UFSC
CÁLCULO 1 - 2013.2
1A. PROVA

RAPHAEL DA HORA

(1) Resolva a seguinte desigualdade: $|x+6|+17 \geq 25$.

Solução:

Temos que

$$|x+6|+17 \geq 25 \Rightarrow |x+6| \geq 8$$
$$\Rightarrow x+6 \geq 8 \text{ ou } x+6 \leq -8$$
$$\Rightarrow x \geq 2 \text{ ou } x \leq -14$$

Resposta: $(-\infty,-14] \cup [2,\infty)$.

(2) Resolva a seguinte desigualdade: $\dfrac{|x+2|}{x+2} \leq x-2$.

Solução:

Temos que

$$\text{se } x+2>0, \text{ i.e., } x>-2$$
$$\frac{x+2}{x+2} \leq x-2 \Rightarrow 1 \leq x-2 \Rightarrow 3 \leq x.$$

Logo $x>-2$ e $x \geq 3$, portanto $x \geq 3$.

$$\text{Se } x+2<0, \text{ i.e., } x<-2$$
$$\frac{-(x+2)}{x+2} \leq x-2 \Rightarrow -1 \leq x-2 \Rightarrow 1 \leq x.$$

Logo $x<-2$ e $x \geq 1$ é uma contradição.

Resposta: $[3,\infty)$.

(3) Resolva $9+\dfrac{x}{3} < 2x-\dfrac{2}{3}$.

Solução:

Temos que

$$9+\frac{x}{3} < 2x-\frac{2}{3} \Rightarrow 9+\frac{2}{3} < 2x-\frac{x}{3} \Rightarrow \frac{29}{3} < \frac{5x}{3} \Rightarrow \frac{29}{5} < x.$$

Resposta: $\left(\dfrac{29}{5},\infty\right)$.

(4) Resolva $x \leq 5x-3 \leq 8x-2$.

Solução:

Temos que

$$x \leq 5x-3 \leq 8x-2 \Rightarrow x \leq 5x-3 \text{ e } 5x-3 \leq 8x-2$$

$$\Rightarrow 3 \leq 5x - x \text{ e } -3+2 \leq 8x - 5x$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4} \leq x \text{ e } -\frac{1}{3} \leq x$$

Logo $\frac{3}{4} \leq x$.

Resposta: $\left[\frac{3}{4}, \infty\right)$.

(5) Resolva $|x+1| \leq 2 - |x-1|$.

Solução:

Temos que

$$|x+1| \leq 2 - |x-1| \Rightarrow |x+1| + |x-1| \leq 2$$

$$\text{Se } x+1 \geq 0, \text{ i.e., } x \geq -1, \text{ e } x-1 \geq 0, \text{ i.e., } x \geq 1, \text{ logo } x \geq 1$$
$$\Rightarrow x+1+x-1 \leq 2 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1,$$

mas como $x \geq 1$, temos $x = 1$.

$$\text{Se } x+1 \geq 0, \text{ i.e., } x \geq -1, \text{ e } x-1 < 0, \text{ i.e., } x < 1, \text{ logo } -1 \geq x < 1$$
$$\Rightarrow x+1-(x-1) \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2,$$

logo a desigualdade acima é satisfeita para todo $-1 \geq x < 1$.

$$\text{Se } x+1 < 0, \text{ i.e., } x < -1, \text{ e } x-1 \geq 0, \text{ i.e., } x \geq 1, \text{ temos uma contradição.}$$

$$\text{Se } x+1 < 0, \text{ i.e., } x < -1, \text{ e } x-1 < 0, \text{ i.e., } x < 1, \text{ logo } x < -1$$
$$\Rightarrow -(x+1)-(x-1) \leq 2 \Rightarrow -2x \leq 2 \Rightarrow x \geq 1,$$

mas como $x < -1$, temos uma contradição.

Resposta: $[-1, 1]$.

