UFSC - CÁLCULO 3 - 2013.3 - 1A. PROVA (MODELO)

RAPHAEL DA HORA

(1) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2}\, dydx$. Resposta: $\dfrac{1}{4}(e^4-1)$.

Solução:

Vemos que não é possível calcular a integral acima da forma que está escrita. Logo vamos mudar a ordem de integração para $dxdy$. Neste caso, $0 \le x \le \dfrac{y}{2}$ e $0 \le y \le 2$. Portanto queremos calcular

$$\int_0^2 \int_0^{y/2} e^{y^2} dxdy = \int_0^2 e^{y^2} [x]_0^{y/2}\, dy = \int_0^2 \frac{ye^{y^2}}{2} dy.$$

Fazendo a substituição $u = y^2$, $du = 2ydy$, i.e., $ydy = du/2$, temos

$$\int \frac{ye^{y^2}}{2} dy = \int \frac{e^u}{4} du = \frac{e^u}{4} = \frac{e^{y^2}}{4}.$$

Logo

$$\int_0^2 \frac{ye^{y^2}}{2} dy = \frac{1}{4}\left[e^{y^2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(e^4 - 1\right).$$

(2) Calcule $\displaystyle\int\int_D e^{y^2}\, dA$, onde D é a região triangular com vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,1)$. Resposta: $\dfrac{1}{4}(e-1)$.

Solução:

Veja que esse problema é similar ao problema acima. Vemos que a região de integração é dada por: $0 \le x \le y/2$, $0 \le y \le 1$. Queremos então calcular

$$\int_0^1 \int_0^{y/2} e^{y^2} dxdy = \int_0^1 \frac{ye^{y^2}}{2} dy = \frac{1}{4}[e^{y^2}]_0^1 = \frac{1}{4}(e-1).$$

(3) Seja R a região no primeiro quadrante entre a retas $y = 0$, $\sqrt{3}x - y = 0$ e dentro do círculo $x^2 + y^2 = 4$. Calcule $\displaystyle\int\int_R xy\, dA$. Resposta: 6.

Solução:

Desenhando a região dada no problema, vemos é bem mais fácil vê-la em coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen }\theta$): $0 \le \theta \le \pi/3$, $0 \le r \le 2$. Logo a integral acima é dada por

$$\int_0^{\pi/3} \int_0^2 (r\cos\theta)(r\text{sen }\theta) r dr d\theta = \int_0^{\pi/3} \int_0^2 r^3 \cos\theta \text{sen }\theta dr d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/3} \cos\theta \text{sen } \theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = 16 \int_0^{\pi/3} \cos\theta \text{sen } \theta d\theta.$$

Fazendo a substituição $u = \text{sen } \theta$, $du = \cos\theta d\theta$, temos que

$$\int \cos\theta \text{sen } \theta d\theta = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{\text{sen }^2\theta}{2}.$$

Logo

$$16 \int_0^{\pi/3} \cos\theta \text{sen } \theta d\theta = \frac{16}{2} \left[\text{sen }^2\theta\right]_0^{\pi/3} = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 6$$

(4) Calcule o volume do sólido que está no primeiro octante limitado pelas superfícies $x^2 + z^2 = 4$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$. Resposta: $16/3$.

Solução:

Desenhando a figura, assim como fizemos na aula de revisão, a região acima é dada por: $0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq y \leq 2x$, $0 \leq x \leq 2$; ou podemos escrevê-la nas seguintes coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $z = r\text{sen } \theta, y = y$, neste caso a região é dada por: $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq y \leq 2r\cos\theta$.

A integral nas coordenadas x, y, z é dada por

$$\int_0^2 \int_0^{2x} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dzdydx = \int_0^2 \int_0^{2x} \sqrt{4 - x^2} dydx = \int_0^2 2x\sqrt{4 - x^2} dx,$$

fazendo a substituição $u = 4 - x^2$, $du = -2xdx$, i.e, $-du = 2xdx$, temos

$$\int 2x\sqrt{4 - x^2} dx = -\int \sqrt{u} du = -\int u^{1/2} du = -\frac{u^{3/2}}{3/2} = -\frac{2}{3}(4 - x^2)^{3/2}.$$

Logo

$$\int_0^2 2x\sqrt{4 - x^2} dx = -\frac{2}{3} \left[(4 - x^2)^{3/2}\right]_0^2 = -\frac{2}{3}(0 - 4^{3/2}) = \frac{16}{3}.$$

Usando as coordenas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $z = r\text{sen } \theta$, $y = y$, temos que a integral é dada por

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{2r\cos\theta} r dydrd\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r(2r\cos\theta) drd\theta$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{16}{3} [\text{sen } \theta]_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.$$

(5) Seja E a região sólida no primeiro octante que é limitada pelos planos $x = 2$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$ e $z = x$. Calcule $\int\int\int_E x \; dV$. Resposta: 4.

