

XXIV CNMAC

**Métodos de Decomposição Parcial do
Espectro de uma Matriz**

L. H. Bezerra¹ Fermin S. V. Bazán²

Departamento de Matemática

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis SC

¹Email: licio@mtm.ufsc.br. Departamento de Matemática UFSC 88040-900

²Email: fermin@mtm.ufsc.br. Departamento de Matemática UFSC UFSC 88040-900

Prefácio

Este minicurso visa, principalmente, atingir alunos de final de mestrado. Isto porque cremos que, após ter cursado várias disciplinas, o aluno terá maior agilidade para compreender as aplicações práticas aqui apresentadas, que envolvem áreas distintas, como Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias, Análise Linear etc.

O primeiro capítulo introduz um problema simples de compressão de imagens que exemplifica bem a técnica de truncamento da decomposição de valores singulares de uma matriz. O segundo capítulo introduz métodos de cálculo de autovalores para matrizes não simétricas e é um complemento aos métodos de cálculo de autovalores (de matrizes simétricas) visto no minicurso *Álgebra Linear Computacional e Problemas de Posto Incompleto* ministrado no CNMAC 2000 pelos professores Fermin S. V. Bazán e Maria Inez Cardoso. O terceiro capítulo introduz o leitor no vasto campo de aplicações desses métodos para resolver problemas práticos de Engenharia. O apêndice traz uma prova do critério de estabilidade de Liapunov para o caso de operadores lineares em espaços \mathbb{R}^n .

Esperamos que o leitor com boa formação de Álgebra Linear, do ponto de vista numérico, e de Equações Diferenciais Ordinárias possam compreender e admirar as construções teóricas utilizadas para resolver (digamos, dar uma solução razoável para) os problemas apresentados.

Florianópolis, 30 de abril de 2001.

Licio H. Bezerra e Fermin S. V. Bazán

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Métodos Numéricos	5
2.0.1	Transformações de Möbius	7
2.1	Métodos de Iteração Simultânea	8
2.1.1	Métodos de Arnoldi	9
2.1.2	Arnoldi com Recomeço	10
2.2	Método QR	10
2.3	Matrizes Simétricas Reais	14
3	Decomposição Espectral Parcial em Teoria de Sistemas	15
3.1	Introdução	15
3.2	O Problema de Redução da Ordem	17
3.2.1	Preliminares	17
3.2.2	Formulação do Problema	21
3.3	Alguns Métodos de Redução de Ordem	22
3.3.1	Método de Truncamento Balanceado	22
3.3.2	Exemplo	25
3.3.3	Métodos do tipo Lanczøs	25
3.4	O Problema de Realização de Sistemas Dinâmicos	27
3.4.1	Realização a partir da Resposta ao Impulso Unitário	27
3.5	Realização a partir de Informação Input-Output	29
3.6	Computação de um Subespaço Invariante Dominante	31
	Apêndice	33
	Apêndice A Valores Singulares de uma Matriz	34
	Apêndice B Estabilidade segundo Liapunov	36

Capítulo 1

Introdução

Vários problemas práticos requerem o cálculo de apenas alguns autovalores da matriz associada ao problema e respectivos autovetores. Por exemplo, a instabilidade local de um sistema dinâmico próximo a um ponto de singularidade é consequência da existência de autovalores, da matriz jacobiana do sistema, com parte real positiva. Uma técnica utilizada para verificar se uma matriz tem autovalores com parte real positiva é utilizar transformações de Möbius que leva o semiplano complexo $Re z > 0$, ao círculo unitário [7]. Outro exemplo é o problema de compressão de imagens digitalizadas via decomposição em valores singulares (*SVD*) (ver apêndice) da matriz de dados X : armazenam-se apenas os maiores valores singulares e respectivos vetores singulares associados a X (à esquerda e à direita). Uma ilustração simples (ver [14]) é a seguinte: no Matlab várias imagens estão disponíveis em arquivos *.mat*, por exemplo, *clown.mat*, *mandrill.mat*, *earth.mat*, *durer.mat* etc. Os comandos

```
load mandrill.mat; [U,S,V]=svd(X); colormap('gray');  
image(U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)')
```

produzem uma imagem com resolução que depende da aproximação de X a partir da aproximação via decomposição parcial $U_k S_k V_k^T$, em que S_k é uma matriz diagonal formada pelos k valores singulares dominantes (os k maiores valores singulares). O comando *load mandrill.mat* cria uma variável X na qual é armazenada a matriz de dados cuja ordem, no caso, é 480×500 . O comando *image(X)* produz a imagem original.

Os valores singulares de uma matriz A são os autovalores positivos da matriz $A^H A$. Como calcular os autovalores de uma matriz? Computar o seu polinômio característico implica em muitas operações numéricas, o que pode ocasionar muitos erros de arredondamento. E, uma vez computado, o cálculo de suas raízes

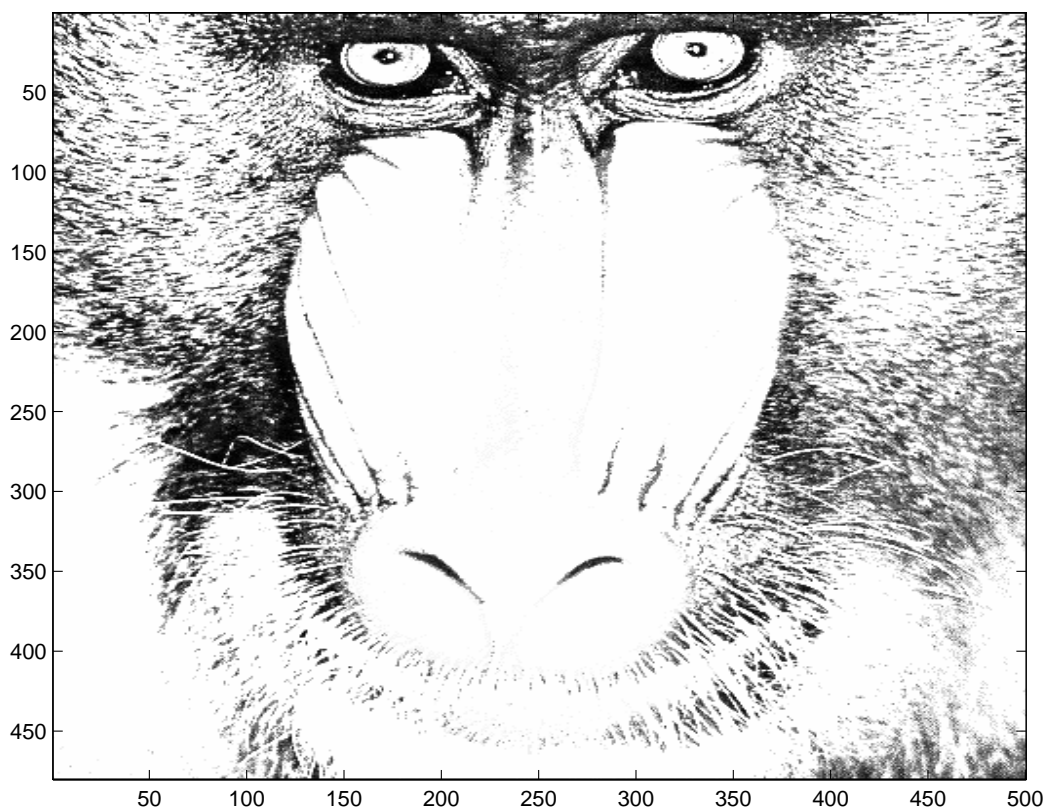
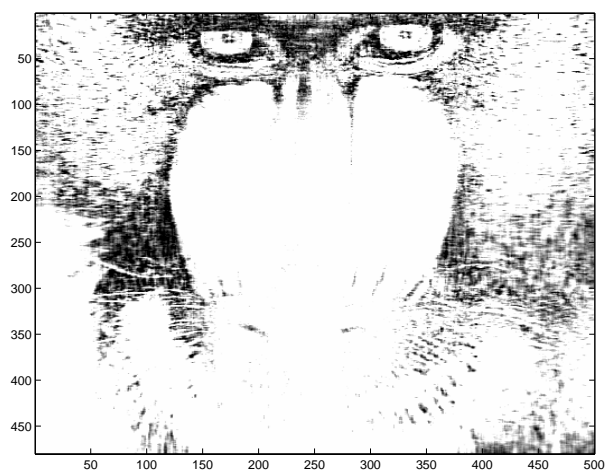
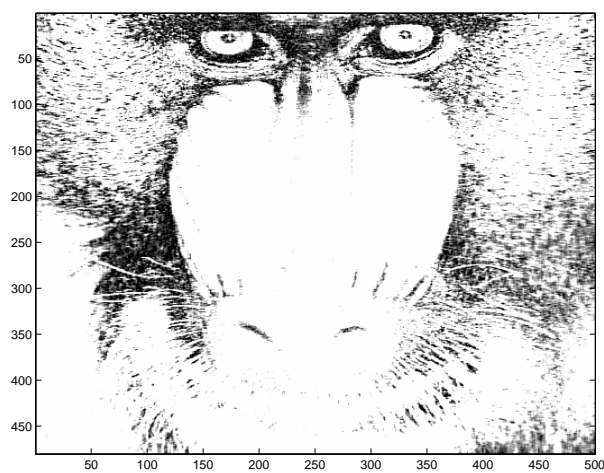


Figura 1.1: Imagem original

Figura 1.2: $k=40$ Figura 1.3: $k=80$

tem que ser feito por métodos iterativos, se a ordem da matriz for maior que 4 - não há formas fechadas de resolução de polinômios de grau ≥ 5 , conforme Teoria de Galois. Há métodos para a computação de autovalores, baseados em álgebra matricial. Em Matlab (ou no sistema iterativo Octave, distribuído com o Linux) calculam-se todos os autovalores de uma matriz pela função *eig*. Essa função é construída a partir de uma implementação otimizada do Método QR, que é um método de decomposição espectral muito eficiente. As implementações práticas desse método transformam o problema de calcular os autovalores da matriz A em outro: o de calcular os autovalores da sua forma Hessemberg (ou forma quasi-triangular). Então procura-se desacoplar o problema (diminuir a ordem da matriz) por iterações que tornam o elemento $a_{n,n-1}$ cada vez mais próximo de zero. E, assim, por diante, até calcular todos os autovalores. Técnicas para zerar esses elementos abaixo da diagonal principal da matriz de Hessemberg fazem com que a convergência ocorra preferencialmente para os autovalores dominantes da matriz. Uma técnica de decomposição parcial do espectro é inserir critérios de parada quando se atinge um determinado número de autovalores convergidos. Neste minicurso, discutiremos o método QR e apresentaremos outros métodos numéricos que calculam alguns autovalores de uma matriz (não necessariamente dominantes).