(6) Seja $f(x) = -2(x-a)^2(x-b)$, onde a e b são números reais positivos tais que $a < b$, i.e., $0 < a < b$. Encontre a solução de $f(x) > 0$.

Solução:

Vemos que o termo $-2(x-a)^2 \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto o único termo que altera o sinal da função acima é $(x-b)$, $x-b < 0$ se $x < b$ e $x-b > 0$ se $x > b$. Logo $f(x) > 0$ se $x < b$ e $x \neq a$, já que $f(a) = 0$ e $a < b$.

Outra forma fácil de ver isso é pela seguinte tabela:

	$x < a$	$a < x < b$	$x > b$
$-2(x-a)^2$	-	-	-
$x-b$	-	-	+
$f(x)$	+	+	-

Resposta: $(-\infty, a) \cup (a, b)$.

(7) Seja $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$. Determine onde $f(x) > 0$.

Solução:

Vemos que $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x-3}$. Logo

	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$x + 2$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$f(x)$	-	+	-	+

Resposta: $(-2, 1) \cup (3, \infty)$.

(8) Seja $f(x) = x^4 e^{-x} - x^3 e^{-x} - 6x^2 e^{-x}$. Encontre a solução de $f(x) < 0$.

Solução:

Vemos que $f(x) = x^2 e^{-x}(x^2 - x - 6) = x^2 e^{-x}(x - 3)(x + 2)$. Note que $e^{-x} > 0$ e $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto basta analisar o sinal de $(x - 3)(x + 2)$ e não considerar o ponto $x = 0$ como parte da resposta, já que $f(0) = 0$. É fácil ver que $f(x) < 0$ se $-2 < x < 0$ e $0 < x < 3$.

Resposta: $(-2, 0) \cup (0, 3)$.

(9) Seja $f(x) = \sqrt[3]{4 - 3x}$. Encontre $f^{-1}(x)$.

Solução:

Temos que para encontrar uma fórmula para $f^{-1}(x)$, basta resolver a seguinte equação para y.

$$x = \sqrt[3]{4 - 3y} \Rightarrow x^3 = 4 - 3y \Rightarrow y = \frac{4 - x^3}{3}.$$

Resposta: $f^{-1}(x) = \dfrac{4 - x^3}{3}$.

(10) Seja $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$. Encontre $f^{-1}(x)$.

Solução:

Similarmente ao problema anterior, basta resolver a seguinte equação para y.

$$x = \frac{1 + e^y}{1 - e^y} \Rightarrow x(1 - e^y) = 1 + e^y \Rightarrow e^y(1 + x) = x - 1 \Rightarrow e^y = \frac{x - 1}{1 + x}$$

$$\Rightarrow y = \ln\left(\frac{x - 1}{1 + x}\right).$$

Resposta: $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{1 + x}\right)$.

(11) Seja $f(x) = 3x^2 + 1$, $x \geq 0$. Encontre $f^{-1}(x)$.

Solução:

Analogamente aos dois problemas anteriores, resolvemos

$$x = 3y^2 + 1 \Rightarrow y^2 = \frac{x - 1}{3} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x - 1}{3}}.$$

Veja que não consideramos o negativo da raiz acima, já que consideramos a função apenas em $x \geq 0$.

Resposta: $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{3}}$.

(12) Seja $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x+5}$. Encontre $f^{-1}(x)$.

Solução:

Temos que

$$x = \frac{3y-2}{2y+5} \Rightarrow x(2y+5) = 3y-2 \Rightarrow y(2x-3) = -2-5x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2-5x}{2x-3} = \frac{5x+2}{3-2x}.$$

Resposta: $f^{-1}(x) == \dfrac{5x+2}{3-2x}$.

(13) Encontre o domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{6+5x}{x^2-9}}$.

Solução:

Vemos que temos que verificar onde $\dfrac{6+5x}{x^2-9} \geq 0$. Temos que

$$\frac{6+5x}{x^2-9} = \frac{5(x+6/5)}{(x-3)(x+3)}.$$

	$x < -3$	$-3 < x < -6/5$	$-6/5 < x < 3$	$x > 3$
$6+5x$	-	-	+	+
$x+3$	-	+	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$\dfrac{6+5x}{x^2-9}$	-	+	-	+

Resposta: $(-3, -6/5] \cup (3, \infty)$.

