UFSC - CÁLCULO C - 2014.1 - 1A. PROVA (MODELO 2)

RAPHAEL DA HORA

(1) Seja C uma curva fechada simples em $\mathbb{R}^3$, e $r(t)$, $a \leq t \leq b$ uma parametrização de C tal que $|r'(t)| = 1$ para todo $t \in [a, b]$. A curvatura de C em $r(t)$ é definida por $\kappa(t) = |r''(t)|$ e a curvatura total por $\int_C \kappa ds$. Calcule a curvatura total da circunferência $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Resposta: 2π.

(2) Calcule $\int_C (y - x)dz + (y - z)dz$, onde C é o segmento de reta do ponto $(1, 1, 1)$ ao ponto $(2, 4, 8)$. Resposta: -13.

(3) Seja C a ellípse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x, y) = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right)$. Resposta: 0.

(4) Determine os valores de a e b tais que o campo vetorial $F(x, y, z) = ay^2\mathbf{i} + 2y(x + z)\mathbf{j} + (by^2 + z^2)\mathbf{k}$ seja conservativo. Usando esses valores, encontre $f(x, y, z)$ tal que $\nabla f(x, y, z) = F(x, y, z)$. Resposta: $a = 1 = b$, $f(x, y, z) = xy^2 + y^2z + \frac{z^3}{3}$.

(5) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2y^2 - x$ no ponto $(2, 1, 2)$. Resposta: $z = 3x + 8y - 12$.

(6) Calcule a área da superfície S dada por $z = a\left(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{a^2}\right)$, que está acima do plano xy. Resposta:

(7) Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que está fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente. Calcule $\int\int_S F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Resposta: $4\sqrt{3}\pi$.

(8) Seja C a curva dada pela intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com o plano $y = z$, orientada positivamente. Calcule

$$\int_C F \cdot dr,$$

onde $F(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Resposta: 0.