Capítulo 2

Métodos Numéricos

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz diagonalizável tal que os seus n autovalores, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, satisfazem $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de autovetores de $\mathbb{C}^{n \times n}$, associados respectivamente aos autovalores acima. Seja $x_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $v \neq 0$, tal que $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, $a_1 \neq 0$.

O método de potência ($z_k = Ax_{k-1}$, $x_k = z_k/c_k$, em que c_k é coordenada de z_k de máximo valor absoluto) é tal que x_k converge para um vetor do autoespaço gerado por v_1 , o autoespaço dominante de dimensão 1 (porque associado ao maior autovalor em valor absoluto); c_k converge para λ_1 . É só observar que o vetor x_k está no subespaço gerado por $u_k = A^k x_0$. Assim,

$$\begin{aligned} u_k &= a_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + a_n \lambda_n^k v_n = \\ &= \lambda_1^k \left[a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right] \end{aligned}$$

e, logo, quanto maior for k , menor a influência das direções dos autovetores v_2, \dots, v_n em x_k .

Em resumo, dados A e x_0 como acima, o algoritmo abaixo gera vetores x'_k s cada vez mais próximos de $[v_1]$, o subespaço gerado pelo vetor v_1 . A rapidez com que esse método converge depende do quociente $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$.

$$\begin{aligned} z_k &= Ax_{k-1} \\ c_k &= e_k^T z_k, \quad |c_k| = \|z_k\|_\infty \\ x_k &= z_k/c_k \end{aligned}$$

Há outras versões do método de potência nas quais a normalização é realizada com outras normas [17].

Exemplo: seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Seja $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim, $x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 = 4$; $x_2 = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 = 4 - 1/2 = 7/2$; $x_3 = \begin{pmatrix} 19/23 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_3 = 4 - 5/7 = 23/7$; $x_4 = \begin{pmatrix} 65/73 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_4 = 4 - 19/23 = 73/23$; etc. É fácil ver que x_k tende ao vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, que é autovetor associado a 3, para o qual c_k tende por sua vez.

Podemos pensar o método de potência como um caso particular de métodos do tipo

$$x_k = \frac{f(A)x_{k-1}}{c_k},$$

onde $f(A)$ é em geral uma função analítica e c_k , um normalizador, para evitar números muito grandes (note que o conceito de número grande faz sentido em aritmética de ponto flutuante). Se tudo correr bem, o vetor de iteração converge para um autovetor associado ao maior autovalor de $f(A)$ em valor absoluto, isto é,

$$\max_{1 \leq i \leq n} |f(\lambda_i)|.$$

Vimos acima o método de potência clássico, com $f(A) = A$. Observamos também que a taxa de convergência depende da razão dos dois maiores autovalores em valor absoluto. Observe que o quociente agora é entre os dois maiores autovalores em valor absoluto de $f(A)$; logo, se eu estiver interessado em computar λ_{12} , por exemplo, f deve ser de tal modo que $f(\lambda_{12})$ seja o maior dos autovalores, em valor absoluto. Interessante seria se tivéssemos uma função que fosse ao mesmo tempo fácil de ser computada e para a qual a razão entre o segundo maior autovalor em valor absoluto de $f(A)$ e $f(\lambda_{12})$ fosse o menor possível. Uma boa escolha é a função

$$f(A) = (A - \mu I)^{-1},$$

onde μ é uma estimativa do autovalor em que eu estou interessado. Nesse caso, a direção mais importante é aquela associada ao autovalor mais próximo de μ , ou seja, a

$$\left| \frac{1}{\lambda - \mu} \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{1}{\lambda_i - \mu} \right|.$$

Quanto mais próximo for μ de algum autovalor, mais rápido o método convergirá. Assim, além da escolha do vetor inicial, é importante a escolha do deslocamento (*shift*) inicial μ_0 . O próprio método pode dar melhores estimativas para deslocamentos durante o processamento. Por exemplo, o algoritmo seguinte utiliza uma estratégia em que deslocamentos são atualizados a partir de iterações anteriores:

$$\begin{aligned} x_0 &\neq 0 \\ \text{Para } k &\geq 1 \\ y_k &= (A - \mu_{k-1}I)^{-1}x_{k-1} \\ c_k &= e_k^T y_k, \quad |c_k| = \|y_k\|_\infty \\ x_k &= y_k/c_k \\ \mu_k &= \mu_{k-1} + 1/c_k \end{aligned}$$

Quando A é real e simétrica, se x é um vetor real não nulo,

$$r(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

minimiza a forma quadrática $\|Ax - \lambda x\|^2$. Esse número é chamado de **quociente de Rayleigh de x** . O algoritmo de iteração inversa, nesse caso, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|x_0\|_2 &= 1 \\ r_0 &= r(x_0) \\ \text{Para } k &\geq 1 \\ y_k &= (A - r_{k-1}I)^{-1}x_{k-1} \\ x_k &= y_k/\|y_k\|_2 \\ r_k &= r(x_k) \end{aligned}$$

Esse algoritmo, para matrizes simétricas, converge quase sempre (quando $\|Ax_k - r_k x_k\|_2 < tol$, existe um autovalor λ de A tal que $|r_k - \lambda| < tol$ [14]). A convergência é em geral cúbica. Ou seja, o número de dígitos corretos triplica assintoticamente a cada passo.

2.0.1 Transformações de Möbius

Outras funções interessantes são as do tipo

$$f(x) = \frac{x + b}{x + d}.$$

Observe que $f(x) = 1 + (b - d)/(x + d)$. No caso de uma matriz A , $f(A) = I + (b - d)(A + dI)^{-1}$, ou seja, potência com f não é muito diferente do método de iteração inversa com deslocamento [7], [6].

Essas funções são interessantes pois transformam semiplanos complexos em círculos, o que faz com que o problema de se calcular autovalores em semiplanos resume-se a calcular autovalores numa região limitada.

2.1 Métodos de Iteração Simultânea

Generalizar o método de potência para calcular alguns autovalores dominantes de uma matriz implica em realizar algumas operações com os vetores resultantes da multiplicação matriz-vetor a fim de evitar que convirjam todos para o autoespaço dominante gerado por v_1 , por exemplo, no caso de $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Uma operação seria normalizar os vetores de algum modo, para que os vetores não fiquem muito grandes; outra, para evitar que os vetores se tornem linearmente dependentes, seria, por exemplo, ortogonalizá-los (Iteração Ortogonal), ou fazer uma decomposição LU da matriz de vetores etc.

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Vamos supor que A é diagonalizável, que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são seus autovalores e que

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Um método interessante é uma generalização do método de Rayleigh-Ritz para vários vetores [11]:

$$X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n-p}, Y_0 \in \mathbb{C}^{n \times n-p}, Y_0^T X_0 = I$$

Para $k \geq 0$

$$B_k = (Y_k^T X_k)^{-1} (Y_k^T A X_k)$$

$$P_k D_k P_k^{-1} = B_k$$

$$X_{k+1} = X_k P_k$$

$$Y_{k+1} = Y_k P_k^{-T}$$

D_k , quando k cresce, tende a $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. X_k tende aos respectivos autovetores à direita e Y_k tende aos respectivos autovetores à esquerda. Uma implementação de um método de iteração simultânea (também chamado de método de iteração em subespaço) pode ser visto em [2].

2.1.1 Métodos de Arnoldi

Os métodos de Arnoldi computam uma base ortonormal Q_p de um subespaço de Krylov - $q, Aq, A^2q, \dots, A^{p-1}q$ - tal que $Q_p^T A Q_p = H_p$ é uma matriz de Hessemberg cujos autovalores são próximos de autovalores de A . O comando *eigs* do Matlab utiliza a versão contida no pacote ARPACK [28].

Arnoldi Básico

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seja $Q = (q_1 \cdots q_n)$ uma matriz ortogonal tal que $Q^T A Q = H$, H hessemberg superior. Logo, $AQ = QH$ e, comparando colunas, temos que

$$Aq_k = \sum_{i=1}^{k+1} h_{ik} q_i \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Assim,

$$h_{k+1,k} q_{k+1} = Aq_k - \sum_{i=1}^k h_{ik} q_i = r_k$$

e $h_{ik} = q_i^T Aq_k$, $i = 1, \dots, k$. Logo, se $r_k \neq 0$,

$$q_{k+1} = r_k / h_{k+1,k}, \quad h_{k+1,k} = \|r_k\|_2.$$

Dado então um vetor q_1 unitário, o procedimento de Arnoldi é o seguinte:

```

 $r_0 = q_1$ 
 $h_{1,0} = 1$ 
 $k = 0$ 
enquanto  $h_{k+1,k} \neq 0$ 
     $q_{k+1} = r_k / h_{k+1,k}$ 
     $k = k + 1$ 
     $r_k = Aq_k$ 
    para  $i = 1, \dots, k$ 
         $h_{ik} = q_i^T w$ 
     $r_k = r_k - h_{ik} q_i$ 
fim
 $h_{k+1,k} = \|r_k\|_2$ 
fim

```

Se $w = Aq_k$, o *loop* externo realiza o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt; se $w = r_k$, o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt modificado.

Podemos observar que os vetores q_1, \dots, q_k formam uma base para o espaço de Krylov $[q_1, Aq_1, \dots, A^{k-1}q_1]$. O método gera a cada k passos uma matriz Q_k com k colunas ortonormais tal que $AQ_k = Q_kH_k + r_k e_k^T$, em que H_k é uma matriz hesseberg superior. Obviamente, se $r_k = 0$, chegamos a um espaço invariante. No caso em que o resíduo é diferente de zero, a pergunta é se as colunas de Q_k geram um espaço próximo a um espaço invariante por A . Nesse caso, os autovalores de H_k seriam aproximações de autovalores de A . Esses autovalores são chamados de **valores de Ritz**. Dados λ , um valor de Ritz, e z , um autovetor de H_k associado a λ , o vetor $x = Q_k z$ é dito um vetor de Ritz associado a λ . Finalmente, observemos ainda que o método depende crucialmente da escolha do vetor inicial q_1 .

2.1.2 Arnoldi com Recomeço

Uma estratégia para vitalizar esse método seria recomeçar o método após alguns passos, digamos k , a partir de um novo vetor q escolhido de algum modo no espaço coluna de Q_k . Como esse espaço é de Krylov, q é da forma $p(A)q_1$, em que p é um polinômio de grau $(k-1)$. A construção desses polinômios é feita de acordo com a parte do espectro que se quer evitar calcular, isto é, como se diz no jargão de analista numérico, filtrar [37], [38], [42]. Implementações de métodos de Arnoldi aparecem também em [27], [28], [31], [39], [40], entre outros.

