado aos $2m$ autovalores de maior valor absoluto, em que $2m$ é um número estimado, seja numericamente a partir da DVS, seja ditado pela experiência.

Agora, vamos definir as matrizes $W_\downarrow, W_\uparrow \in \mathbb{C}^{L-1 \times 2m}$: W_\downarrow é a matriz W sem a última linha e W_\uparrow é a matriz W sem a primeira linha. Podemos descrevê-las da seguinte forma:

$$W_\downarrow = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{L-1}^T \end{pmatrix}}_{I_\downarrow} W \quad W_\uparrow = \underbrace{\begin{pmatrix} e_2^T \\ \vdots \\ e_L^T \end{pmatrix}}_{I_\uparrow} W$$

em que e_k , $k = 1 : 2m$, são os $2m$ primeiros vetores canônicos de \mathbb{R}^L . Queremos rastrear as $2m$ exponenciais $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_m, \bar{z}_m$, conjugadas duas a duas, que representam as m senóides presentes no sinal. Assumimos, por enquanto, que conhecemos m e que $2m < L = \frac{n+1}{2}$. Observe também que, como $d_k > 0$, então $e^{-d_k} < 1$. Também, como $z_k = e^{-d_k} e^{i2\pi f_k}$, temos que $|z_k| = |e^{d_k}| < 1$.

Seja agora Z a matriz diagonal tal que $Z_{11} = z_1$, $Z_{22} = \bar{z}_1$, ..., $Z_{2m-1, 2m-1} = z_m$, $Z_{2m, 2m} = \bar{z}_m$. Então, W_\downarrow e W_\uparrow se relacionam pela equação seguinte:

$$W_\uparrow = W_\downarrow Z.$$

Essa propriedade é chamada de **invariância rotacional**. Observe que W_\downarrow é de posto completo, pois $2m \leq L - 1$. Então,

$$Z = W_\downarrow^\dagger W_\uparrow$$

Note também que a pseudo-inversa de W_\downarrow é dada por

$$W_\downarrow^\dagger = (W_\downarrow^H W_\downarrow)^{-1} W_\downarrow^H.$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} I_{\downarrow}U &= I_{\downarrow}WC^{-1} \Rightarrow U_{\downarrow} = W_{\downarrow}C^{-1} \\ I_{\uparrow}U &= I_{\uparrow}WC^{-1} \Rightarrow U_{\uparrow} = W_{\uparrow}C^{-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Como $\text{posto}(W_{\downarrow}) = \text{posto}(C) = \text{posto}(U_{\downarrow}) = 2m$, temos que $U_{\downarrow}^{\dagger} = CW_{\downarrow}^{\dagger}$. Então:

$$\begin{aligned} Z &= W_{\downarrow}^{\dagger}W_{\uparrow} = C^{-1}U_{\downarrow}^{\dagger}U_{\uparrow}C \\ &\Rightarrow U_{\downarrow}^{\dagger}U_{\uparrow} = CZC^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Note que os autovalores da matriz $U_{\downarrow}^{\dagger}U_{\uparrow}$ são os pólos $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_m, \bar{z}_m$.

Considere $\hat{C}Z\hat{C}^{-1}$ uma outra decomposição espectral de $U_{\downarrow}^{\dagger}U_{\uparrow}$. Como os elementos diagonais de Z são distintos dois a dois, as matrizes C e \hat{C} se relacionam por uma matriz diagonal D : $C = \hat{C}D$, ou seja, $\hat{C} = CD^{-1}$.

Vamos agora encontrar $\alpha_1, \bar{\alpha}_1$, etc. Temos que:

$$\begin{aligned} He_1 &= \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(L-2) \\ x(L-1) \end{pmatrix} = WA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= W \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} = UC \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \bar{\alpha}_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como U tem colunas ortonormais,

$$U^T He_1 = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} = CD^{-1}D \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} = \hat{C}D\alpha$$

