UFSC - CÁLCULO 3 - 2013.3 - 2A. PROVA

RAPHAEL DA HORA

(1) Encontre a equação paramétrica da reta tangente à curva $r(t) = (\text{sen}t, t, e^t)$ no ponto $(0, 0, 1)$. (1,5 ponto)

Solução:

Temos que a equação paramétrica da reta tangente à curva $r(t)$ que passa por $r(0) = (0, 0, 1)$ é dada por $r'(0)t + (0, 0, 1)$. Logo

$$r'(t) = (\cos t, 1, e^t) \Rightarrow r'(0) = (1, 1, 1).$$

Portanto a equação paramétrica da reta tangente à curva $r(t)$ que passa por $r(0) = (0, 0, 1)$ é dada por $(t, t, t + 1)$.

Resposta: $t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$.

(2) Encontre $f(x, y)$ tal que $\nabla f(x, y) = F(x, y) = 2e^y\mathbf{i} + (2xe^y + y)\mathbf{j}$. (1,0 ponto)

Solução:

Queremos encontrar f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^y + y.$$

Logo

$$f(x, y) = \int 2e^y dx + C(y) = 2xe^y + C(y),$$

como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xe^y + y$,

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xe^y + C(y)) = 2xe^y + y \Rightarrow C'(y) = y \Rightarrow C(y) = \int y dy = \frac{y^2}{2} + K,$$

onde K é uma constante. Segue que $f(x, y) = 2xe^y + \dfrac{y^2}{2} + K$.

Resposta: $f(x, y) = 2xe^y + \dfrac{y^2}{2} + K$.

(3) Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde $F(x, y) = (y \cos xy, x \cos xy)$ e C é o segmento de reta que liga a origem ao ponto $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$. (1,0 ponto)

Solução:

Temos que a curva C é dada por $r(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{\pi t}{2}\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$. Logo

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_0^1 \left(\frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t^2}{2}, t \cos \frac{\pi t^2}{2}\right) \cdot \left(1, \frac{\pi}{2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t^2}{2} + \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t^2}{2} \right) dt = \pi \int_0^1 t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt,$$

fazendo a substituição $u = \pi t^2/2$, $du = \pi t dt$, temos

$$\pi \int t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt = \int \cos u du = \text{sen} u = \text{sen} \frac{\pi t^2}{2}.$$

Logo

$$\pi \int_0^1 t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt = \left[\text{sen} \frac{\pi t^2}{2} \right]_0^1 = \text{sen} \frac{\pi}{2} - \text{sen} 0 = 1.$$

Resposta: 1.

ponto) (4) Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^3)^{1/2}} \mathbf{i} + \frac{3y^2}{(x^2+y^3)^{1/2}} \mathbf{j}$ e C é o triangulo com vértices $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$.

Solução:

Temos que pelo Teorema de Green

$$\int_C F \cdot dr = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

onde aqui $P(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^3)^{1/2}}$, $Q(x,y) = \frac{3y^2}{(x^2+y^3)^{1/2}}$ e $D : 0 < x < 1$, $0 < y < 1 - x$. Logo

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} 0 dy dx = 0,$$

já que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^3)^{3/2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Resposta: 0.

ponto) (5) Calcule a área da parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy.

Solução:

Temos que a área dessa superfície é dada por

$$\int_S dS = \int \int_D |r_x \times r_y| dA,$$

onde $r(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (9 - x^2 - z^2)\mathbf{k}$ e $D : 9 - x^2 - y^2 \geq 0$, i.e., $x^2 + y^2 \leq 9$. Temos então que

$$|r_x \times r_y| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}.$$

Em coordenadas polares $D : 0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $|r_x \times r_y| = \sqrt{1 + 4r^2}$. Logo

$$\text{Área de S } = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1+4r^2} r dr d\theta,$$

fazendo a substituição $u = 1 + 4r^2$, $du = 8rdr$, temos

$$\int \sqrt{1+4r^2}rdr = \frac{1}{8}\int \sqrt{u}du = \frac{u^{3/2}}{12} = \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}.$$

Portanto

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}rdrd\theta = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}[(1+4r^2)^{3/2}]_0^3 d\theta = \frac{2\pi(37^{3/2}-1)}{12}.$$

Resposta: $\dfrac{\pi(37^{3/2}-1)}{6}$.

(6) Seja S a parte do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, onde $z \leq 2$. Calcule $\displaystyle\int\int_S z^2 dS$. (1,0 ponto)

Solução:

Temos que

$$\int\int_S z^2 dS = \int\int_D z(r(x,y))|r_x \times r_y| dA,$$

onde $r(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{k}$ e $D : \sqrt{x^2+y^2} \leq 2$, i.e., $x^2+y^2 \leq 4$. Logo

$$|r_x \times r_y| = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{2}.$$

Em coordenadas polares $D : 0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$. Portanto

$$\int\int_S z^2 dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\sqrt{r^2})^2\sqrt{2}rdrd\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 drd\theta = 8\sqrt{2}\pi.$$

Resposta: $8\sqrt{2}\pi$.

(7) Seja S a parte do parabolóide $z = x^2+y^2$, onde $z \leq 4$ com orientação positiva. (1,5 ponto)
Calcule $\displaystyle\int\int_S \text{rot } F \cdot dS$, onde $F(x,y,z) = (xz, yz, xy)$.

Solução:

Pelo Teorema de Stokes

$$\int\int_S \text{rot } F \cdot dS = \int_C F \cdot dr,$$

onde $C : x^2+y^2 = 4$, $z = 4$, i.e., $r(\theta) = (2\cos\theta, 2\text{sen}\theta, 4)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(\theta))\cdot r'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}(8\cos\theta, 8\text{sen}\theta, 4\text{sen}\theta\cos\theta)\cdot(-2\text{sen}\theta, 2\cos\theta, 0)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(-16\text{sen}\theta\cos\theta + 16\text{sen}\theta\cos\theta + 0)\,d\theta = 0.$$

Resposta: 0.

(8) Calcule $\int\int_S F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é a fronteira da região sólida (1,5 ponto) que está no primeiro octante e limitada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, orientada positivamente.

Solução:

Segue do Teorema do Divergente (Gauss) que

$$\int_S F \cdot dS = \int\int\int_E \text{div } F dV,$$

onde E é a região sólida que está no primeiro octante e limitada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$. Logo

$$\text{div } F = 1 + 1 + 1 = 3$$

e em coordenadas cilíndricas, $E : 0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 1 - r^2$. Portanto

$$\int\int\int_E \text{div } F dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{1-r^2} 3r dz dr d\theta = 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta$$

$$= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

Resposta: $3\pi/8$.