Solução:

Temos que a reigão é dada por: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq x$. Logo a integral é dada por

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^x x dz dy dx = \int_0^2 \int_0^x (x)(x) dy dx = \int_0^2 (x)(x)(x) dx = \int_0^2 x^3 dx = 4$$

(6) Calcule o volume do sólido que está no primeiro octante abaixo da superfície $z = x^2 + y^2$ e limitado por $x = 2$ e $y - x = 4$. Resposta: $\dfrac{304}{3}$.

Solução:

Temos que a região é dada por: $0 \leq z \leq x^2 + y^2$, $0 \leq y \leq 4 + x$ e $0 \leq x \leq 2$. Portanto a integral é dada por

$$\int_0^2 \int_0^{4+x} \int_0^{x^2+y^2} dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{4+x} (x^2 + y^2) dy dx$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \left(x^2 [y]_0^{4+x} + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{4+x} \right) dx = \int_0^2 \left[x^2(4 + x) + \frac{(4 + x)^3}{3} \right] dx = \frac{304}{3}.$$

(7) Seja E a região sólida limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, e os planos $z = 0$ e $y + z = 2$. Calcule o volume de E. Resposta: $\pi + 2/3$.

Solução:

Usando coordenadas ciíndricas ($x = r\cos\theta$, $y = r\mathrm{sen}\ \theta$, $z = z$), temos que a região é dada por: $0 \leq z \leq 2 - r\mathrm{sen}\ \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 1$. Poderíamos também escrever a região em coordenadas cartesianas (x, y, z): $0 \leq z \leq 2 - y$, $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$; mas neste caso a integral fica mais difícil de ser calculada.

Portanto, em coordenas cilíndricas, a integral é dada por

$$\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{2-r\mathrm{sen}\ \theta} r dz dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 r(2 - r\mathrm{sen}\ \theta) dr d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \left([r^2]_0^1 - \mathrm{sen}\ \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \right) d\theta = \int_0^\pi \left(1 - \frac{\mathrm{sen}\ \theta}{3} \right) d\theta = \pi + \frac{2}{3}.$$

(8) Calcule

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z\ dz dy dx.$$

Use que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Resposta: 16π.

Solução:

Usando coordenadas cilíndricas podemos escrever a região como: $r \leq z \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$. Portanto a integral é dada por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 z r dz dr d\theta.$$

Em coordenadas esféricas ($x = \rho\mathrm{sen}\ \phi\cos\theta, y = \rho\mathrm{sen}\ \phi\mathrm{sen}\ \theta, z = \rho\cos\theta$), temos: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi/4$, $0 \leq \rho \leq 2/\cos\phi$.

(9) Seja E a região acima do cone $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2=3$. Calcule

$$\int\int\int_E z\ dV.$$

Resposta: $27\pi/16$.

Solução:

Usando coordenadas esféricas ($x = \rho \text{sen}\ \phi \cos\theta, y = \rho \text{sen}\ \phi \text{sen}\ \theta, z = \rho\cos\theta$), temos que a região é dada por: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi/3$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$. Portanto queremos calcular

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{\sqrt{3}} (\rho\cos\phi)\rho^2 \text{sen}\ \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \cos\phi \text{sen}\ \phi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} d\phi d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{18\pi}{4}\int_0^{\pi/3} \cos\phi \text{sen}\ \phi d\phi = \frac{27\pi}{16},$$

onde para calcular esta integral usamos a mesma substituição do problema 3.

(10) Escreva a seguinte integral em coordenadas esféricas:

$$\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\int_0^{\sqrt{\frac{9}{2}-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} 10y\ dzdydx.$$

Resposta: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3} 10\rho^3 \text{sen}^2\phi\ \text{sen}\ \theta\ d\rho d\phi d\theta.$