Logo,

$$\alpha = D^{-1}\hat{C}^{-1}U^T H e_1$$

Note que, para encontrarmos α , basta conhecermos a matriz D . Agora, temos que $W = UC$ e $C = \hat{C}D$. Multiplicando à direita os dois lados da equação, separadamente, por cada um dos vetores canônicos e_k , para $k = 1, \dots, 2m$:

$$\begin{aligned} 1 = e_1^T U \hat{C} e_1 d_{11} &\Rightarrow d_{11} = \frac{1}{e_1^T U \hat{C} e_1} \\ &\vdots \\ 1 = e_1^T U \hat{C} e_{2m} d_{2m,2m} &\Rightarrow d_{2m,2m} = \frac{1}{e_1^T U \hat{C} e_{2m}} \end{aligned}$$

Portanto, α é dado por:

$$\begin{aligned} \alpha &= D^{-1}\hat{C}^{-1}U^T H e_1 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_1^T U \hat{C} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_1^T U \hat{C} e_{2m} \end{pmatrix} \hat{C}^{-1}U^T H e_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Obtivemos, assim, os parâmetros α_k e z_k do nosso modelo. A partir desses parâmetros, podemos obter as amplitudes, fases, frequências e fatores de amortecimento associados a cada parcial:

$$\begin{aligned} a_k &= 2|\alpha_k| \\ \theta_k &= \angle \alpha_k \\ f_k &= \frac{\angle z_k}{2\pi} \\ d_k &= \log |z_k| \end{aligned} \quad (2.4)$$

Basicamente, o que fizemos acima foi aplicar o algoritmo ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques), um algoritmo bastante utilizado na literatura [37].

Vamos supor que temos m senóides presentes em um sinal, mas que trabalhamos com um modelo de ordem superestimada $\hat{m} > m$. Suponha que computamos a SVD de H , da forma $H \cong \hat{U}\Sigma\hat{V}^T$. A matriz \hat{U} é $L \times L$, $\hat{U} = [U_1 | U_2]$, em que $U_1 \in \mathbb{R}^{L \times 2\hat{m}}$ é a matriz

Algoritmo 2.3.1 ESPRIT

$$[U, \Sigma, V^T] = svd(H, 0)$$

$$\Phi = U_{\downarrow}^{\dagger} U_{\uparrow}$$

$$[\hat{C}, Z] = eig(\Phi)$$

obtida na decomposição econômica. Por outro lado, a matriz U_1 também é composta de duas submatrizes, $U_1 = [U \mid X]$, sendo $U \in \mathbb{R}^{L \times 2m}$ a matriz que realmente procuramos, com a verdadeira ordem do problema, e X uma outra matriz que é estranha ao nosso modelo.

Vamos mostrar agora que, mesmo que tenhamos superestimado a ordem do modelo, ainda assim encontraremos $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_m, \bar{z}_m$, que são os autovalores de $U_{\downarrow}^{\dagger} U_{\uparrow}$.

Teorema 2.3.5. $\{z_1, \bar{z}_1, \dots, z_m, \bar{z}_m\} \subset \lambda(U_{1\downarrow}^{\dagger} U_{1\uparrow})$

Demonstração:

Vamos supor que v é autovetor de $U_{\downarrow}^{\dagger} U_{\uparrow}$ associado a λ , em que λ pertence a $\{z_1, \bar{z}_1, \dots, z_m, \bar{z}_m\}$. Ou seja, $U_{\downarrow}^{\dagger} U_{\uparrow} v = \lambda v$. Seja $\Phi = U_{\downarrow}^{\dagger} U_{\uparrow}$. Como $posto(U_{\downarrow}) = posto(U_{\uparrow}) = 2m$, pela invariância rotacional, Φ é a única solução de $U_{\uparrow} = U_{\downarrow} \Phi$. Logo, multiplicando por v , obtemos:

$$U_{\uparrow} v = U_{\downarrow} \Phi v = U_{\downarrow} U_{\downarrow}^{\dagger} U_{\uparrow} v = \lambda U_{\downarrow} v.$$

Seja agora o vetor $v_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$. Então

$$\begin{aligned} U_1 v_1 &= \begin{pmatrix} U_{\uparrow} & \mid & X_{\uparrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = U_{\uparrow} v = \lambda U_{\downarrow} v = \\ &= \begin{pmatrix} U_{\downarrow} & \mid & X_{\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\begin{pmatrix} U_{\downarrow} & \mid & X_{\downarrow} \end{pmatrix}$ é de posto completo, temos que:

$$\begin{pmatrix} U_{\downarrow} & \mid & X_{\downarrow} \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} U_{\uparrow} & \mid & X_{\uparrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, λ é também autovalor de $(U_{1\downarrow}^{\dagger} U_{1\uparrow})$. □

