

Quadrados mágicos simples

Licio Hernanes Bezerra

Departamento de Matemática - UFSC
Florianópolis - SC

Este artigo é dedicado à memória do Professor Waldir Quandt, com quem curti resolver muitos problemas de sua vasta coleção de livros de Matemática Recreativa nos idos anos da década de 90.

Desde a antiguidade quadrados mágicos têm atraído a atenção de muitas pessoas. Os quadrados mágicos $n \times n$ mais simples são os que contêm os números de 1 a n^2 de tal modo que a soma das linhas, das colunas e das duas diagonais principais dá o mesmo resultado (qual?). Uma das primeiras aparições de um quadrado mágico na arte ocidental foi na gravura *Melancholia*, de Albrecht Dürer, datada de 1514 (ver http://pt.wikipedia.org/wiki/Albrecht_Dürer). Os japoneses construíram vários tipos durante o período Edo (1603-1867), quando propositalmente isolaram-se do ocidente.

A solução do quadrado 3×3 é simples, pois são poucas as possibilidades de somas de 3 números, entre 1 e 9, cujo resultado seja 15 (por que 15?): $9+5+1$, $9+4+2$, $8+6+1$, $8+5+2$, $8+4+3$, $7+6+2$, $7+5+3$, $6+5+4$. Observemos que como o número que fica no centro do quadrado tem que aparecer em 4 somas (as dos números das diagonais, a dos números da segunda linha e a dos números da segunda coluna), ele tem que ser 5. Os números dos cantos dos quadrados aparecem em 3 somas, cada um. Logo, esses números têm que ser: 2, 4, 6 e 8. Agora, é só completar e obtemos um quadrado mágico 3×3 .

Observamos que todos os quadrados mágicos de ordem 3 possíveis são originados por reflexões do quadrado acima. É importante um aluno de Matemática aprender a seguir procedimentos, pois é isso que ele faz, por exemplo, ao realizar operações algébricas. O seguinte procedimento pode ser utilizado para se construir um quadrado mágico básico (números de 1 a n^2), de ordem ímpar:

1. coloque o 1 na primeira linha (a de cima), na coluna do meio;
2. coloque o número seguinte sempre na casa acima e à direita da anterior.

3. caso as instruções o levem a sair do quadrado, imagine que existam 8 quadrados gêmeos, iguais a ele, posicionados acima, abaixo, nas diagonais e nos lados, como se ele fosse o quadrado do centro do jogo da velha e os outros 8 fossem os circundantes. Coloque então esse número na mesma posição em que se encontraria no quadrado gêmeo correspondente ao caso (por exemplo, o 2 vai ser colocado na última linha, na coluna imediatamente à direita da coluna do meio, pois esta seria a posição do 2 no quadrado gêmeo imediatamente acima);
4. se encontrar uma casa ocupada, ponha o número na casa imediatamente abaixo da casa do número anterior.

Complicado? Se o procedimento não for entendido à primeira vista, ele deve ser relido quantas vezes forem necessárias para a completa compreensão. Novamente, é importante que se desenvolva no aluno uma verificação constante do que está sendo deduzido ou construído. A Matemática Recreativa, com seus jogos tipo descubra o erro, siga as instruções seguintes, encaixe números segundo uma regra etc, tem um papel importante no desenvolvimento crítico e analítico do ser humano, em geral. A arte e a ciência muitas vezes se inspiraram nos quadrados mágicos. Alguns exemplos:

- O sistema interativo MATLAB, que é utilizado principalmente para resolver problemas que envolvem Álgebra Linear, tem quadrados mágicos como exemplos de matrizes que têm comportamento numérico singular. É só escrever *magic(8)* que o MATLAB retorna uma matriz 8×8 , formada por números de 1 a 64, cujas linhas, colunas e diagonais obedecem a regra de ter a soma de seus elementos igual a ... (complete).
- Na edição de fevereiro de 1999 da revista American Mathematical Monthly (revista de divulgação de Matemática para estudantes universitários e professores de ensino fundamental e médio) aparece o artigo *Magic Squares Indeed!*, dos professores Arthur T. Benjamin e Kan Yasuda. Nesse artigo, eles mostram uma estranha propriedade de alguns quadrados mágicos simples. Por exemplo, dado

o quadrado mágico $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$, note que

$$618^2 + 753^2 + 294^2 = 816^2 + 357^2 + 492^2 \text{ (linhas)}$$

$$672^2 + 159^2 + 834^2 = 276^2 + 951^2 + 438^2 \text{ (colunas)}$$

$$654^2 + 132^2 + 879^2 = 456^2 + 231^2 + 978^2 \text{ (diagonais superiores)}$$

$$654^2 + 798^2 + 213^2 = 456^2 + 897^2 + 312^2 \text{ (diagonais inferiores)}$$

$$852^2 + 174^2 + 639^2 = 258^2 + 471^2 + 936^2 \text{ (contra-diagonais superiores)}$$

$$852^2 + 396^2 + 417^2 = 258^2 + 693^2 + 714^2 \text{ (contra-diagonais inferiores)}.$$

- Um quadrado cristão-mágico 4×4 aparece esculpido na Sagrada Família, famosa igreja católica inacabada em Barcelona, cuja construção foi iniciada pelo arquiteto catalão Antoni Gaudi em 1882, interrompida com a sua morte em 1926 e retomada mais tarde ³. Note que neste quadrado aparecem números repetidos, mas a soma dos números das colunas, linhas e diagonais é sempre 33, a idade de Cristo ao morrer.