2.2 Método QR

Seja $A \in C^{n \times n}$ tal que seus autovalores, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, são tais que

$$|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0.$$

Seja $A = U_0 R_0$, a fatoração QR de A . Tomando U_0 como ponto de partida para o método de iteração ortogonal, obteríamos a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} &\text{Para } k \geq 0 \\ &A_{k+1} := AU_k \\ &U_{k+1}R_{k+1} := A_{k+1} \text{ (fatoração QR de } A_{k+1}\text{)} \end{aligned}$$

Da sequência acima, concluímos que

$$A^2 = U_1 R_1 R_0, \dots, A^{k+1} = U_k R_k R_{k-1} \cdots R_1 R_0,$$

ou seja, a cada passo k a matriz U_k é a matriz unitária da decomposição QR de A^{k+1} . Assim, o primeiro vetor coluna de U_k tende ao espaço $[x_1]$, o segundo, ao espaço $[x_1, x_2]$, etc. Logo, $U_k^H A U_k$ tende a uma matriz triangular superior - a forma de Schur de A , com os autovalores na diagonal, em ordem decrescente por valor absoluto. Esse ainda não é o método QR, mas tem estreita ligação com ele. O método QR se baseia no seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} A_0 &:= A \\ \text{Para } k &\geq 0 \\ Q_k R_k &:= A_k \text{ (fatoração QR de } A_k) \\ A^{k+1} &:= R_k Q_k (= Q_k^H A_k Q_k) \end{aligned}$$

Aplicamos agora o algoritmo acima à matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, cujos autovalores são 7 e 2:

$$Q_0 R_0 = \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{40} & 9\sqrt{40}/20 \\ 0 & 7\sqrt{40}/20 \end{pmatrix} := A,$$

$$A_1 := R_0 Q_0 = \begin{pmatrix} 7 - 1/10 & 7/10 \\ 7/10 & 2 + 1/10 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 R_1 = \frac{1}{\sqrt{4810}} \begin{pmatrix} 69 & -7 \\ 7 & 69 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{4810}/10 & 63/\sqrt{4810} \\ 0 & 140/\sqrt{4810} \end{pmatrix} := A_1,$$

$$A_2 := R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 7 - 4/481 & 98/481 \\ 98/481 & 2 + 4/481 \end{pmatrix}.$$

Observemos que a sequência, já nos dois primeiros termos, mostra tendência de convergir para a matriz diagonal formada por 7 e 2. Mas, para cada decomposição QR são necessárias $O(n^3)$ operações se a matriz não é esparsa. Há um modo desse número de operações diminuir: operar com uma matriz conjugada à matriz original por uma matriz unitária, a sua forma de Hessemberg H . Uma matriz de Hessemberg superior é uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \times & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Ou seja, é uma matriz H tal que $h_{ij} = 0$, se $i \geq j + 2$. A matriz de Hessemberg inferior é a transposta de uma Hessemberg superior.

[Forma de Hessemberg] $\forall A \in C^{n \times n}$ existe uma matriz unitária Q tal que $Q^H A Q = H$, matriz de Hessemberg superior.

A prova da proposição acima se baseia num procedimento que gera a matriz unitária Q como um produto de transformações de Householder [17]. Notemos que uma matriz de Hessemberg conjugada a uma matriz hermitiana é uma matriz tridiagonal. A seguir algumas propriedades interessantes das matrizes de Hessemberg:

- a fatoração QR de uma matriz de Hessemberg envolve $O(n^2)$ operações e, se ela for tridiagonal, apenas $O(n)$;
- se $H = QR$, Q e $RQ = Q^H H Q$ são também de Hessemberg.

Agora, observemos o seguinte exemplo:

$$QR = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{20} & \sqrt{20}/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 := RQ = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O método convergiu acima numa só iteração. De modo geral, se A é de Hessemberg, o posto de A é $r < n$ e $A = QR$, então R tem r linhas nulas correspondentes às r colunas de Q que estão no espaço ortogonal ao espaço coluna de A . Assim, o produto RQ tem r linhas nulas e o problema de autovalores de A se desacopla em problemas menores de autovalores. A idéia é fazer então um deslocamento em A próximo a algum autovalor. Que deslocamento escolher? Já vimos que o método QR tem estreita ligação com o método de potência ($f(A) = A$), que privilegia as direções associadas aos maiores autovalores de A em valor absoluto. Se a matriz A for real e seus autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ forem tais que $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$ (logo, todos reais), a entrada $(n, n - 1)$ de A_k tende a ficar pequena,

$$A_k = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \epsilon & \hat{\lambda}_n \end{pmatrix},$$

ou seja, a entrada (n, n) de A_k tende a λ_n e, assim por diante.

Vejamos então como fica o método QR com esta estratégia de deslocamento aplicado à mesma matriz A de um exemplo anterior:

$$Q_0 R_0 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{13} & 6/\sqrt{13} \\ 0 & 4/\sqrt{13} \end{pmatrix} := A - 3I$$

$$A_1 := R_0 Q_0 + 3I = \begin{pmatrix} 7 - 1/13 & 8/13 \\ 8/13 & 2 + 1/13 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 R_1 = \frac{1}{\sqrt{4033}} \begin{pmatrix} 63 & 8 \\ 8 & -63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{4033}/13 & 8/\sqrt{4033} \\ 0 & 64/13\sqrt{4033} \end{pmatrix} \\ := A_1 - \left(2 + \frac{1}{13}\right) I$$

$$\begin{pmatrix} 7 - 1/52429 & 512/52429 \\ 512/52429 & 2 + 1/52429 \end{pmatrix} = R_1 Q_1 + \left(2 + \frac{1}{13}\right) I$$

Vemos acima que o método QR com deslocamento converge muito mais rapidamente que o método QR simples (pelo menos nas duas primeiras iterações).

Método QR com deslocamento Seja $A \in C^{n \times n}$ uma matriz de Hessemberg superior. O algoritmo seguinte é dito o algoritmo QR com deslocamento simples:

$$A_0 := A$$

Para $k \geq 0$

$$\mu_k := (A_k)_{nn}$$

$$Q_k R_k := A_k - \mu_k I \text{ (fatoração QR de } A_k - \mu_k I)$$

$$A^{k+1} := R_k Q_k + \mu_k I \text{ (= } Q_k^H A_k Q_k)$$

Observações:

1) Se A é uma matriz real não simétrica, há um modo de se fazer dois deslocamentos complexos conjugados em aritmética real [17].

2) Se A é uma matriz real, tridiagonal e simétrica, QR com deslocamento de Wilkinson (o autovalor da submatriz $A(n-1:n, n-1:n)$ mais próximo de $A(n, n)$) converge globalmente [32].

2.3 Matrizes Simétricas Reais

Os algoritmos de decomposição parcial do espectro de matrizes simétricas reais, em geral, realizam suas operações sobre a forma tridiagonal (Hessemberg simétrica) da matriz. Além dos métodos de iteração simultânea citados na seção anterior, o método de bisseção é muito utilizado (ver [14]). O método de biseção explora bem o teorema da Inércia de Sylvester e está implementado no LAPACK ([1]).

Os métodos descritos para matrizes genéricas quando transcritos para matrizes simétricas reais têm um comportamento mais controlado, com resultados mais precisos quanto à velocidade de convergência, por exemplo. O que queremos dizer é que os algoritmos são os mesmos, porém implementados em aritmética real e com convergência assegurada em muitos casos (pelo menos, em aritmética exata). É o caso, por exemplo, do método QR aplicado a matrizes de Jacobi [13]. Métodos de Lanczøs (é como se chamam os métodos de Arnoldi no caso simétrico real) com recomeços estão bem explicados no minicurso *Álgebra Linear Computacional e Problemas de Posto Incompleto*, ministrado no XXIII CNMAC pelos professores Fermin S. V. Bazán e Maria Inez Cardoso. Outras referências são [14], com uma análise do método de Lanczøs em aritmética exata e em aritmética de ponto flutuante.

Capítulo 3

Decomposição Espectral Parcial em Teoria de Sistemas

3.1 Introdução

Apresentamos algumas aplicações onde há necessidade de se calcular um subespaço dominante de uma matrix grande (possivelmente estruturada), proveniente de problemas de identificação/realização de sistemas dinâmicos, ou de problemas de redução de ordem.

Intuitivamente, o termo *sistema* refere-se a uma entidade (física, econômica etc) capaz de produzir alguma reação y (*saída/output*) como consequência de um estímulo f (*entrada/input*), conforme Figura 3.1.

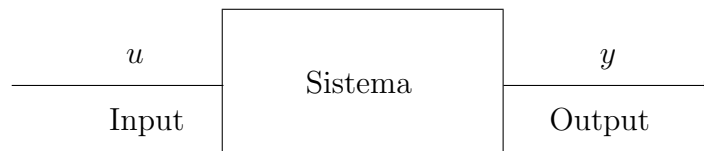


Figura 3.1: Um sistema genérico

Trataremos apenas de sistemas dinâmicos lineares descritos por equações de estado do tipo

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= C\mathbf{x}_k + D\mathbf{u}_k, \end{cases} \quad (3.1)$$

no caso discreto, ou por

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

no caso contínuo. Em ambos os casos, A é uma matrix quadrada de orden n (a matrix do sistema), B é $n \times q$ (matrix de controle), C é $p \times n$ (matrix de

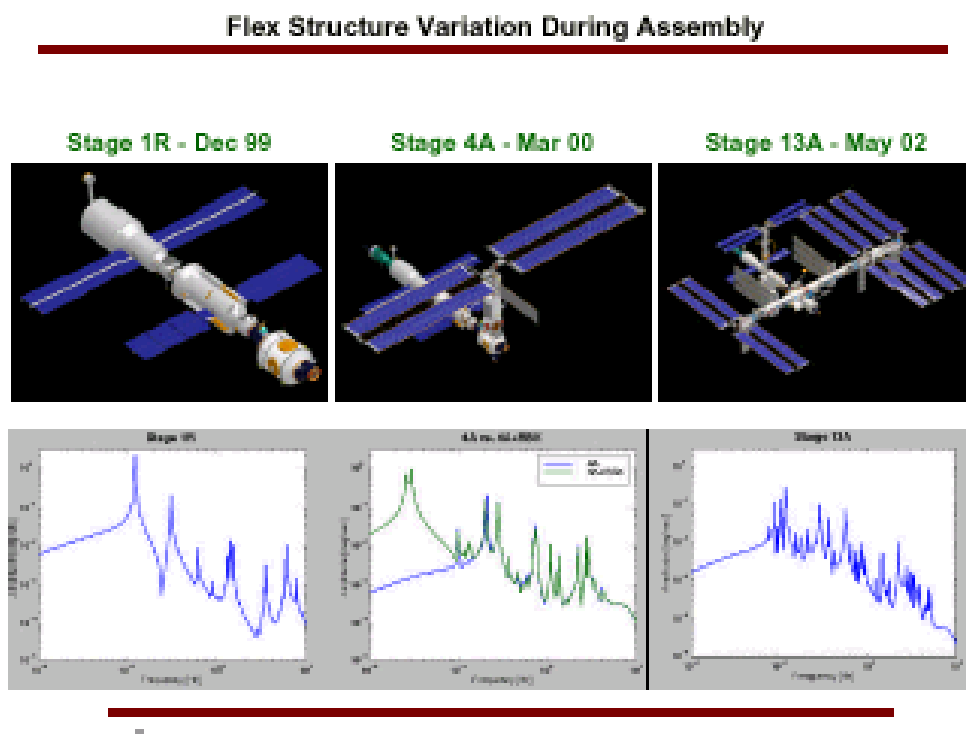


Figura 3.2: Um Sistema Dinâmico Complexo: Estação Espacial Internacional

observação), e D $p \times q$ (matriz de transmissão). O número n é conhecido como *ordem* do sistema. Por sua vez, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$, e $x(t)$, $y(t)$ e $u(t)$, $t \geq 0$, são funções vetoriais de dimensão compatível com as operações envolvidas. Assumiremos daqui em diante que os sistemas em consideração são estáveis, isto é, assumiremos que os autovalores $\lambda_i(A)$ satisfazem $\text{real}(\lambda_i) < 0$, no caso contínuo, e $|\lambda_i| < 1$ para o caso discreto.