Vamos testar esse algoritmo em um dos sinais sonoros usados comumente em testes desse tipo: http://perso.telecom-paristech.fr/~rbadeau/zoom/gui_orig.wav. Esse sinal digital é definido por um vetor x , formado por $N = 37888$ amostras. A leitura do arquivo, depois de salvo no diretório corrente (aquele de onde você está rodando o MATLAB), pode ser feita pelos comandos:

```
file = ['gui_orig', '.wav'];
[h, Fs] = wavread(file);
```

Δt é dado por $1/Fs$ (isso é importante na hora de executar o arquivo sintetizado). O nosso problema é encontrar os parâmetros, $2m$, α_k e z_k , com $k = 1 : 2m$, e depois sintetizá-los em um sinal x_s , ou seja,

$$x_s(r) = \sum_{k=1}^{2m} \alpha_k z_k^r + \bar{\alpha}_k \bar{z}_k^r.$$

Como $37881 = 69 \times 549$, distribuímos as 37881 primeiras amostras em 57 matrizes de Hankel 275×275 e 4 matrizes de Hankel 824×824 ($37881 = 449 \times 57 + 1647 \times 4$). Vamos chamar também essas matrizes de janelas do sinal. O sinal em questão corresponde ao som de uma corda de um violão sendo tangida. Foram construídas janelas maiores para mapear a parte do som ligado ao ataque da nota, quando o som tem mais harmônicos audíveis. Atribuímos $2m = 86$ para essas matrizes e $2m = 10$, para as outras. A diferença entre o som original e o som sintetizado aparece na Figura 2.2.

Essa forma de análise de sinais é uma forma didática de apresentação. A análise do som em janelas sem interseção não é usual assim como também é raro na literatura paralelizar o trabalho de síntese, ou seja, aplicar o mesmo algoritmo em cada janela, como fizemos aqui. Em geral, aplica-se um algoritmo adaptativo para analisar o sinal, que considera os parâmetros a serem calculados em cada janela t como sendo parâmetros que dependem de t . Nesses algoritmos, a decomposição em valores singulares de cada janela é computada aproximadamente e é utilizada para aproximar a da janela seguinte. Esses algoritmos, chamados na literatura de algoritmos de alta resolução, funcionam bem em sinais musicais monofônicos ou em sinais físicos equivalentes de outra natureza (ver [2], [12], [44]).

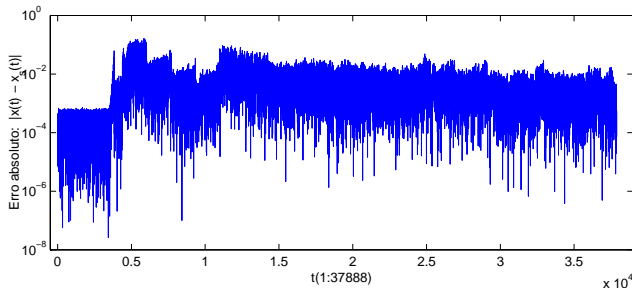


Figura 2.2: Erro absoluto entre o sinal original e o sinal sintetizado

2.4 Matrizes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f| d\mu < \infty$ (integral de Lebesgue). O conjunto dessas funções, com as operações de soma e produto por escalar usuais, é um espaço vetorial complexo, denotado por \mathcal{L}^1 . A transformada de Fourier de uma função em $f \in \mathcal{L}^1$ é definida por

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Essa transformada tem inversa em alguns casos:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo, essa transformação, restrita ao chamado espaço de Schwartz \mathcal{S} , é um automorfismo. O espaço de Schwartz é o espaço das funções chamadas de decaimento rápido, as quais são as funções infinitamente diferenciáveis tais que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0$ para todos inteiros $m, n \geq 0$. Existe uma versão da transformada de Fourier em integral de Riemann, que pode ser vista em [18].

