PAINEL III

PERÍMETRO MÁXIMO, PROBLEMA DE HERON E ELIPSES

Licio Hernanes Bezerra (Matemática – UFSC)

Numa palestra do professor José Luiz Rosas Pinho [1] sobre máximos e mínimos em Geometria Euclidiana, enunciou-se o seguinte problema: dados A e B, dois pontos distintos de uma circunferência, achar o ponto C da circunferência tal que o triângulo ABC tenha perímetro máximo.

Surgiu então uma solução baseada na consideração das elipses de focos A e B. Lembremos que uma tal elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a A e B é uma constante positiva ρ; denotaremos essa elipse por $E(A, B, \rho)$. Observemos ainda que, se $\rho > \rho'$, então a elipse $E(A, B, \rho)$ contém a elipse $E(A, B, \rho')$ em seu interior, já que elas não podem se interceptar em nenhum ponto Q (pois, se isso acontecesse, a soma da distância de Q a um dos focos com a distância de Q ao outro foco seria igual a dois valores distintos); os eixos maiores têm comprimento ρ e ρ', respectivamente. A solução do problema será um ponto C na interseção da circunferência com a elipse $E(A, B, \rho)$ com o maior valor possível de ρ para o qual a elipse ainda intercepta a circunferência, pois o perímetro do triângulo ABC é exatamente $\rho + AB$.

Agora, a elipse com valor máximo para ρ também terá valor máximo para o comprimento de seu eixo. Os eixos menores passam pelo ponto médio de AB e são perpendiculares a AB. Como

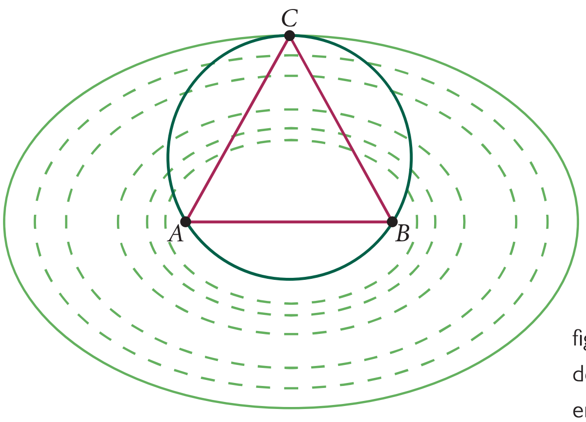

figura 1 – Perímetro máximo de ABC e elipses com focos em A e B

AB é uma corda da circunferência, os eixos menores também passam pelo centro da circunferência. O semieixo de maior comprimento possível que passa pelo centro da circunferência terá extremo na circunferência e esse extremo será então exatamente o ponto C procurado. Em particular, conclui-se que esse triângulo será isósceles.

O professor continuou sua palestra e abordou então o problema de Heron: dados dois pontos A e B, que não pertencem a uma reta r, achar o ponto C da reta tal que o perímetro de ABC seja mínimo. Nesse caso, a elipse $E(A, B, \rho)$ que resolveria o problema seria a elipse que tangencia a reta em C. De fato, se $\rho' < \rho$, a elipse $E(A, B, \rho')$ estaria contida no interior da elipse $E(A, B, \rho)$ e não poderia interceptar a reta. Se $\rho' > \rho$, o perímetro não seria mínimo. Esta não é uma solução construtiva para o problema, ou seja, em geral é impossível obter o ponto C com régua e compasso. Uma solução simples para esse problema é obter a interseção da reta $A'B$ com a reta r, em que A' é o simétrico de A em relação a r. Contudo, juntando essas duas soluções, obtemos uma demonstração trivial de uma propriedade das elipses: dado um ponto C na elipse de focos A e B, os ângulos que as retas CA e CB fazem com a reta r, tangente à elipse, são iguais (ver figura 2 abaixo).

De fato, esse ponto C é solução do problema de minimização do perímetro, e uma inspeção na solução "trivial" acima mostra que os ângulos têm que ser iguais.

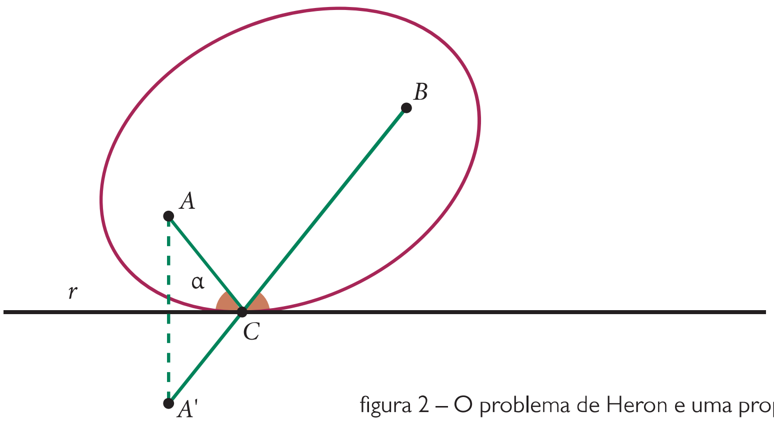

figura 2 – O problema de Heron e uma propriedade de elipse

REFERÊNCIA

[1] J. L. R. Pinho. *Resolvendo problemas de extremos em Geometria Euclidiana por métodos não analíticos: o muito que se pode fazer no ensino básico com um "pouco" de Geometria.* 1º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática. http://simposio.profmat-sbm.org.br/docs/Palestra-Professor-Pinho.pdf