UFSC - CÁLCULO 3 - 2013.3 - 3A. PROVA (SOLUÇÃO)

RAPHAEL DA HORA

(1) Calcule $4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \cdots$

Solução:

Vemos que

$$4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+2}}{3^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n = 4\left(\frac{1}{1-(-2/3)}\right) = \frac{12}{5}.$$

Resposta: 12/5.

(2) Quais das seguintes séries são **divergentes**?

$$\text{I. } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) \quad \text{II. } \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n) \quad \text{III. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$$

Solução:

Temos que, para I

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) = \ln 2 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) \text{ Diverge!}$$

Para II

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n) \text{ Diverge!}$$

Para III

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} + \frac{1}{1-2/3} = 5 \text{ Coverge!}$$

Resposta: I e II.

(3) Para quais valores de p a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^3+n)^p}$ converge?

Solução:

Temos que

$$\frac{1}{(n^3+n)^p} < \frac{1}{n^{3p}},$$

portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^3+n)^p}$ converge se $3p > 1$, i.e., $p > 1/3$. Temos também que

$$\frac{1}{(n^3+n)^p} > \frac{1}{(n^3+n^3)^p} = \frac{1}{2^p n^{3p}},$$

portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^3+n)^p}$ diverge se $3p \leq 1$, i.e., $p \leq 1/3$.

Resposta: $p \geq 1/3$.

(4) Quais das seguintes séries convergem?

$$\text{I. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2} \quad \text{II. } 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^{n+1}} \quad \text{III. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1/n} - \frac{1}{2}\right)^n$$

Solução:

Temos que, para I

$$\frac{2+\cos n}{n^2} < \frac{2+1}{n^2} = \frac{3}{n^2},$$

portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$ converge.

Para II, pelo teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{7^{n+1+1}} \cdot \frac{7^{n+1}}{2^n} \right| = \frac{2}{7} < 1,$$

logo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^{n+1}}$ converge.

Para III, pelo teste da raiz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(2^{1/n} - \frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{1/n} - \frac{1}{2}\right) = 2^0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1/n} - \frac{1}{2}\right)^n$ converge.

Resposta: I, II e III convergem.

(5) Determine se $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ converge.

Solução:

Temos que, pelo teste da série alternada, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$$

e

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n},$$

logo $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ converge.

Resposta: Sim.

(6) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n^2 3^{3n}}$ converge.

Solução:

Temos que, pelo teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{2(n+1)}}{(n+1)^2 3^{3(n+1)}} \cdot \frac{n^2 3^{3n}}{5^{2n}} \right| = \frac{5^2}{3^3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \frac{25}{27} < 1,$$

portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n^2 3^{3n}}$ converge.

Resposta: Sim.

(7) Determine o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{2^n n^4}$.

Solução:

Temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3x-1)^{(n+1)}}{2^{n+1}(n+1)^4} \cdot \frac{2^n n^4}{(3x-1)^n} \right| = \frac{|3x-1|}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 = \frac{|3x-1|}{2}.$$

Portanto, pelo teste da razão, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{2^n n^4}$ converge se

$$\frac{|3x-1|}{2} < 1 \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{2}{3},$$

logo o raio de convergência é $2/3$.

Resposta: $2/3$.

(8) Calcule a integral $\int \frac{x}{1+x^3} dx$ como uma série de potências.

Solução:

Temos que

$$\frac{x}{1+x^3} = x \left(\frac{1}{1-(-x^3)} \right) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{(3n+1)},$$

se $|x|^3 < 1$, i.e., $|x| < 1$.

Logo se $|x| < 1$,

$$\int \frac{x}{1+x^3} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{(3n+1)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(3n+2)}}{3n+2} + C$$

Resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(3n+2)}}{3n+2} + C$, para $|x| < 1$.

(9) Determine o coeficiente de x^3 na série de Taylor de $f(x) = xe^{x/2}$.

Solução:

Temos que
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
logo
$$xe^{x/2} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n+1)}}{2^n n!}.$$
Portanto o coeficiente de x^3 na série de Taylor de $f(x) = xe^{x/2}$ é $\dfrac{1}{2^2 2!} = \dfrac{1}{8}$.

Resposta: 1/8.

(10) Sabendo que $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, calcule
$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3^3} + \frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 3^3} - \frac{\sqrt{3}}{7 \cdot 3^4} + \cdots$$
Solução:

Vemos que
$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3^3} + \frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 3^3} - \frac{\sqrt{3}}{7 \cdot 3^4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{3^{(n+1)}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{3}/3)^{2n+1}}{2n+1} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$
Resposta: $\pi/6$.