Uma abordagem algébrica para achar um quadrado mágico 3×3 , que infelizmente

não se generaliza, é a seguinte: calcular $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tal que

$$a + b + c = 15 \quad (1)$$

$$d + e + f = 15 \quad (2)$$

$$g + h + i = 15 \quad (3)$$

$$a + d + g = 15 \quad (4)$$

$$b + e + h = 15 \quad (5)$$

$$c + f + i = 15 \quad (5.5)$$

$$a + e + i = 15 \quad (6)$$

$$c + e + g = 15 \quad (7)$$

Observemos que $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)$ resulta na equação (5.5). Ou seja, esta equação não é independente das outras, podendo ser eliminada do sistema (uma solução das cinco primeiras equações satisfará obrigatoriamente a equação (5.5)).

Substituindo-se a equação (7) por $(7)+(6)-(1)-(3)$, temos uma nova equação (7): $2e = h + b$. Fazendo agora $(7)-(5)$, temos $3e = 15$, ou seja, $e = 5$. Substituindo-se o valor de e em (2), (5) e (6):

$$f = 10 - d \quad (2)$$

$$h = 10 - b \quad (5)$$

$$i = 10 - a \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (3), temos: $g = -5 + a + b$. E, assim, (4) transforma-se em $d = 20 - 2a - b$ e, então, (2) fica $f = -10 + 2a + b$. Ou seja, podemos escrever

³ver http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:20070523magic_square_sagradafamilia.jpg

a matriz acima toda em função de a e de b :

$$\begin{bmatrix} a & b & 15 - a - b \\ 20 - 2a - b & 5 & -10 + 2a + b \\ -5 + a + b & 10 - b & 10 - a \end{bmatrix}.$$

Vamos construir agora um quadrado mágico de ordem igual a $n = 2(2m + 1)$:

1. Divida o quadrado em 4 quadrados de ordem $2m + 1$:

A	B
C	D
2. construa os 4 quadrados mágicos de ordem $2m + 1$, usando o procedimento visto acima para os quadrados de ordem ímpar, começando o A com 1, o B com $(2m + 1)^2 + 1$, o C com $2(2m + 1)^2 + 1$ e o D com $3(2m + 1)^2 + 1$;
3. considere os m números da linha do meio de A a partir da segunda coluna e troque-os com os números das respectivas posições de C;
4. considere os m primeiros números das outras linhas de A e troque-os com os números das respectivas posições de C;
5. troque os elementos das $m-1$ últimas colunas de B com os respectivos números em D.

Vamos ver a seguir um exemplo de quadrado mágico 10×10 . Começamos construindo os quadrados mágicos em cada quadrado 5×5 :

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

Tabela 1: Quadrados mágicos em cada quarto

A seguir, iremos fazer os ajustes, trocando os números da matriz segundo o procedimento acima. É interessante refletir sobre o funcionamento do procedimento: ao dividir o quadrado em quartos e preenchê-los como acima, a soma dos elementos de cada coluna é a soma esperada; os ajustes seguintes são para garantir a soma dos elementos das linhas e das duas diagonais (convença-se disso).

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Figura 2: Quadrado mágico final

Para construir quadrados de ordem múltipla de 4, existe um procedimento muito simples:

1. divida o quadrado em blocos 4×4 ;
2. enumere o quadrado de 1 a n^2 , da esquerda para a direita, de cima para baixo, deixando em branco as entradas das duas diagonais de cada bloco 4×4 ;
3. preencha os brancos com seus complementares (dois números de um quadrado mágico simples $n \times n$ são complementares se sua soma for $n^2 + 1$).

A seguir, vamos ver o procedimento em um quadrado 4×4 .

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Figura 3: Quadrado mágico 4×4

Abaixo, há um quadrado 8×8 para você completar.

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

Figura 4: Quadrado mágico 8×8 para completar

O quadrado 4×4 do Dürer é diferente do que apresentamos aqui. Na verdade, existem 880 quadrados mágicos simples 4×4 que, por reflexões e rotações, podem ser apresentados em 7040 formas. Há 275 305 224 quadrados mágicos simples 5×5 normais, isto é, desconsiderando rotações ou reflexões. Ainda não se sabe quantos quadrados mágicos 6×6 existem. O quadro seguinte mostra as quantidades projetadas para o número de quadrados mágicos normais⁴ de ordens entre 6 e 10.

Ordem	Número de quadrados mágicos	erro relativo máximo
6	$(1.775399 \pm 0.000042) \times 10^{19}$	0.0024 %
7	$(3.79809 \pm 0.00050) \times 10^{34}$	0.014 %
8	$(5.2225 \pm 0.0018) \times 10^{54}$	0.035 %
9	$(7.8448 \pm 0.0038) \times 10^{79}$	0.049 %
10	$(2.4149 \pm 0.0012) \times 10^{110}$	0.049 %

Tabela 1: Previsão do número de quadrados mágicos normais

⁴fonte: <http://www.trump.de/magic-squares/normal.htm>