A transformada de Fourier discreta de uma função f é uma aproximação de sua transformada. Se f_0, \dots, f_{N-1} é uma sequência de N números reais, então a transformada de Fourier discreta dessa sequência é uma outra sequência de números complexos, F_0, \dots, F_{N-1} ,

tal que para cada $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \omega_N^{-nk}, \quad \omega_N = \frac{2\pi i}{N}.$$

Essa operação pode ser traduzida matricialmente do seguinte modo: sejam f e F os vetores formados, respectivamente, pelas seqüências acima. Então

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{F}_N f,$$

em que

$$\mathcal{F}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \omega_N^9 & \cdots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.$$

Definição 2.4.1. *Sejam $f = (f_0 \dots f_{N-1})^T$ e $g = (g_0 \dots g_{N-1})^T$. A convolução circular de f e g é definida por:*

$$(f * g)[k] = \sum_{m=0}^k f_m g_{k-m} + \sum_{m=k+1}^{N-1} f_m g_{k-m+N}, \quad k = 0 : N-1.$$

Por uma questão de notação, vamos definir a seguir o produto de Hadamard de duas matrizes $M \times N$.

Definição 2.4.2. *Sejam $A, B \in \mathbb{C}^{M \times N}$. O produto de Hadamard de A e B , que é denotado por $A \circ B$, é a matriz C , $M \times N$, tal que $C_{ij} = A_{ij} B_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq M$ e $1 \leq j \leq N$.*

Em MATLAB, o produto de Hadamard de A e B é representado pelo comando $A.*B$. Aliás, vamos utilizar adiante também a divisão elemento a elemento: $A./B$.

Um resultado interessante cuja demonstração o leitor pode encontrar, por exemplo, em [8] é o seguinte:

Teorema 2.4.3 (Teorema da convolução circular). *Sejam f e g dois vetores de \mathbb{C}^N , $f = (f_0 \dots f_{N-1})^T$ e $g = (g_0 \dots g_{N-1})^T$. Então*

$$\mathcal{F}_N(f * g) = \mathcal{F}_N(f) \circ \mathcal{F}_N(g),$$

em que \circ representa o produto de Hadamard.

Em [8], podemos ver um facsimile de uma página do trabalho *Recherches sur la nature et la propagation du son*, publicado por Lagrange em 1759, na qual aparece uma representação dos deslocamentos de N partículas de uma corda vibrante na forma de uma soma discreta de senos de várias frequências, ou seja, uma transformada discreta de Fourier (série de senos, ver [8]).

A transformada de Fourier é extensivamente usada em Processamento de Sinais. Quando x representa tempo (em segundos), ξ representa frequência (em Hertz). Quando estudamos um fenômeno a partir da sua transformada de Fourier, dizemos que estamos trabalhando no domínio das frequências. Por exemplo, se queremos estimar parâmetros de um sinal senoidal do tipo $h(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{b_k t}$ usando matrizes de Hankel formada por amostras do sinal, estamos trabalhando no **domínio do tempo**. Se fizermos a transformada de Fourier discreta das amostras do sinal e plotarmos o resultado, obteremos um gráfico formado por vários picos. Alguns têm a ver com o sinal original, mas grande parte é resultado de ruído, tanto numérico como da aproximação da transformada de Fourier. Se aplicamos algum método que procura identificar picos coerentes com o sinal original, esse método é no domínio das frequências. Existem vários livros nos quais são apresentadas aplicações de TFD (Transformada de Fourier Discreta) em problemas práticos de engenharia, física, medicina, música etc (ver, por exemplo, [8], [26], [41]).

2.4.1 Multiplicação Rápida Matriz-Vetor

Nesta seção estamos interessado em apresentar outra área de atuação do matemático numérico: complexidade computacional. A tecnologia digital de comunicação, em particular a telefonia celular, deve seu desenvolvimento a uma descoberta simples, mas de alcance estuendo: a Transformada Rápida de Fourier (FFT). Na crua verdade, a FFT é apenas um modo de fazer mais rápido a multiplicação $\mathcal{F} \setminus f$

(e também $\mathcal{F}^{-1}f$). Em MATLAB, o comando $fft(x)$ faz a multiplicação rápida do vetor x pela matriz de Fourier de ordem igual ao do vetor x ; o comando $ifft(y)$ faz a multiplicação rápida pela inversa da matriz de Fourier (que é a sua transposta conjugada).