(14) Encontre o domínio da função inversa, $f^{-1}(x)$, de $f(x) = e^{3-2x}$.

Solução:

Primeiramente devemos encontrar $f^{-1}(x)$. Resolvemos

$$x = e^{3-2y} \Rightarrow \ln x = 3 - 2y \Rightarrow y = \frac{3-\ln x}{2}.$$

Logo $f^{-1}(x) = \dfrac{3-\ln x}{2}$, e podemos calcular $f^{-1}(x)$ apenas quando $x > 0$.

Resposta: $(0, \infty)$.

(15) Encontre o domínio da função $f(x) = \sqrt{4 - e^{3x}}$.

Solução:

Temos que ver em que pontos x, $4 - e^{3x} \geq 0$, i.e., $4 \geq e^{3x}$. Como as funções logarítmica e exponencial são crescentes,

$$4 \geq e^{3x} \Leftrightarrow \ln 4 \geq 3x \Leftrightarrow \frac{\ln 4}{3} \geq x.$$

Resposta: $\left(-\infty, \dfrac{\ln 4}{3}\right]$.

(16) Encontre os intervalos onde a seguinte função é crescente.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ se } x < -1 \\ x^2, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Vemos que $x+2$ é crescente em $\mathbb{R}$, x^2 é crescente em $(0,\infty)$ e $\dfrac{1}{x}$ é decrescente em $(-\infty,0)$ e em $(0,\infty)$. Logo, segue da definição acima que $f(x)$ é crescente em $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

Resposta: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

(17) Determine onde a função $f(x) = ||x|-4|$ é crescente.

Solução:

Temos que

$$f(x) = \begin{cases} |x|-4, \text{ se } |x| \geq 4, \text{ i.e., } x \leq -4 \text{ ou } x \geq 4 \\ 4-|x|, \text{ se } |x| < 4, \text{ i.e., } -4 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x-4, \text{ se } x \leq -4 \\ 4-(-x) = 4+x, \text{ se } -4 < x < 0 \\ 4-x, \text{ se } 0 \leq x < 4 \\ x-4, \text{ se } x \geq 4 \end{cases}$$

É fácil ver que o gráfico desta função parece uma letra W e que f será crescente em $(-4,0)\cup(4,\infty)$.

Resposta: $(-4,0)\cup(4,\infty)$.

(18) Resolva: $\ln(2-x)+\ln x = \ln(-5-2x)$.

Solução:

Temos que tomando a exponencial da equação acima

$$e^{\ln(2-x)+\ln x} = e^{\ln(-5-2x)} \Rightarrow e^{\ln(2-x)}e^{\ln x} = e^{\ln(-5-2x)}$$

$$\Rightarrow (2-x)x = -5-2x \Rightarrow x^2-4x-5 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 5.$$

Como não podemos calcular a equação dada acima em $x=-1$ ou $x=5$, o problema não possui solução.

Resposta: $\emptyset$.

(19) Resolva: $7 = 5^{x-1}$.

Solução:

Temos que tomando o logarítmo

$$\ln 7 = \ln 5^{x-1} \Rightarrow \ln 7 = (x-1)\ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 7 + \ln 5}{\ln 5}.$$

Resposta: $x = \dfrac{\ln 7+\ln 5}{\ln 5}$.

(20) Sabendo que $\tan\theta = -\dfrac{3}{4}$, encontre $\cos\theta$.

Solução:

Sabemos que $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ e $\dfrac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{3}{4}$, logo

$$\text{sen }\theta = -\frac{3}{4}\cos\theta \Rightarrow \cos^2\theta + \left(-\frac{3}{4}\cos\theta\right)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{4}{5}.$$

Resposta: $\cos\theta == \pm\dfrac{4}{5}$.