Um problema importante na análise de sistemas dinâmicos aparece quando há um número muito grande de variáveis de estado, devido ao sistema físico modelado ser muito complexo. Como consequência disso, o conjunto de equações de estado (3.2) torna-se muito grande, sendo portanto difícil de se controlar. Assim, o desafio é construir a partir do sistema original (3.2), um sistema de ordem menor, tal que seu comportamento dinâmico seja próximo do original em termos de resposta e estabilidade, ou de algum outro critério que possa ser exigido. O problema em questão é conhecido como *problema de redução de ordem* ou *problema de aproximação*.

Um exemplo real que ilustra a necessidade de se reduzir a ordem de um sistema complexo é o problema de controlar a Estação Espacial Internacional (EEI). A

EEI é descrito por um sistema linear da forma (3.2), muito complexo e composto de vários módulos – estima-se que serão necessários em torno de 40 vãos para completar a montagem completa da estrutura, e que cada módulo precisa aproximadamente de $n = 10^3$ variáveis de estado. O controle do sistema é crucial para reduzir vibrações da estrutura ou para fixar sua orientação com relação a uma direção desejada. Para ilustração, a Figura 3.1 mostra a evolução da montagem da estrutura desde seu início em dezembro de 1999 (parte superior). A parte inferior mostra a evolução da resposta em frequência do sistema¹, conforme são adicionados novos módulos.

Outro problema na análise de sistemas é identificar um sistema dinâmico a partir de informações provenientes de um par de sequências finitas de sinais discretos $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $y_k \in \mathbb{R}^q$. Em certos casos, o problema de identificação é direcionado à busca de um conjunto de parâmetros que caracterizam completamente a dinâmica do sistema, tais como frequências naturais de vibração, amortecimento etc. Em outros casos, são procuradas as matrizes A , B , C e D (ou outras equivalentes via alguma transformação de semelhança). O problema alcança relevância em áreas tais como análise modal de estruturas mecânicas e engenharia aeroespacial, entre outras. A principal dificuldade de se trabalhar neste tipo de problema é que a ordem do sistema é desconhecida e os sinais \mathbf{u}_k , \mathbf{y}_k são contaminados por perturbações (*ruídos*), pois são resultados de medidas de laboratório ou de experimentos.

Neste capítulo, mostraremos que a solução dos problemas acima, a saber, o problema de redução de ordem e o problema de realização depende da computação da parte espectral dominante de certas matrizes envolvidas nos algoritmos utilizados.

3.2 O Problema de Redução da Ordem

3.2.1 Preliminares

Começamos com uma descrição das relações entrada/saída do sistema contínuo \mathcal{S} descrito em (3.2). Assumiremos sempre que o sistema é estável (i.e., todos os autovalores da matriz A satisfazem $\text{real}(\lambda(A)) < 0$) e que as funções $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ admitem transformada de Laplace $U(s) = \mathcal{L}(u(t))$, $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$, e

¹A resposta em frequência do sistema é definida como a função de transferência do sistema avaliada em $j\omega$: $T(j\omega) = C(j\omega - A)^{-1}B + D$

$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, respectivamente. Aplicando transformada de Laplace em ambos os membros da primeira equação em (3.2) e assumindo condições iniciais nulas, obtemos

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s).$$

Analogamente, da segunda das equações em (3.2) obtemos

$$Y(s) = CX(s) + DU(s).$$

A relação entrada/saída do sistema (no domínio de Laplace) é então resultado das relações acima:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s).$$

A *função de transferência* do sistema é a função matricial $p \times q$ definida por

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3.3)$$

A *função resposta ao impulso unitário* do sistema é por definição a transformada inversa de Laplace de $T(s)$:

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}(T(s)) = Ce^{At}B + D\delta(t), \quad (3.4)$$

em que $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. A j -ésima coluna de $G(t)$ é a resposta do sistema quando a entrada $u(t)$ é da forma $u_j(t) = \delta(t)$, e $u_i(t) = 0, i \neq j$.

Utilizando a função $G(t)$, a relação entrada/saída do sistema no domínio do tempo (assumindo o sistema em repouso), é descrita por

$$y(t) = \int_0^t G(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (3.5)$$

Defina

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = [BAB \dots A^{n-1}B]. \quad (3.6)$$

As matrizes \mathcal{O} e \mathcal{C} são chamadas matrizes de observabilidade e controlabilidade, respectivamente. O termo *observabilidade* é a propriedade do sistema de permitir recuperar o estado inicial $x(0)$ a partir de informações do sinal de saída

$y(t)$. Quando isto não é possível, dizemos que \mathcal{A} é um sistema *não observável*. Também, um sistema é dito *controlável* se para qualquer estado desejado do sistema, digamos $w \in \mathbb{R}^n$, sempre podemos encontrar uma entrada (controle) u que permita conduzir o sistema do estado inicial $x(0) = 0$ até o estado w . Em caso contrário, o sistema é dito *não controlável*. A propriedade do sistema ser observável e controlável pode ser descrita pelas condições

$$\text{posto}(\mathcal{O}) = \text{posto}(\mathcal{C}) = n. \quad (3.7)$$

Uma propriedade importante de sistemas lineares \mathcal{S} é que eles são invariantes por transformações de coordenadas. Em palavras, defina $\check{x}(t) = Px(t)$ com P não singular, e defina o sistema $\check{\mathcal{S}}$ descrito pelas equações de estado

$$\check{\mathcal{S}} : \begin{cases} \dot{\check{x}}(t) = \check{A}\check{x}(t) + \check{B}u(t) \\ y(t) = \check{C}\check{x}(t) + \check{D}u(t) \end{cases}, \quad (3.8)$$

em que $\check{A} = PAP^{-1}$, $\check{B} = PB$, $\check{C} = CP^{-1}$, e $\check{D} = D$. Então, todas as propriedades do sistema \mathcal{S} , a saber, estabilidade, controlabilidade e observabilidade, são preservadas no sistema $\check{\mathcal{S}}$. Além disso, \mathcal{S} e $\check{\mathcal{S}}$ têm as mesmas funções de transferência e resposta ao impulso unitário.

Duas quantidades importantes relacionadas com os sistema \mathcal{S} são agora descritas. Defina as matrizes \mathcal{P} e \mathcal{Q} , ambas de ordem $n \times n$, por

$$\mathcal{P} = \int_0^{\infty} e^{At} BB^T e^{A^T t} \quad (3.9)$$

$$\mathcal{Q} = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} \quad (3.10)$$

Então \mathcal{P} e \mathcal{Q} são chamadas a *matriz Gramiana de controlabilidade* e *matriz Gramiana de observabilidade*, respectivamente. É conhecido que \mathcal{P} e \mathcal{Q} satisfazem as equações de Liapunov:

$$A\mathcal{P} + \mathcal{P}A^T + BB^T = 0 \quad (3.11)$$

$$A^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q}A + C^T C = 0, \quad (3.12)$$

e que ambas são definidas positivas se e somente o sistema é controlável e observável [10].

Cada sistema \mathcal{S} tem um conjunto de números que o caracterizam chamados *valores singulares do sistema* ou *valores singulares Hankel*. Estes são denotados por $\sigma_i(\mathcal{S})$ e definidos por

$$\sigma_i^2(\mathcal{S}) = \lambda_i(\mathcal{P}\mathcal{Q}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Os valores singulares do sistema são invariantes por transformações de estado. Isto é, os valores singulares do sistema $\check{\mathcal{S}}$ são os mesmos do sistema \mathcal{S} [10]. Isto é visto facilmente a partir das equações de Lyapunov (3.11):

$$\check{x} = Px \implies \check{\mathcal{P}} = P\mathcal{P}P^T, \quad \check{\mathcal{Q}} = P^{-T}\mathcal{Q}P^{-1} \implies \check{\mathcal{P}}\check{\mathcal{Q}} = P(\mathcal{P}\mathcal{Q})P^{-1}.$$

Isto mostra que os autovalores de $\check{\mathcal{P}}\check{\mathcal{Q}}$ são iguais aos autovalores de $\mathcal{P}\mathcal{Q}$. Assumiremos sempre que os valores singulares são ordenados decrescentemente: $\sigma_1(\mathcal{S}) \geq \sigma_2(\mathcal{S}) \geq \dots \geq \sigma_n(\mathcal{S})$.

Quando o sistema é não controlável a matriz Gramiana de controlabilidade \mathcal{P} é singular. Neste caso, o número de autovalores nulos $\lambda_i(\mathcal{P})$ descreve o número de estados do sistema que não podem ser controlados. Similarmente, se o sistema é não observável, \mathcal{Q} é singular e o número de autovalores nulos $\lambda_i(\mathcal{Q})$ representa o número de estados do sistema que não podem ser observados. Como um exemplo, defina um sistema descrito pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Então as matrizes Gramianas de controlabilidade e observabilidade são:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -0.3333 & -0.3333 & 0.0000 \\ -0.3333 & -2.3333 & 1.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.5000 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -1.3333 & 0.4167 & 0.8333 \\ 0.4167 & -0.3333 & -0.6667 \\ 0.8333 & -0.6667 & -1.3333 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de \mathcal{P} e \mathcal{Q} são:

$$\lambda(\mathcal{P}) = \{2.8109, 0.3558, 0.0000\}, \quad \text{e} \quad \lambda(\mathcal{Q}) = \{2.4465, 0.5335, 0.0000\}.$$

Disso concluímos que há 1 estado não controlável e 1 estado não observável.