Em geral, a multiplicação de uma matriz não esparsa, $n \times n$, por um vetor demanda n^2 multiplicações e $n(n - 1)$ somas. Resumimos isso, dizendo que a multiplicação matriz-vetor demanda $\mathcal{O}(n^2)$ operações, ou que a complexidade de um algoritmo usual de multiplicação matriz-vetor é $\mathcal{O}(n^2)$. Em 1965, dois pesquisadores da IBM, John Tukey and James Cooley, revelaram ao mundo um modo de se fazer a multiplicação matriz de Fourier-vetor em apenas $\mathcal{O}(n \log n)$ operações. Esse modo é o algoritmo FFT, descrito em apenas quatro páginas [13]. Historiadores garantem que Gauss conhecia esse algoritmo em 1805, mas que só foi publicado postumamente em 1866 ([8]). Um fato incrível é que há vários tipos de matrizes cujas multiplicações por vetor podem ser feitas via matriz de Fourier. Vamos apresentar os seguintes casos: matrizes de Toeplitz, matrizes de Hankel e matrizes de Pascal. Para isso, precisamos falar antes das matrizes circulantes, que são matrizes para as quais as colunas da matriz de Fourier formam uma base de autovetores.

2.4.2 Matrizes Circulantes

Uma matriz circulante $n \times n$ C é uma matriz de Toeplitz do tipo:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \dots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & & c_2 \\ \vdots & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}.$$

A seguir, enunciamos um lema que apresenta uma decomposição espectral de uma matriz circulante C . A prova do lema é deixada para o leitor.

Lema 2.4.4. *Seja C uma matriz circulante de ordem n . Então:*

$$C\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n\Lambda,$$

em que \mathcal{F}_n é a matriz de Fourier de ordem n e Λ é a matriz diagonal tal que

$$(\Lambda)_{kk} = c_0 + c_{n-1}(\omega_n)^k + c_{n-2}(\omega_n)^{2k} + \dots + c_1\omega_n^{(n-1)k},$$

para todo $k = 0 \dots n - 1$. Isto é,

$$C = \mathcal{F}_n \text{diag}([\mathcal{F}_n c]) \mathcal{F}_n^{-1},$$

em que $c = (c_0 \ c_{n-1} \ \dots \ c_1)^T$.

Suponha que temos um sistema linear, cuja matriz de coeficientes seja uma matriz circulante $n \times n$ C : $Cx = b$. Note que podemos escrever, então, esse sistema como uma convolução circular do tipo:

$$c * x = b,$$

em que c é a primeira coluna de C (ver lista de exercícios). Pelo teorema da convolução circular,

$$\mathcal{F}_n b = \mathcal{F}_n (c * x) = \mathcal{F}_n c \circ \mathcal{F}_n x.$$

Assim,

$$x = \mathcal{F}_n^{-1} (\mathcal{F}_n b ./ \mathcal{F}_n c),$$

em que $./$ representa a divisão elemento a elemento. Observe que C é inversível se e só se $\mathcal{F}_n c$ é um vetor sem coordenada nula, pois esse vetor é formado pelos autovalores de C . Assim, um sistema linear, cuja matriz de coeficientes é uma matriz circulante, pode ser resolvido em $\mathcal{O}(n \log n)$ operações!!

2.4.3 Multiplicação Rápida - Matriz de Toeplitz

A operação de convolução pode ser usada para uma multiplicação rápida matriz de Toeplitz-vetor, ou matriz de Hankel-vetor (pois T é de Toeplitz se e só se PT é de Hankel, em que P é a matriz de permutação cuja diagonal secundária é toda formada por 1). Mas, para isso, primeiro temos que converter o problema Tx , em que T é uma matriz de Toeplitz, em um problema Cy , em que C é uma matriz circulante. Vamos supor, sem perda de generalidade (ver lista de exercícios), que T é uma matriz de Toeplitz $n \times n$ triangular superior:

$T = \text{toeplitz}([t_1, \dots, t_n], [t_1, 0, \dots, 0])$. Seja $x \in \mathbb{C}^n$. Quero calcular Tx . Para isso, seja C_T a matriz circulante $(2n-1) \times (2n-1)$ definida a seguir:

$$C_T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & t_n & t_{n-1} & \dots & t_2 \\ t_2 & t_1 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & t_n & \dots & t_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ t_{n-1} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & t_n \\ t_n & t_{n-1} & \dots & t_2 & t_1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & t_n & \ddots & \vdots & t_2 & t_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & t_n & t_{n-1} & \dots & t_2 & t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_n & t_{n-1} & \dots & t_2 & t_1 \end{bmatrix}.$$

