UFSC - CÁLCULO C - 2014.1 - 2A. PROVA A

RAPHAEL DA HORA

(1) Determine a solução do problema (1,5 ponto)
$$t^2y' + 2ty = \text{sen } t, \quad y(2\pi) = 0.$$

(2) Determine a solução geral do problema (1,0 ponto)
$$y' = \frac{xy + y}{x^2 + 2x}.$$

(3) Determine a solução geral do problema (1,0 ponto)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{y}.$$

(4) Determine a solução geral da equação de Riccati (1,5 ponto)
$$y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2.$$
(Dica: use a substituição $y(t) = t + \dfrac{1}{v(t)}$.)

(5) Determine a solução do problema (1,5 ponto)
$$2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)y' = 0, \quad y(-1) = 0.$$

(6) Determine a solução do problema (1,0 ponto)
$$y'' - y' - 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(7) Determine a solução geral do problema (1,0 ponto)
$$5y'' - 8y' + 5y = 0.$$

(8) Sabendo que $y_1(t) = t^2$ é uma solução do problema (1,5 ponto)
$$t^2y'' - t(t + 4)y' + 2(t + 3)y = 0,$$
encontre uma solução da forma $y_2(t) = u(t)y_1(t)$.

SOLUÇÃO

(1) Dividindo por t^2 obtemos

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\mathrm{sen}t}{t^2}.$$

Essa equação está na forma $y' + p(t)y = g(t)$, e o fator integrante é dado por

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln|t|} = t^2.$$

Logo multiplicando a equação por $\mu(t) = t^2$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(t^2 y) = \frac{\mathrm{sen}t}{t^2}t^2 = \mathrm{sen}t \Rightarrow y = \frac{1}{t^2}\int \mathrm{sen}t dt = \frac{1}{t^2}(-\cos t + C).$$

Como $y(2\pi) = 0$, temos que

$$0 = \frac{1}{(2\pi)^2}(-\cos 2\pi + C) \Rightarrow C = 1.$$

Portanto

$$y(t) = -\frac{\cos t}{t^2} + \frac{1}{t^2}.$$

(2) Temos que

$$y' = \frac{xy + y}{x^2 + 2x} = \frac{y(x+1)}{x^2 + 2x},$$

que é uma equação separável. Logo

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x+1}{x^2+2x}dx,$$

onde a segunda integral (a do lado direito) resolvemos pela substituição $u = x^2 + 2x$, $du = 2(x+1)dx$. Obtemos

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x| + C \Rightarrow y = Ke^{\frac{1}{2}\ln|x^2+2x|} = K\sqrt{|x^2 + 2x|}, \quad K = e^C.$$

(3) Vemos que usando a substituição $v = y/x$, i.e., $y = xv$, $y' = v + xv'$, obtemos

$$v + xv' = 3 - \frac{2}{v} \Rightarrow v' = -\frac{1}{x}\left(\frac{v^2 - 3v + 2}{v}\right),$$

que é uma equação separável. Temos então

$$\int \frac{v}{v^2 - 3v + 2}dv = \int \frac{1}{x}dx,$$

onde usamos frações parciais para resolver a primeira integral. Temos

$$\frac{v}{v^2 - 3v + 2} = \frac{v}{(v-1)(v-2)} = \frac{a}{v-1} + \frac{b}{v-2} = \frac{(a+b)v - 2a - b}{(v-1)(v-2)}.$$

Encontramos então $a = -1$ e $b = 2$. Logo

$$\int \frac{v}{v^2 - 3v + 2} dv = -\int \frac{1}{v-1} dv + 2\int \frac{1}{v-2} dv = -\ln|v-1| + 2\ln|v-2|.$$