Um outro aspecto interessante é que os valores singulares de uma variedade ampla de sistemas decrescem muito rapidamente. Este fato sugere que a parte

mais importante do sistema deve estar associada aos maiores valores singulares, assim, pouco deve ser perdido rejeitando-se os menores valores singulares, como ocorre em muitas aplicações (veja o exemplo referente a compressão de imagens via SVD de matrizes apresentado no Capítulo 1). Este fato sugere que podem ser construídos sistemas $\widehat{\mathcal{S}}$ de ordem k ($k \ll n$) usando apenas a informação do sistema associada aos k maiores valores singulares $\sigma_i(\mathcal{S})$. Isto será visto mais adiante.

Para sistemas discretos, as matrizes Gramianas de controlabilidade e observabilidade são definidas através de

$$\mathcal{P}_d = \sum_{k=0}^{\infty} (CA^k)^T (CA^k), \quad \mathcal{Q}_d = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k B)(A^k B)^T. \quad (3.14)$$

Neste caso, as Gramianas \mathcal{P}_d e \mathcal{Q}_d são as únicas soluções das equações de Lyapunov discretas (também conhecidas como equações de Stein):

$$A\mathcal{P}_dA^T + BB^T = \mathcal{P}_d \quad (3.15)$$

$$A^T\mathcal{Q}_dA + C^TC = \mathcal{Q}_d, \quad (3.16)$$

e os valores singulares do sistema $\sigma_i(\mathcal{S})$ são obtidos como

$$\sigma_i^2(\mathcal{S}) = \lambda_i(\mathcal{P}_d\mathcal{Q}_d), \quad i = 1, \dots, n.$$

3.2.2 Formulação do Problema

Para simplicidade, o sistema \mathcal{S} descrito pelas equações de estado (3.2) será denotado por:

$$\mathcal{S} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+p)} \quad (3.17)$$

Então, o problema de redução de ordem consiste em aproximar \mathcal{S} por $\widehat{\mathcal{S}}$:

$$\widehat{\mathcal{S}} = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & \widehat{D} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(k+q) \times (k+p)}. \quad (3.18)$$

Isto é, $\widehat{\mathcal{S}}$ é descrito pelas equações de estado

$$\widehat{\mathcal{S}} : \begin{cases} \dot{\widehat{x}}(t) &= \widehat{A}\widehat{x}(t) + \widehat{B}u(t) \\ \widehat{y}(t) &= \widehat{C}\widehat{x}(t) + \widehat{D}u(t), \end{cases} \quad (3.19)$$

com a mesma entrada $u(t)$, mas com diferente saída $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$, e diferentes variáveis de estado $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^k$ (ou seja, as dimensões dos vetores de entrada e saída devem ser mantidas), em que $k \ll n$, levando-se em conta que

- o erro na aproximação deve ser pequeno;
- deve ser preservada a estabilidade do sistema original;
- o procedimento deve ser computacionalmente estável e eficiente.

Alguns esclarecimentos devem ser dados. O primeiro é que a aproximação de \mathcal{S} por $\hat{\mathcal{S}}$ deve ser entendida em termos da norma do erro

$$\|e\| = \|y(t) - \hat{y}(t)\|, \quad (3.20)$$

em que $\|\cdot\|$ é uma norma escolhida adequadamente. Isto coloca a questão de como definir normas apropriadas para o problema. Uma norma frequentemente utilizada é a norma \mathcal{H}_∞ do sistema definida por

$$\|T\|_\infty = \sup_{\omega} \|T(j\omega)\|_2, \quad (3.21)$$

em que $T(j\omega)$ é a função de resposta em frequência do sistema: $T(j\omega) = \mathcal{F}(G(t))$, e \mathcal{F} denota transformada de Fourier. Levando-se em conta esta norma e a propriedade do operador \mathcal{F} de preservar normas, segue que, para toda entrada $u(t)$ de norma igual a 1, um limitante superior para o erro é

$$\|e\|_2 = \|\mathcal{F}(e)\|_2 \leq \|S\|_\infty \|u\|_2 \leq \|S\|_\infty.$$

3.3 Alguns Métodos de Redução de Ordem

Apresentamos apenas um método baseado na computação e truncamento dos valores singulares do sistema, bem como algumas idéias derivadas deste método que evitam a computação desses valores singulares e que sugerem outros métodos para o problema.

3.3.1 Método de Truncamento Balanceado

Começamos introduzindo algumas definições. Seja $\check{\mathcal{S}}$ o sistema equivalente a \mathcal{S} obtido via transformação $\check{x}(t) = Px(t)$, com P não singular. Dizemos que o

sistema transformado $\check{\mathcal{S}}$ está *balanceado* se as matrizes Gramianas satisfazem a propriedade

$$\check{P} = \check{Q} = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1(\mathcal{S}), \dots, \sigma_n(\mathcal{S})). \quad (3.22)$$

A matriz P que produz este efeito é chamada *matriz de balanceamento*. O seguinte teorema garante que sempre é possível encontrar uma matriz de balanceamento

Teorema 3.3.1 *Para todo sistema \mathcal{S} descrito pelas equações de estado (3.2), existe uma matriz de balanceamento P tal que o sistema equivalente $\check{\mathcal{S}}$ (3.8) tem matrizes Gramianas de controlabilidade e de observabilidade que satisfazem a relação (3.22).*

Demonstração: A prova do teorema pode ser vista em [10], Capítulo 7. □

O método do truncamento balanceado está baseado neste teorema e na hipótese da matriz de valores singulares Σ poder ser particionada como

$$\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2),$$

em que Σ_1 contém os k maiores valores singulares. Mais especificamente, se \mathcal{S} é um sistema balanceado e as matrizes deste sistema são particionadas como

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Du(t), \end{cases} \quad (3.23)$$

em que as partições são feitas de acordo com as dimensões de Σ_1 e Σ_2 , é possível mostrar que, cada vez que $\sigma_k(\mathcal{S}) \gg \sigma_{k+1}(\mathcal{S})$, o sistema $\hat{\mathcal{S}}$ de ordem reduzida $k \times k$, obtido via truncamento

$$\hat{\mathcal{S}} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + B_1u(t) \\ \hat{y}(t) = C_1x_1(t) + Du(t), \end{cases}, \quad (3.24)$$

é próximo de \mathcal{S} , no sentido que a função de transferência $\hat{T}(s)$ do sistema $\hat{\mathcal{S}}$ é próxima da função de transferência $T(s)$ de \mathcal{S} . Isto é, $\hat{T}(s) \approx T(s)$ no sentido da norma \mathcal{H}_∞ (3.21).

Conclusões importantes:

- O erro na aproximação satisfaz [16]

$$\|y(t) - \hat{y}(t)\|_2 \leq 2(\sigma_{k+1}(\mathcal{S}) + \cdots + \sigma_n(\mathcal{S})). \quad (3.25)$$

- O sistema $\hat{\mathcal{S}}$ obtido via truncamento balanceado preserva a estabilidade do sistema original.

Discutimos agora como calcular uma transformação de balanceamento. Assuma que as Gramianas \mathcal{P} e \mathcal{Q} são disponíveis e suponha que elas fatoram-se na forma

$$\mathcal{P} = UU^T, \quad \mathcal{Q} = LL^T,$$

em que U e L são triangulares inferior e superior, respectivamente. Suponha também que $U^T L$ é fatorada via SVD como:

$$U^T L = ZSY^T.$$

Uma transformação de balanceamento pode ser definida como

$$P_b = S^{1/2} Z^T U^{-1} = S^{-1/2} Y^T L^T. \quad (3.26)$$

Um método de redução de ordem via truncamento balanceado poderia seguir os seguintes passos:

1. Calcular as Gramianas \mathcal{P} , \mathcal{Q} e calcular os valores singulares $\sigma_i(\mathcal{S})$.
2. Calcular a transformação P_b como acima e computar as matrizes \check{A} , \check{B} e \check{C} do sistema transformado.
3. Construir o sistema de ordem k , seguindo o critério de escolher os k maiores valores singulares.

Aqui deve ser observado que o método é robusto apenas para sistemas de ordem pequena, digamos, para sistema de ordem não muito maior que 100. Para sistemas dinâmicos de ordem muito grande tais como aquele que descreve a EEI, o procedimento pode ser muito demorado ou até não viável, pelo custo alto das soluções das equações de Lyapunov e da SVD envolvidas [20, 41].

3.3.2 Exemplo

Considere o sistema \mathcal{S} definido pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -150 \\ 1 & 0 & 0 & -245 \\ 0 & 1 & 0 & -113 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 0 \ 1], D = [0].$$

Procedendo como acima, encontramos um sistema balanceado $\check{\mathcal{S}}$ definido pelas matrizes:

$$\check{A} = \begin{bmatrix} -0.4378 & 1.1685 & 0.4143 & 0.0510 \\ -1.1685 & -3.1353 & -2.8352 & -0.3289 \\ 0.4143 & 2.8352 & -12.4753 & -3.2492 \\ -0.0510 & -0.3289 & 3.2492 & -2.9516 \end{bmatrix}, \check{B} = \begin{bmatrix} -0.1181 \\ -0.1307 \\ 0.0563 \\ -0.0069 \end{bmatrix}$$

$$\check{C} = [-0.1181 \ 0.1307 \ 0.0563 \ 0.0069]$$

A matriz de balanceamento e as matrizes Gramianas são

$$P_b = \begin{bmatrix} -29.0903 & -4.0562 & 0.5526 & -0.3095 \\ -14.7840 & 5.4494 & -0.5565 & 0.4256 \\ -2.3226 & 2.0930 & -0.0296 & -0.1217 \\ -0.1181 & 0.1307 & 0.0563 & 0.0069 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0.0159 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0027 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Note que o último valor singular, muito pequeno, sugere que pode-se construir um sistema de ordem 3 muito próximo do original, conforme descrito na estimativa de erro em (3.25).

3.3.3 Métodos do tipo Lanczøs

A descrição vale só para sistemas SISO (single input/single output). Neste caso, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, e $C^T \in \mathbb{R}^n$.