Note que $C_T \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx \\ y \end{bmatrix}$. Por outro lado, $C_T \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = c_T * \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim,

$$\mathcal{F}_{2n-1} \begin{bmatrix} Tx \\ y \end{bmatrix} = \mathcal{F}_{2n-1} c_T \circ \mathcal{F}_{2n-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} Tx \\ y \end{bmatrix} = (\mathcal{F}_{2n-1})^{-1} \left(\mathcal{F}_{2n-1} c_T \circ \mathcal{F}_{2n-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

2.4.4 Multiplicação Rápida - Matriz de Pascal

Seja P_n a matriz de Pascal triangular inferior de ordem n . Seja t um real positivo. Considere a matriz diagonal $D_n(t)$ tal que, para todo $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$(D_n(t))_{kk} = \frac{t^k}{k!}.$$

Fazendo as contas, vemos que $D_n(t)P_n(D_n(t))^{-1}$ é uma matriz de Toeplitz triangular inferior $T_n(t)$ tal que, para todo $n \geq i \geq j \geq 1$,

$$k = i - j \Rightarrow (T_n(t))_{ij} = \frac{t^k}{k!}.$$

Algoritmo 2.4.1 Multiplicação rápida Tx , em que T é Toeplitz

```
% y é o produto de T = toeplitz(t1, t2) por v
% t1 é a primeira coluna de T; t2 é a primeira linha de T
n = length(t1);
v = [v; zeros(n - 1, 1)];
d = t1(:);
d1 = t2(:);
d = [d; d1(n : -1 : 2)];
z = ifft(fft(d) .* fft(v));
y = z(1 : n);
```

Esse parâmetro ajuda a estabilizar o produto altamente instável de P_n por um vetor. Pois, com essa mudança de escala,

$$P_n x = (D_n(t))^{-1} T_n(t) D_n(t) x.$$

Em [7], é calculado, para quase todo n , o parâmetro t que faz com que a razão $\max (T_n(t))_{ij} / \min (T_n(t))_{ij}$ seja a menor possível:

$$t_{ot} = {}^{n-2}\sqrt{\frac{(n-1)!}{k+1}}, \text{ em que } k = \lfloor {}^{n-1}\sqrt{(n-1)!} \rfloor.$$

Note que, se essa razão é mínima, as entradas de $T_n(t)$ estão as mais próximas possíveis em grandeza. Agora, vamos fazer uma multiplicação rápida de P_n por z . Testes com vários valores de n aparecem na Tabela 2.1. Nessa tabela, z é o vetor definido por $z_k = (-1)^{k-1}$,

n	$\ P_n z - w_1\ _2$	$\ P_n z - w_2\ _2$	$\ P_n z - w_3\ _2$
4	4.9262e-16	4.4790e-16	9.6908e-17
8	2.4685e-13	9.5720e-15	6.2521e-15
16	1.9051e-05	9.5411e-13	8.4432e-13
32	1.0318e+16	2.7147e-07	9.5906e-08
64	2.0661e+71	1.7187e+04	7.2813e+03

Tabela 2.1: Erros no produto: matriz de Pascal

$k = 1, \dots, n$; e os vetores w_1, w_2 e w_3 são os vetores obtidos pela operação $D_n(t).T_n(t).D_n(t)^{-1}z$, para $t = 1, t = (n-1)/e, t = t_{ot}$, respectivamente. Para a computação desses vetores, foi usada a multiplicação rápida de um vetor por matriz de Toeplitz, que demanda somente $\mathcal{O}(n \log n)$ operações ao invés das $\mathcal{O}(n^2)$ usuais. Note que, em aritmética exata, $P_n z = e_1$.