Segue então que

$$-\ln|v-1| + 2\ln|v-2| = \ln|x| + C \Rightarrow e^{-\ln|v-1|} e^{2\ln|v-2|} = e^C e^{\ln|x|}$$

$$\Rightarrow \frac{(v-2)^2}{|v-1|} = k|x|.$$

Agora como $v = y/x$, obtemos

$$\frac{(y-2x)^2}{|y-x|} = kx^2.$$

(4) Usando a substituição $y(t) = t + \dfrac{1}{v(t)}$, $y' = 1 - \dfrac{v'}{v^2}$, obtemos

$$1 - \frac{v'}{v^2} = 1 + t^2 - 2t\left(t + \frac{1}{v}\right) + \left(t + \frac{1}{v}\right)^2 = 1 + \frac{1}{v^2}.$$

Multiplicando tudo por v^2

$$v^2 - v' = v^2 + 1 \Rightarrow v' = -1 \Rightarrow v(t) = -t + C.$$

Agora como $y(t) = t + \dfrac{1}{v(t)}$, temos

$$y(t) = t + \frac{1}{C - t}.$$

(5) Vemos que se $M(x,y) = 2xy - 9x^2$ e $N(x,y) = (2y + x^2 + 1)$, então $M_y = 2x = N_x$, logo a equação é exata. Queremos então encontrar $f(x,y)$ tal que $\nabla f(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ e a solução geral é dada por $f(x,y) = K$. Temos então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 9x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int (2xy - 9x^2) dx = x^2 y - 3x^3 + C(y)$$

$$\Rightarrow 2y + x^2 + 1 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y - 3x^3 + C(y)) = x^2 + C'(y)$$

$$\Rightarrow C'(y) = 2y + 1 \Rightarrow C(y) = y^2 + y.$$

Portanto $f(x,y) = x^2 y - 3x^3 + y^2 + y$ e a solução geral é $x^2 y - 3x^3 + y^2 + y = K$. Como $y(-1) = 0$, temos

$$(-1)^2 0 - 3(-1)^3 + 0^2 + 0 = K \Rightarrow K = 3.$$

A solução é então dada por

$$x^2 y - 3x^3 + y^2 + y = 3.$$

(6) Temos que o polinômio característico da equação dada é

$$r^2 - r - 12 = (r-4)(r+3),$$

cujas raízes são $r = 4$ e $r = -3$. Segue então que a solução geral da equação dada é

$$y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-3t}.$$

Como $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, temos

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{e} \quad 4c_1 - 3c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{7}, \quad c_2 = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{7}(e^{4t} - e^{-3t}).$$

(7) Temos que o polinômio característico da equação dada é

$$5r^2 - 8r + 5,$$

cujas raízes são

$$r = \frac{8 \pm 6i}{10} = \frac{4 \pm 3i}{5}.$$

Segue então que a solução geral da equação dada é

$$y(t) = e^{4t/5}\left(c_1 \operatorname{sen}\frac{3t}{5} + c_2 \cos\frac{3t}{5}\right).$$

(8) Queremos uma solução da forma $y_2(t) = u(t)y_1(t) = t^2 u$. Logo

$$y_2 = t^2 u, \quad y_2' = 2tu + t^2 u', \quad y_2'' = 2u + 4tu' + t^2 u''$$

$$t^2 y_2'' - t(t+4)y_2' + 2(t+3)y_2 = t^2(2u + 4tu' + t^2u'') - t(t+4)(2tu + t^2u') + 2(t+3)t^2 u = 0$$

$$\Rightarrow t^4 u'' - t^4 u' = 0 \Rightarrow u'' - u' = 0 \Rightarrow u'' = u',$$

fazendo $w = u'$, temos

$$w' = w \Rightarrow \int \frac{1}{w} dw = \int dt \Rightarrow \ln|w| = t + k_1 \Rightarrow w = c_1 e^t$$

$$\Rightarrow u' = c_1 e^t \Rightarrow u = c_1 e^t + c_2.$$

Logo

$$y_2(t) = c_1 t^2 e^t + c_2 t^2.$$