Considere as matrizes $\mathcal{O}_t \in \mathbb{R}^{t \times n}$, $\mathcal{C}_t \in \mathbb{R}^{n \times t}$ e a matriz de Hankel

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{O}_t \mathcal{C}_t.$$

A idéia chave da aplicação do método Lanczøs ao problema é construir a fatoração LU de \mathcal{H}_t :

$$\mathcal{H}_t = LU = \mathcal{O}_t \mathcal{C}_t,$$

em que L e U são triangulares inferior e superior respectivamente, com a propriedade que $L(i, i) = \pm U(i, i)$. A fatoração sempre existe desde que os menores de \mathcal{H}_t de ordem $1, \dots, t$ sejam não nulos. A seguir defina $\pi_R \pi_L$ em que

$$\pi_L = L^{-1} \mathcal{O}_t, \quad \pi_R = \mathcal{C}_t U^{-1}. \quad (3.27)$$

É claro que $\pi_R \pi_L = I$ e assim $\pi_L \pi_R = I$ é uma matriz de projeção ortogonal. O sistema \widehat{S} de ordem reduzida é definida via matrizes

$$\widehat{A} = \pi_L A \pi_R, \quad \widehat{B} = \pi_L B, \quad \widehat{C} = C \pi_R. \quad (3.28)$$

Um método baseado no algoritmo de Lanczøs também pode ser construído. O passo chave neste método está na fatoração QR da matriz de controlabilidade \mathcal{C}_t :

$$\mathcal{C}_t = VU,$$

em que $V \in \mathbb{R}^{n \times t}$ é ortogonal, e U é triangular superior. Agora defina $\pi_U \pi_L$ em que

$$\pi_U = \pi_L^T = V.$$

Então é claro que $\pi_U \pi_L$ é uma matriz de projeção ortogonal.

O sistema \widehat{S} de ordem reduzida é definida como em (3.28), porém usando a nova projeção ortogonal.

Uma descrição formal do método baseado em iterações de Lanczøs é como segue:

1. $\beta = \sqrt{|B^T C^T|}$, $\gamma_1 = \text{sgn}(B^T C^T) \beta_1$, $v_1 = B / \beta_1$, $w_1 = C^T / \gamma_1$
2. For $j = 1, \dots, k$, set
 - (a) $\alpha_j = w_j^T A v_j$
 - (b) $r_j = A v_j - \alpha_j v_j - \gamma_j v_{j-1}$, $q_j = A^T w_j - \alpha_j w_j - \beta_j w_{j-1}$
 - (c) $\beta_{j+1} = \sqrt{|r_j^T q_j|}$, $\gamma_{j+1} = \text{sgn}(r_j^T q_j) \beta_{j+1}$
 - (d) $v_{j+1} = r_j / \beta_{j+1}$, $w_{j+1} = q_j / \gamma_{j+1}$

Uma vantagem de se utilizar métodos do tipo Lanczøs é que as únicas operações envolvidas são multiplicações matriz-vetor. Uma possível desvantagem é que os sistemas de ordem reduzida obtidos por esses algoritmos podem ser instáveis (autovalores com parte real positiva). Detalhes podem ser encontrados em [18].

3.4 O Problema de Realização de Sistemas Dinâmicos

Considere um sistema dinâmico com p entradas $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ e q saídas $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$, descrito pelas equações de estado em (3.1). Suponha ainda que o sistema encontra-se em repouso. Então a resposta \mathbf{y}_k do sistema ao vetor de entrada \mathbf{u}_k é governada pela operação de convolução

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^k G_{k-i} \mathbf{u}_i, \quad (3.29)$$

em que $G_k \in \mathbb{R}^{p \times q}$, conhecido como Parâmetro de Markov (ou resposta ao impulso unitário), é definido por

$$G_k = \begin{cases} D, & k = 0 \\ C A^{k-1} B, & k > 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

O problema de realização envolve a computação de certos subespaços dominantes de matrizes estruturadas. Consideraremos aqui os dois casos apresentados a seguir.

3.4.1 Realização a partir da Resposta ao Impulso Unitário

Assuma conhecida a sequência finita do sinal G_k , $k = 0, 1, \dots, L$. Então o problema de realização consiste em determinar matrizes A, B, C e D satisfazendo as equações de estado (3.1).

A solução do problema começa com a construção da matriz Hankel em bloco

$$H_{rs}(\ell) = \begin{bmatrix} G_\ell & G_{\ell+1} & \cdots & G_{\ell+s-1} \\ G_{\ell+1} & G_{\ell+2} & \cdots & G_{\ell+s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{\ell+r-1} & G_{\ell+r} & \cdots & G_{\ell+r+s-2} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Uma propriedade importante desta matriz é que ela pode ser fatorada como

$$H_{rs}(\ell) = \mathcal{O}A^\ell\mathcal{C}, \quad (3.32)$$

em que \mathcal{O} e \mathcal{C} são as matrizes de observabilidade e controlabilidade, respectivamente (veja (3.6)). A propriedade do sistema ser observável e controlável implica então que

$$\text{posto}(H_{rs}(\ell)) = n, \quad (3.33)$$

para $\ell \geq 0$ e $r, s \geq n$. Esta propriedade, bem como a decomposição (3.32), são a base para uma série de métodos de realização [3, 5, 10, 15, 25, 30, 44, 46, 50]. Daqui em diante, assumiremos sempre que o sistema é controlável e observável.

Método de Zeiger-Mac Ewen

Observando que \mathcal{O} e \mathcal{C} são de posto completo, igual a n , temos que para $\ell = 1$

$$A = \mathcal{O}^\dagger H_{rs}(1)\mathcal{C}^\dagger, \quad (3.34)$$

em que o símbolo \dagger denota a pseudo-inversa de uma matriz. Agora considere a decomposição SVD da matriz Hankel em bloco

$$H_{rs}(0) = [U_1 \ U_2] \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2) [V_1 \ V_2]^T = U_1 \Sigma_1 V_1^T,$$

em que Σ_1 contém os valores singulares não nulos de $H_{rs}(\ell)$ e U_1 e V_1 , os vetores singulares associados. Observe ainda que esta decomposição pode ser reescrita similarmente como em (3.32):

$$H_{rs}(0) = (U_1 \Sigma_1^{1/2})(\Sigma_1^{1/2} V_1^T).$$

Assim, fica claro que podemos tomar

$$\hat{\mathcal{O}} = U_1 \Sigma_1^{1/2}, \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{C}} = \Sigma_1^{1/2} V_1^T, \quad (3.35)$$

como estimativas para as matrizes de observabilidade e controlabilidade, respectivamente. ²

O método de Zeiger-Mac Ewen utiliza essas estimativas em (3.34) [50]. Daí vem que

$$\hat{A} = \Sigma_1^{-1/2} U_1^T H_{rs}(1) V_1 \Sigma_1^{-1/2}, \quad (3.36)$$

²Pode-se provar que existe uma matriz não singular T tal que $\mathcal{O} = \hat{\mathcal{O}}T$ e $\mathcal{C} = T^{-1}\hat{\mathcal{C}}$.

é uma matriz semelhante a A . As matrizes restantes para resolver o problema da realização são obtidas da seguinte forma

$$\hat{B} = \Sigma_1^{1/2} V_1^T (1 : n, 1 : p) \quad (3.37)$$

$$\hat{C} = U_1 (1 : q, 1 : n) \Sigma_1^{1/2} \quad (3.38)$$

$$\hat{D} = G_0. \quad (3.39)$$

O Método de Kung

Este método está baseado na propriedade de invariância ao deslocamento (shift-invariant) das matrizes de observabilidade e controlabilidade [44, 46, 50]. Especificamente, considere a estimativa para a matriz de observabilidade definida em (3.35) e defina \bar{U} como sendo a submatriz de \hat{O} formada pelas primeiras $r - 1$ linhas bloco. Então a invariância ao deslocamento da matriz de observabilidade nos permite deduzir que

$$\bar{U} \Sigma_1^{1/2} \hat{A} = \underline{U} \Sigma_1^{1/2}. \quad (3.40)$$

Agora, como \bar{U} é de posto completo (igual a n), a equação acima pode ser resolvida via pseudo-inversão. Assim, obtemos que

$$\hat{A} = \Sigma_1^{-1/2} \bar{U}^\dagger \underline{U} \Sigma_1^{1/2}. \quad (3.41)$$

Um fato interessante relacionado com a fórmula acima é que a pseudo-inversa envolvida pode ser calculada sem a necessidade de inverter matrizes. Informação adicional sobre realização de sistemas pode ser encontrada em [25].

3.5 Realização a partir de Informação Input-Output

O problema de construir uma realização do sistema utilizando apenas os sinais de entrada e saída é mais complicado do que o caso anterior. Assim, somente apresentamos uma discussão introdutória do assunto. Começamos com a observação que os sinais $\mathbf{f}_k, \mathbf{y}_k, k = 0, 1, \dots$, satisfazem a equação [44, 30]

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Gamma X} + \mathbf{H F}, \quad (3.42)$$

onde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k & \mathbf{y}_{k+1} & \cdots & \mathbf{y}_{k+j-1} \\ \mathbf{y}_{k+1} & \mathbf{y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{y}_{k+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}_{k+i-2} & \mathbf{y}_{k+i-1} & \cdots & \mathbf{y}_{k+i+j-3} \\ \mathbf{y}_{k+i-1} & \mathbf{y}_{k+i} & \cdots & \mathbf{y}_{k+i+j-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} G_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 & G_0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_2 & G_1 & G_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{i-2} & G_{i-3} & G_{i-4} & \cdots & G_0 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_k \ \mathbf{x}_{k+1} \ \cdots \ \mathbf{x}_{k+j-1}],$$

e \mathbf{F} é uma matriz Hankel em bloco construída similarmente a \mathbf{Y} .

A idéia básica do método apresentado a seguir consiste inicialmente em encontrar uma matriz $\check{\mathbf{F}}$ com a propriedade $\mathbf{F}\check{\mathbf{F}} = 0$. Se isto for possível, de (3.42) vem que

$$\mathbf{Y}\check{\mathbf{F}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{X}\check{\mathbf{F}}. \quad (3.45)$$

Desta relação deduz-se que se

$$\mathbf{A-1} \text{ posto}(\mathbf{\Gamma}) = n$$

$$\mathbf{A-2} \text{ posto}(\mathbf{X}\check{\mathbf{F}}) = n,$$

então

$$\text{posto}(\mathbf{Y}\check{\mathbf{F}}) = n. \quad (3.46)$$

A condição **A-1** é verdadeira quando o sistema é observável. Embora **A-2** seja algo restritiva, pois depende muito do sinal de entrada, ela é frequentemente satisfeita quando o sinal de entrada é um ruído Gaussiano com média zero [44]. Também, é importante observar que a existência da matriz $\check{\mathbf{F}}$ exige que \mathbf{F} seja uma matriz com muito mais colunas do que linhas ($j \gg l \times i$).