2.5 Exercícios

1. Seja $H = \text{hankel}([h_0, \dots, h_{n-1}], [h_{n-1}, \dots, h_{2n-1}])$ em que, para todo $0 \leq r \leq 2n-1$, $h_r = \sum_{k=1}^{2m} a_k e^{r b_k \Delta t}$, com $m \leq n$. Mostre que $H = V_{n,m} D_m V_{n,m}^T$, em que $D_m = \text{diag}([a_1, \dots, a_{2m}])$ e

$$V_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{b_1 \Delta t} & e^{b_2 \Delta t} & \dots & e^{b_{2m} \Delta t} \\ e^{2 \cdot b_1 \Delta t} & e^{2 \cdot b_2 \Delta t} & \dots & e^{2 \cdot b_{2m} \Delta t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{(2n-1) \cdot b_1 \Delta t} & e^{(2n-1) \cdot b_2 \Delta t} & \dots & e^{(2n-1) \cdot b_{2m} \Delta t} \end{pmatrix}.$$

2. Seja $h(t) = 2e^{-t} \cos t - 3e^{-2.5t} \cos 3t + 15e^{-2t} \cos 7t$. Construa duas matrizes de Hankel de ordem 8, H_0 e H_1 , conforme o Lema 2.3.3. Ache, então, os parâmetros b_k e \bar{b}_k , para $k = 1 : 3$.
3. Mostre que a matriz de Fourier \mathcal{F}_n é uma matriz unitária $n \times n$.
4. Mostre que uma matriz circulante $n \times n$ C é inversível se e só se $\mathcal{F}_n c$ é um vetor com todas as coordenadas diferentes de zero, em que $c = C e_1$.
5. Seja C uma matriz circulante $n \times n$. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $Cx = c \circ x$, em que $c = C e_1$.
6. Mostre que uma matriz $n \times n$ T é uma matriz de Toeplitz se e só se PT é de Hankel, em que P é a matriz de permutação tal que $P e_j = P e_{n+1-j}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.
7. Seja P_n a matriz de Pascal triangular inferior de ordem n . Seja t um real positivo. Considere a matriz diagonal $D_n(t)$

tal que, para todo $k \in \{0, \dots, n\}$, $(D_n(t))_{kk} = \frac{t^k}{k!}$. Mostre que $D_n(t)P_n(D_n(t))^{-1}$ é uma matriz de Toeplitz T triangular inferior tal que, para todo $n \geq i \geq j \geq 1$, $k = i - j \Rightarrow T_{ij} = \frac{t^k}{k!}$.

Bibliografia

- [1] L. ACETO AND D. TRIGIANTE, *The matrices of Pascal and other greats*, Amer. Math. Monthly, 108, pp. 232–245, 2001.
- [2] R. BADEAU, B. DAVID AND G. RICHARD, *A New Perturbation Analysis for Signal Enumeration in Rotational Invariance Techniques*, IEEE Trans. Signal Process. 54, pp. 450–458, 2006.
- [3] R. C. BASSANEZI E W. C. FERREIRA JR., *Equações Diferenciais com Aplicações*, São Paulo: HARBRA, 1988.
- [4] F. S. V. BAZÁN AND L. H. BEZERRA, *On Zero Locations of Predictor Polynomials*, Numer. Linear Algebra Appl. 4, pp. 459–468, 1997.
- [5] L. H. BEZERRA, *Vandermonde factorizations of a regular Hankel matrix and their application to the computation of Bézier curves*, arXiv:1011.2433v1 [math.NA].
- [6] L. H. BEZERRA AND F. S. V. BAZÁN, *Eigenvalue Locations of Generalized Companion Predictor Matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 19, pp. 886–897, 1998.
- [7] L. H. BEZERRA E L. K. SACHT, *On computing Bézier curves by Pascal matrix methods*, Appl. Math. Comput. 217 (24), pp. 10118–10128, 2011.
- [8] W. L. BRIGGS AND V. E. HENSON, *The DFT: an owner's manual for the Discrete Fourier Transform*, Philadelphia: SIAM, 1995.

