# UFSC - CÁLCULO 3 - 2013.3 - 1A. PROVA (SOLUÇÃO)

RAPHAEL DA HORA

(1) Calcule, mudando a ordem de integração, $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dydx$.

Solução:

Vemos que a região por ser descrita por: $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y^2$. Portanto podemos reescrever a integral

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dxdy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy,$$

fazendo a substituição $u = y^3$, $\frac{du}{3} = y^2 dy$, então temos

$$\int y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{e^u}{3} = \frac{e^{y^3}}{3}.$$

Logo

$$\int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{3} \left[ e^{y^3} \right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.$$

Resposta: $\frac{(e-1)}{3}$.

(2) Calcule $\int \int_D y dA$, onde $D$ é a região do plano $xy$ limitada pelas retas $x + y = 2$, $y = x$, $x = 0$.

Solução:

Vemos que a região é dada por: $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq 2 - x$. Logo queremos calcular

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} y dydx = \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_x^{2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [(2-x)^2 - x^2] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (4 - 4x) dx = \frac{1}{2} \left[ 4x - 2x^2 \right]_0^1 = 1.$$

Resposta: 1.

(3) Calcule $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dydx$.

Solução:

Vemos que, em coordenadas polares, a região de integração é dada por: $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 1$. Logo queremos calcular

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta,$$

fazendo a substituição $u = r^2$, $\dfrac{du}{2} = rdr$, temos

$$\int r e^{r^2} dr = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} = \frac{e^{r^2}}{2}.$$

Portanto

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[e^{r^2}\right]_0^1 d\theta = \frac{e-1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi(e-1)}{4}.$$

Resposta: $\dfrac{\pi(e-1)}{4}$.

(4) Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}(2x+8yz)dzdydx$.

Solução:

Temos que

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}(2x+8yz)dzdydx = \int_0^1\int_0^x\left(2x[z]_0^{xy} + 8y\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{xy}\right)dydx$$

$$= \int_0^1\int_0^x\left(2x^2y + 4x^2y^3\right)dydx = \int_0^1\left(2x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x + 4x^2\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^x\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(x^4 + x^6\right)dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}.$$

Resposta: 12/35.

(5) Calcule o volume do sólido que está no primeiro octante abaixo do plano $3x + 2y + z = 6$.

Solução:

Vemos que o sólido está definido por: $0 \leq z \leq 6 - 3x - 2y$, $0 \leq y \leq \dfrac{6-3x}{2}$, $0 \leq x \leq 2$. Portanto queremos calcular

$$\int_0^2\int_0^{(6-3x)/2}(6-3x-2y)dydx = \int_0^2\left((6-3x)[y]_0^{(6-3x)/2} - 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{(6-3x)/2}\right)dx$$

$$= \int_0^2\left(\frac{(6-3x)^2}{2} - \frac{(6-3x)^2}{4}\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^2(6-3x)^2dx = 6.$$

Resposta: 6.

(6) Calcule o volume do sólido limitado pelo cilíndro parabólico (tunel) $z = 4 - y^2$ e pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$.

Solução:

Vemos que a região de integração é dada por: $0 \leq z \leq 4 - y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$ (onde aqui é solução de $4 - y^2 = 0$). Portanto queremos calcular

$$\int_0^1 \int_{-2}^2 (4 - y^2)dydx = \int_0^1 \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^2 dx = \left(16 - \frac{16}{3}\right) \int_0^1 dx = \frac{32}{3}.$$

Resposta: 16/3.

(7) Calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$.

Solução:

Temos que a região de integração, em coordenadas cilíndricas, é dada por: $0 \leq z \leq 4 - r^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$. Portanto queremos calcular

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3)drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = 8\pi.$$

Resposta: $8\pi$.

(8) Seja $E$ a região sólida que está abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e acima do cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$. Escreva a seguinte integral em coordenadas esféricas:

$$\int\int\int_E \cos(x^2 + y^2 + z^2)\ dV.$$

Use que $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. NÃO CALCULE A INTEGRAL!

Solução:

Vemos que, em coordenadas esféricas, a região é dada por: $0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \phi \leq \pi/6$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Portanto a integral acima pode ser escrita como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^3 \rho^2 \text{sen}\phi \cos \rho^2 d\rho d\phi d\theta.$$