Resumindo, se **A-1** e **A-2** forem satisfeitas, então a matriz $\mathbf{Y}\check{\mathbf{F}}$ é posto-deficiente e seu subespaço coluna é gerado pelas colunas da matriz de observabilidade $\mathbf{\Gamma}$. Esta informação pode ser utilizada para detectar a ordem n do

sistema, bem como para calcular estimativas de A (em verdade, o que é estimado é uma matriz \tilde{A} semelhante a A). De fato, seja \mathcal{U} uma matriz $(i \times l) \times n$ cujas colunas formam uma base ortonormal para $-$, calculada usando a SVD da matriz $\mathbf{Y}\check{\mathbf{F}}$, por exemplo. Defina \mathcal{U}_1 como sendo a matriz formada pelas primeiras $j - 1$ linhas-bloco de \mathcal{U} e \mathcal{U}_2 , a matriz formada pelas últimas $j - 1$ linhas-bloco de \mathcal{U} . Então, prova-se que existe uma matriz \tilde{A} , $n \times n$, semelhante a A , satisfazendo a equação

$$\mathcal{U}_1 \tilde{A} = \mathcal{U}_2. \quad (3.47)$$

Daí é imediato que $\tilde{A} = \mathcal{U}_1^\dagger \mathcal{U}_2$. Note também que a matriz \tilde{C} pode ser estimada de imediato. O cálculo das matrizes \tilde{B} e \tilde{D} é mais complexo e fica para uma outra oportunidade.

Um comentário deve ser colocado sobre a solução do problema em situações reais. O fato é que como os sinais de entrada e saída são sempre contaminados por ruídos, mesmo com o sinal de entrada satisfazendo **A-2**, a propriedade (3.46) dificilmente é satisfeita. Assim, na prática, a ordem do sistema é estimada a partir do número de valores singulares dominantes da matriz $(\mathbf{Y}\check{\mathbf{F}})^3$ e a matriz \mathcal{U} é construída então usando-se os vetores singulares à direita associados a esses valores singulares.

3.6 Computação de um Subespaço Invariante Dominante

Em muitas aplicações tais como processamento de sinais, geofísica, compressão de imagens e recuperação de informações (de um texto, por exemplo), entre outras, deparamo-nos com o problema de calcular autovalores dominantes de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e o correspondente subespaço invariante. A hipótese usual nesta classe de problemas é que

$$A \approx B + \gamma I, \quad \gamma > 0, \quad (3.48)$$

em que B uma matriz semipositiva definida desconhecida de posto $d \ll n$ e I , a matriz identidade $n \times n$. Em processamento de sinais, por exemplo, as matrizes envolvidas são matrizes da forma $H^T H$, $H H^T$, $T^T T$, com H e T sendo

³Os valores singulares $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ da matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são dominantes se

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d \gg \sigma_{d+1} \geq \sigma_{d+2} \geq \dots \geq \sigma_n$$

Hankel e Toeplitz, respectivamente; ou matrizes de covariância associadas ao sinal [22, 23, 35, 45, 46, 49].

Em outras aplicações, tais como em análise modal de estruturas, a matriz A é não simétrica, e tem d valores singulares dominantes [3]. O objetivo aqui é calcular uma matriz A_d de posto d tal que $A \approx A_d$ em um certo sentido. Se usamos a norma Frobenius como uma medida de aproximação, então, de acordo com o Teorema de Eckart-Young [17], a solução ótima do problema é dada por

$$A_d = \sum_{i=1}^d \sigma_i u_i v_i^T, \quad (3.49)$$

em que u_i e v_i são os vetores singulares associados aos valores singulares dominantes [9, 11, 27]. Um outro problema importante relacionado com subespaços invariantes dominantes aparece quando a matriz A tem alguma estrutura especial (em recuperação de exponenciais a matriz é normalmente Hankel ou Toeplitz). Neste caso, o objetivo é calcular uma matriz A_d de posto d , próxima de A , mas conservando a estrutura da matriz original. Problemas deste tipo são resolvidos iterativamente usando métodos de projeções sucessivas.

Obviamente, os problemas acima poderiam ser resolvidos calculando-se uma decomposição espectral da matriz A , a partir da qual seria feita a separação da parte dominante do espectro. A dificuldade decorre do fato desses problemas envolverem matrizes muito grandes: o custo computacional de uma decomposição espectral completa torna-se proibitivo.

Apêndice

Apêndice A

Valores Singulares de uma Matriz

Um teorema fundamental na Álgebra Linear é o Teorema da Decomposição em Valores Singulares (*Singular Value Decomposition*). São inúmeras as aplicações desse teorema, como vimos nos capítulos anteriores. Esse teorema diz que toda transformação linear é no fundo uma transformação que muda as unidades de medida nos eixos. Ou seja, uma transformação linear observada de referenciais privilegiados no domínio e no contradomínio é dada por uma matriz diagonal semipositiva (os zeros são relativos à nulidade da transformação). Como uma transformação linear é uma função contínua, a imagem da bola unitária é ainda um compacto. Se a dimensão da imagem é maior que 1, essa imagem é então o gráfico de um elipsóide, pois a matriz diagonal simplesmente altera os eixos da figura (eventualmente, diminuindo a dimensão da superfície). Ou seja, os valores singulares são os tamanhos dos eixos da elipsóide. O enunciado do teorema é o seguinte.

Teorema A.0.1 (SVD) *Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Seja p o posto de A . Então existem matrizes ortogonais $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $A = U\Sigma V^T$, em que Σ é uma matriz $m \times n$ diagonal ($\Sigma_{ij} = 0$, para $i \neq j$) tal que $\Sigma_{11} \geq \Sigma_{22} \geq \dots \geq \Sigma_{pp} > 0$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrado, por exemplo, em [17]. Os valores $\sigma_i = \Sigma_{ii}$ são ditos os valores singulares de A ; os vetores colunas de U e de V são chamados respectivamente de vetores singulares à direita e de vetores singulares à esquerda.

No exemplo dado na introdução, a imagem do mandril é dada por uma matriz 480×500 e os seus valores singulares têm a distribuição em \mathbb{R}^+ dada pelos gráficos da figura seguinte.

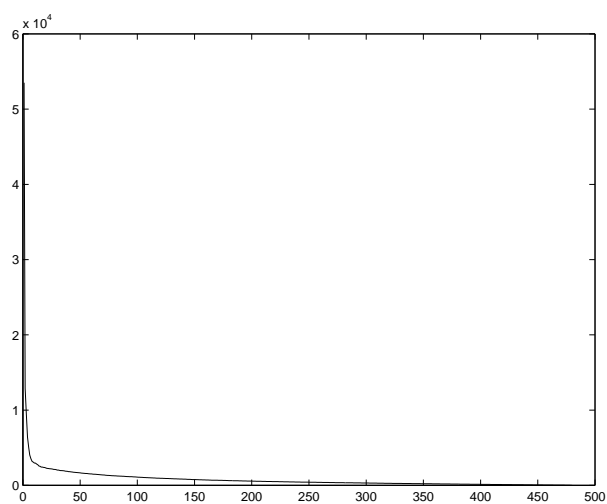


Figura A.1: valores singulares

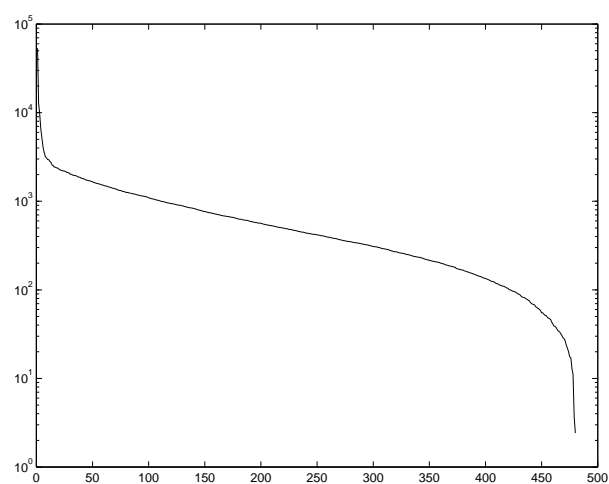


Figura A.2: log dos val. singulares

Apêndice B

Estabilidade segundo Liapunov

Definição B.0.2 *Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 , em que Δ é um aberto de \mathbb{R}^n . Um ponto singular x_0 de um sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ ($\dot{x} = \dot{x}(t)$) é estável se para toda vizinhança U de x_0 existe uma vizinhança U_1 de x_0 tal que qualquer solução $\phi(t)$ com $\phi(0)$ em U_1 é definida em U para todo $t \geq 0$.*

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se todos os autovalores de A têm parte real negativa então existem K e μ positivos tais que $\|e^{At}\| \leq Ke^{-\mu t}$ para todo $t \geq 0$ (é só ver que $e^{At} = Pe^{(D+N)t}P^{-1}$, em que $A = P(D+N)P^{-1}$ é a forma de Jordan de A). Logo, o vetor 0 é um ponto singular estável do sistema $\dot{x} = Ax$ (aplique a definição acima, observando que a solução do sistema linear com $x(0) = z$ é $e^{At}z$). Não é difícil ver que se A tem algum autovalor com parte real positiva então 0 não é estável.

Definição B.0.3 *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita estável se todos os seus autovalores têm parte real negativa.*

Definição B.0.4 (Função de Liapunov) *Seja x_0 um ponto singular do sistema $\dot{x} = f(x)$, em que $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , Δ é um aberto de \mathbb{R}^n . Uma função de Liapunov para x_0 é uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável, definida em um aberto U (contido em Δ) que contém x_0 , satisfazendo as seguintes condições:*

1. $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0$, se $x \neq x_0$;
2. Se $x(t)$ é uma solução tal que $x(0) \in U$ então $\frac{dV(x(t))}{dt}|_{t=0} \leq 0$.

Teorema B.0.5 (Critério de Liapunov) *Se existe uma função de Liapunov para x_0 então x_0 é estável.*

A prova desse teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [43].

Teorema B.0.6 (Teorema de Liapunov) *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é estável se e somente se $XA + A^T X = -I$ tem como solução uma matriz simétrica definida positiva.*

Demonstração: A primeira parte desse teorema é decorrência dos lemas abaixo.

Lema B.0.7 *Seja $L_{A,B} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ a função tal que $L_{A,B}(X) = XA + BX$. Então $\lambda(L_{A,B}) = \{\lambda + \mu \mid \lambda \in \lambda(A), \mu \in \lambda(B)\}$.*

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidade, que A e B são diagonalizáveis (lembrem-se que o conjunto das matrizes diagonalizáveis é denso no conjunto das matrizes e que a matriz associada ao operador $L_{A,B}$ é formada por soma de entradas de A e de B). Sejam u e v vetores não nulos de \mathbb{C}^n tais que $u^H A = au^H$ e $Bv = bv$, para $a, b \in \mathbb{C}$. Então a matriz $X = vu^H$ é um autovetor de $L_{A,B}$, pois $XA + BX = vu^H A + Bvu^H = (a + b)vu^H = (a + b)X$.

□

Notemos que se A e B são estáveis então $L_{A,B}$ é estável. Em particular, se $B = A^T$, L_{A,A^T} é estável e, logo, é inversível.