- [9] R. L. BURDEN E J. D. FAIRES, *Análise Numérica, 8. ed.*, São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- [10] G. S. CALL AND D. J. VELLEMAN, *Pascal's Matrices*, Amer. Math. Monthly, 100, pp. 372–376, 1993.
- [11] E. A. CARLEN E M. C. CARVALHO, *Álgebra Linear: desde o início*, Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [12] S. CASTILHO, *Análise e Ressíntese de Sinais Musicais*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.
- [13] J. COOLEY AND J. TUKEY, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp., 19, pp. 297–301, 1965.
- [14] P. J. DAVIS, *Circulant Matrices, 2nd ed.*, New York: Chelsea, 1994.
- [15] J. W. DEMMEL, *Applied Numerical Linear Algebra*, Philadelphia: SIAM, 1997.
- [16] A. EDELMAN AND G. STRANG, *Pascal Matrices*, Amer. Math. Monthly, 111, pp. 189–197, 2004.
- [17] M. FIEDLER, *Special Matrices and Their Applications in Numerical Mathematics*, Mineola, NY: Dover, 2008.
- [18] D. G. DE FIGUEIREDO, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [19] FREEMAT, <http://freemat.sourceforge.net/>.
- [20] F. R. GANTMACHER, *Matrix Theory Vol. 1 and 2*, Philadelphia: SIAM, 1994.
- [21] G. H. GOLUB E C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations, 3rd ed.*, Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [22] R. L. GRAHAN, D. E. KNUTH AND O. PATASHNIK, *Matemática Concreta - Fundamentos para Ciência da Computação, 2. ed.*, Rio de Janeiro: LTC, 1995.

- [23] C. W. GROETSCH, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Wiesbaden: Vieweg, 1993.
- [24] D. J. HIGHAM AND N. J. HIGHAM, *Matlab Guide, 2nd. ed.*, Philadelphia: SIAM, 2005.
- [25] K. HOFFMANN E R. KUNZE, *Álgebra Linear*, São Paulo: Polígono, 1970.
- [26] N. K. INGLE AND J. G. PROAKIS, *Digital Signal Processing using MATLAB*, Pacific Grove: Brooks/Cole, 2000.
- [27] R. A. HORN AND C. R. JOHNSON, *Matrix Analysis*, New York: Cambridge U. Press, 1985.
- [28] R. A. HORN AND C. R. JOHNSON, *Topics in Matrix Analysis*, New York: Cambridge U. Press, 1991.
- [29] T. KAILATH AND A. H. SAYED (ED.), *Fast Reliable Algorithms for Matrices with Structure*, Philadelphia: SIAM, 1999.
- [30] D. L. KREIDER, R. G. KULLER, D. R. OSTBERG E F. W. PERKINS, *Introdução á Análise Linear, vol. 1*, Rio de Janeiro: LTC, 1972.
- [31] S. N. LEVINE AND J. O. SMITH III, *A Compact and Malleable Sines + Transients + Noise Model for Sound*, in *Analysis, Synthesis, and Perception of Musical Sounds*, J. W. Beauchamp, ed., New York: Springer, 145–174, 2007.
- [32] C. B. MOLER, *Numerical Computing with MATLAB*, Philadelphia: SIAM, 2004.
- [33] OCTAVE, <http://www.gnu.org/software/octave/>.
- [34] D. POOLE, *Álgebra Linear*, São Paulo: Thomson Learning, 2006.
- [35] A. RANADE, S. S. MAHABALARAO AND S. KALE, *A Variation on SVD based image compression*, *Image Vision Comput.* 25, 771-777, 2007.
- [36] S. RAO, *Vibrações Mecânicas, 4. ed.*, São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2009.

- [37] R. ROY AND T. KAILATH, *ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 37, pp. 984-995, 1989.
- [38] S. SCHECHTER, *On the inversion of certain matrices*, Math. Tables and Other Aids Comput. 66, pp 73-77, 1959.
- [39] L. L. SCHUMAKER AND W. VOLK, *Efficient evaluation of multivariate polynomials*, Comput. Aided Geom. D., 3 (1986), pp. 149-154.
- [40] SCILAB, THE FREE SOFTWARE FOR NUMERICAL COMPUTATION, <http://www.scilab.org/>.
- [41] J. O. SMITH III, *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT)*, 2nd ed., W3K Publishing (<http://books.w3k.org/>), 2007.
- [42] G. W. STEWART AND J.-G. SUN, *Matrix Perturbation Theory*, San Diego: Academic Press, 1990.
- [43] G. STRANG, *Álgebra Linear e suas Aplicações*, 4. ed., São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- [44] P. STROBACH, *Square Hankel SVD subspace tracking algorithms*, Signal Process. 57, pp. 1-18, 1997.
- [45] E. E. TYRTYSHNIKOV, *Cauchy-Toeplitz matrices and some applications*, Linear Algebra Appl. 149, pp. 1-18, 1997.