Lema B.0.8 *Se A e B são estáveis então a solução de $XA + BX = C$ é dada por*

$$X = - \int_0^{\infty} e^{tB} C e^{tA} dt.$$

Demonstração: Seja $L = L_{A,B}$.

$$\int_0^{\infty} e^{tL} dt = L^{-1} \int_0^{\infty} L e^{tL} dt = L^{-1} [e^{tL}]_0^{\infty} = -L^{-1}$$

□

Logo, $LX = C$ implica que $X = L^{-1}C = - \int_0^{\infty} e^{tL} C dt$. Ou seja, $e^{tL}C$ é a solução de $\dot{L} = LY$, $Y(0) = C$. Por outro lado, $Y(t) = e^{tB} C e^{tA}$ também é solução do mesmo problema de valores iniciais. Logo, pelo teorema de unicidade de soluções de um sistema linear, $e^{tL}C = e^{tB} C e^{tA}$.

Corolário B.0.9 $L_{A,A^T} X = -I$ tem solução única.

Lema B.0.10 Se A é estável então a solução de $XA + A^T X = -I$ é simétrica definida positiva.

Demonstração: Falta apenas mostrar que $P = -\int_0^\infty e^{tA}(-I)e^{tA^T} dt$ é definida positiva. Mas $P = \int_0^\infty e^{tA}e^{tA^T} dt = \int_0^\infty e^{tA}(e^{tA})^T dt$ e, logo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T P x = \int_0^\infty x^T e^{tA}(e^{tA})^T x dt > 0$.

□

Para provar a recíproca, seja x uma solução do sistema $\dot{x} = Ax$. Se P é uma matriz simétrica definida positiva tal que $PA + A^T P = -I$ então definamos $V(x) = x^T P x$. Notemos que $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e que $\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$ para qualquer solução não nula, pois

$$\frac{d(x^T P x)}{dt} = x^T P \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^T P x = x^T P A x + x^T A^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T x.$$

Assim, pelo critério de Liapunov, A é estável.

□

Bibliografia

- [1] E. ANDERSON ET AL., *LAPACK Users' Guide 3rd ed.*, SIAM, Philadelphia, 1999.
- [2] Z. BAI AND G. W. STEWART, *SRRIT: a FORTRAN subroutine to calculate the dominant invariant subspace of a nonsymmetric matrix*, Computer Science Dept. Report TR 2908, University of Maryland, April 1992.
- [3] F. S. V. BAZÁN E C. BAVASTRI, *An Optimized Pseudo-Inverse Algorithm (OPIA) For Multi-Input Multi-Output Modal Parameter Identification*, Mechanical Systems and Signal Processing 10: 365–380, 1996.
- [4] F. S. V. BAZÁN, *Conditioning of Rectangular Vandermonde Matrices with Nodes in the Unit Disk*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 21(2), 679–693, 2000.
- [5] F. S. V. BAZÁN, *Sensitivity Eigenanalysis of Single Shift Invariant Subspace-Based Methods*, Signal Processing 80: 89–100, 2000.
- [6] L. H. BEZERRA, C. TOMEI, AND R. ALAN MCCOY, *Möbius Transforms and Solvers for Large Sparse Generalized Nonsymmetric Eigenvalue Problems*, TR/PA/98/03, CERFACS, Toulouse, France, 1998.
- [7] L. H. BEZERRA AND C. TOMEI, *Spectral Transformation Algorithms for Computing Unstable Modes*, Comp. Appl. Math. 18(1), 1–14, 1999.
- [8] Å. BJÖRCK, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [9] D. CALVETTI, L REICHEL E D. C. SORENSEN, *An Implicitly Restarted Method for Large Symmetric Eigenvalue Problems*. Electronic Transactions on Numerical Analysis, 2: 1-21, 1994.
- [10] CHI-TSONG CHEN, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, Third Edition, New York, 1999.

- [11] M. CLINT AND A. JENNINGS, *A simultaneous iteration method for the unsymmetric eigenvalue problem*, J. Inst. Math. Appl. 8: 111-121, 1971.
- [12] P. J. DAVIS, *Circulant Matrices*. John Wiley & Sons, 1979.
- [13] P. DEIFT, T. NANDA, AND C. TOMEI, *Ordinary Differential Equations and the Symmetric Eigenvalue Problem*, SIAM J. Numer. Anal. 20: 1-22, 1983.
- [14] J. W. DEMMEL, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [15] W. GAWRONSKI AND H. G. NATKE, *Order estimation of AR and ARMA Models*. Int. J. Systems Sci. 19(7), 1143-1148, 1988.
- [16] K. GLOVER, *All optimal Hankel-norm approximants of multivariable systems and their L^∞ -error bounds*, International Journal of Control, 39: 1115-1193, 1984.
- [17] G. H. GOLUB E C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations, 3rd ed.*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [18] E. J. GRIMME, D. C. SORENSEN, AND P. VAN DOOREN, *Model reduction of state space systems via an implicitly restarted Lanczøs Method*, Numerical Algorithms, 12: 1-31, 1995.
- [19] P. C. HANSEN, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [20] A. S. HODEL, R. B. TENISON, AND K. POOLA, *Numerical solution of large Lyapunov equations by approximate power iteration*, Lin. Alg. Applic., 236: 205-230, 1996.
- [21] J. J. HOLLKAMP AND S. M. BATILL, *Automated parameter identification and order reduction for discrete time series*. AIAA Journal 29: 96-103, 1991.
- [22] Y. HUA AND T. P. SARKAR, *Matrix Pencil Method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise*. IEEE Trans. On Acoust. Speech and Signal Precessings 38(5), 814-824, May 1990.

- [23] S. VAN HUFFEL, H. CHEN, C. DECANNIERE E P. VAN HECKE, *Algorithm for time-domain NMR data fitting based on Total Least Squares*, Journal of Magnetic Resonance A, 110: 228-237, 1994.
- [24] R. KUMARESAN E D. W. TUFTS, *Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise*, IEEE trans. Acoust. Speech and Sign. Proc., 30: 833-840, 1982.
- [25] S.Y. KUNG, *A New Identification and Model Reduction Algorithm via Singular Value Decomposition*. 12th Asilomar Conf. on Circuits, Systems and Comp., 705–714, Asilomar, CA, Nov. 1978.
- [26] R. B. LEHOUCQ, *Analysis and Implementation of an Implicitly Restarted Arnoldi Iteration*, PhD Thesis, Rice University, Houston, 1995.
- [27] R. B. LEHOUCQ E D. C. SORENSEN, *Deflation Techniques for an Implicitly Restarted Arnoldi Iteration*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 17(4), 789-821, 1996.
- [28] R. B. LEHOUCQ, D. C. SORENSEN AND C. YANG, *ARPACK Users' Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [29] C. MCGUILLEN AND G. COOPER, *Continuous & Discrete Signals and System Analysis, 3rd ed.*, Saunders College Publishing, 1991.
- [30] M. MOONEN, B. DE MOOR, L. VANDENBERGHE, J. VANDEWALLE, *On- and Off-line identification of linear state-space models*, Int. J. On Control 49:1, 219-232, 1989.
- [31] R. B. MORGAN, *On Restarting the Arnoldi Method for Large Nonsymmetric Eigenvalue Problems*, Math. Comp. 65: 1213–1230, 1996.
- [32] B. N. PARLETT, *The Symmetric Eigenvalue Problem*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [33] B. N. PARLETT E D. S. SCOTT, *The Lanczøs Algorithm with Selective Orthogonalization*, Math. Comp. 33: 217-238, 1979.
- [34] B. N. PARLETT, D. TAYLOR AND Z. LIU, *A Look-Ahead Lanczøs Algorithm for Unsymmetric Matrices*, Math. Comp. 44: 105–124, 1985.

- [35] R. DE PRONY, *Essai expérimental et analytique sur les loi de la dilatabilité et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la capeur de l'alkool, à différentes températures*, J. de l'École Polytechnique 1: 24-76, 1795.
- [36] H. RUTISHAUSER, *Simultaneous Iteration Method for Real Symmetric Matrices*. Numer. Math. 16: 205-223, 1970.
- [37] Y. SAAD, *Variations of Arnoldi's Method for Computing Eigenlements of Large Unsymmetric Matrices*, Lin. Alg. and Its Applic. 34: 269–295, 1980.
- [38] Y. SAAD, *Practical Use of Some Krylov Subspace Methods for Solving Indefinite and Nonsymmetric Linear Systems*, SIAM J. Sci. and Stat. Comp. 6:865–882, 1984.
- [39] Y. SAAD, *Chebyshev Acceleration Techniques for Solving Nonsymmetric Eigenvalue Problems*, Math. Comp. 42: 567–566, 1984.
- [40] Y. SAAD, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems: Theory and Algorithms*, Wiley, New York, 1992.
- [41] H. D. SIMONS, *Analysis of the Symmetric Lanczøs Algorithm with Reorthogonalization Methods*, Lin. Alg. Applic., 61: 101-131, 1984.
- [42] D. C. SORENSEN, *Implicit Aplication of Polynomial Filters in a k-step Arnoldi Method*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 13: 357-385, 1992.
- [43] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Euclides, Vol. 11, IMPA, Rio de janeiro, 1979.
- [44] SWINDLEHURST, R. B. ROY, B. OTTERSTEN, T. K. KAILATH, *A subspace fitting method for identification of linear state space models*. IEEE Trans. Autom. Control 40(2), 316–331, Feb. 1995.
- [45] J. TOTZ, A. V. D. BOOGAART, S. V. HUFFEL, D. GRAVERON-DEMILLY, I. DOLOGKOU, R. HEIDLER AND D. MICHEL, *The Use of Continuous Regularization in the Automated Analysis of MRS Time-Domain Data*. Journal of Magnetic Resonance 124: 400-409, 1997.
- [46] A. VAN DER VEEN, E. F. DEPRETTERE E A. LEE SWINDLEHURST, *Subspace-Based Signal Analysis using Singular Value Decomposition*, Proceedings of the IEEE, 81(9), 1277-1309, Sep. 1993.

- [47] M. VIBERG E B. OTTERSTEN, *Sensor Array Procesing Based on Subspace Fitting*, IEEE Trans. Signal Processing 39: 1110-1121, 1991.
- [48] J. H. WILKINSON, *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford University Press, Oxford, Great Britain, 1965.
- [49] G. XU AND T. KAILATH, *Fast Estimation od Principal Eigenspace using Lanczøs Algorithm*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 15: 974-994, 1994.
- [50] H. P. ZEIGER E A. J. MAC-EWEN, *Approximate Linear Realization of Given Dimension via Ho's Algorithm*, IEEE Trans. Aut. Control 19: 153, 1974.