UFSC - CÁLCULO C - 2014.1 - 3A. PROVA B

RAPHAEL DA HORA

(1) Determine a solução geral da equação diferencial (1,5 ponto)
$$y'' - 5y' + 6y = 5e^{3t}$$

(2) Determine uma solução particular para a equação diferencial (1,0 ponto)
$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3t}, \quad 0 < t < \pi/3.$$

(3) Determine a solução geral da equação diferencial (1,0 ponto)
$$y''' + y'' - y' - y = 18e^{2t}.$$
Dica: $r^3 + r^2 - r - 1 = (r-1)(r+1)^2$.

(4) Sabendo que a solução geral de $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ em $t > 0$ é $c_1t + c_2te^t$, então encontre uma solução particular de $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = t^3$. (1,5 ponto)

(5) Encontre a solução geral de $y^{(4)} - 81y = 0$. (1,0 ponto)

(6) Encontre a solução de $y'' + y = u_{2\pi}(t)$, satisfazendo $y(0) = 0,$, $y'(0) = 0$. (1,5 ponto)

(7) Encontre a solução de $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1)$, satisfazendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (1,0 ponto)

(8) Encontre a solução de $y'' + 9y = \delta(t-2)$, satisfazendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (1,5 ponto)

SOLUÇÃO

(1) Temos que a o polinômio característico é dado por

$$r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3).$$

Portanto a solução da equação homogênea $y'' - 5y' + 6y = 0$ é $c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$. Pelo método dos coeficientes indeterminados devemos então tentar encontrar uma solução do tipo $Y(t) = Ate^{2t}$. Segue que

$$Y(t) = Ate^{3t}, \quad Y'(t) = A(1+3t)e^{3t}, \quad Y''(t) = A(6+9t)e^{3t}$$

$$\Rightarrow Y'' - 5Y' + 6Y = A(9-15+6)te^{3t} + A(6-5)e^{3t} = Ae^{3t}.$$

Logo $Ae^{3t} = 5e^{3t} \Leftrightarrow A = 5$. A solução geral é dada então por

$$c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + 5te^{3t}.$$

(2) Temos que a o polinômio característico é dado por

$$r^2 + 9 = (r-3i)(r+3i).$$

Portanto a solução da equação homogênea $y'' + 9y = 0$ é $c_1\text{sen}3t + c_2\cos 3t$. Segue do método de variação de parâmetros que a solução geral da equação diferencial $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3t}$ é dada por

$$y(t) = -\text{sen}3t\int \frac{\cos 3t}{W(t)}\frac{1}{\cos 3t}dt + \cos 3t\int \frac{\text{sen}3t}{W(t)}\frac{1}{\cos 3t}dt,$$

onde $W(t)$ é o Wronskiano de $\text{sen}3t$ e $\cos 3t$, que é dado por

$$W(t) = \begin{vmatrix} \text{sen3t} & \text{cos3t} \\ \text{3cos3t} & \text{-3sen3t} \end{vmatrix} = -3(\text{sen}^2 3t + \cos^2 3t) = -3.$$

Logo

$$y(t) = \frac{\text{sen}3t}{3}\int dt - \frac{\cos 3t}{3}\int \frac{\text{sen}3t}{\cos 3t}dt$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\text{sen}3t}{3}(t + c_1) - \frac{\cos 3t}{3}\left(-\frac{\ln\cos 3t}{3} + c_2\right).$$

Temos então que uma solução particular é dada por

$$y(t) = \frac{t\text{sen}3t}{2} + \frac{\cos 3t \ln\cos 3t}{9}.$$

(3) Temos que a o polinômio característico é dado por

$$r^3 + r^2 - r - 1 = (r-1)(r+1)^2.$$

Portanto a solução da equação homogênea $y''' + y'' - y' - y = 0$ é $c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3te^{-t}$. Pelo método dos coeficientes indeterminados devemos então tentar encontrar uma solução do tipo $Y(t) = Ae^{2t}$. Segue que

$$Y(t) = Ae^{2t}, \quad Y'(t) = 2Ae^{2t}, \quad Y''(t) = 4Ae^{2t}, \quad Y'''(t) = 8Ae^{2t}$$

$$\Rightarrow Y''' + Y'' - Y' - Y = (8 + 4 - 2 - 1)Ae^{2t} = 9Ae^{2t}.$$

Logo $9Ae^{2t} = 18e^{2t} \Leftrightarrow A = 2$. A solução geral é dada então por

$$c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3te^{-t} + 2e^{2t}.$$

(4) Segue do método de variação de parâmetros que a solução geral da equação diferencial $y'' - \frac{(t+2)}{t}y' + \frac{(t+2)}{t^2}y = t$ (dividindo a equação dada por t^2) é dada por

$$y(t) = -t\int \frac{te^t}{W(t)}tdt + te^t\int \frac{t}{W(t)}tdt,$$

onde $W(t)$ é o Wronskiano de t e te^t, que é dado por

$$W(t) = t(t+1)e^t - te^t = t^2e^t.$$

Logo

$$y(t) = -t\int dt + te^t\int e^{-t}dt = -t(t + c_1) + te^t(-e^{-t} + c_2).$$

Temos então que uma solução particular é dada por

$$y(t) = -t^2 - t.$$

(5) Temos que a o polinômio característico é dado por

$$r^4 - 81 = (r^2 - 9)(r^2 + 9) = (r - 3)(r + 3)(r - 3i)(r + 3i).$$

Portanto a solução da equação homogênea $y^{(4)} - 81y = 0$ é

$$c_2e^{3t} + c_2e^{-3t} + c_3\text{sen}3t + c_4\cos 3t.$$

(6) Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_{2\pi}\}$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_{2\pi}\}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 1)\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-2\pi s}}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+1)}.$$

Usando frações parciais, temos

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2+1} \Rightarrow \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{(a+b)s^2 + cs + a}{s(s^2+1)},$$

encontramos então $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. Logo

$$\mathcal{L}\{y\} = e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right).$$

Consultando a tabela, vemos que

$$y(t) = u_{2\pi}(t)(1 - \cos(t - 2\pi)) = u_{2\pi}(t)(1 - \cos t).$$

(7) Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$
$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 3(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$
$$\Rightarrow (s^2 + 3s + 2)\mathcal{L}\{y\} = e^{-s} + 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-s}+1}{s^2+3s+1}.$$

Usando frações parciais, temos

$$\frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{a}{s+2} + \frac{b}{s+1} = \frac{(a+b)s + a + 2b}{(s+2)(s+1)}.$$

Encontramos então $a = -1$ e $b = 1$. Logo

$$\mathcal{L}\{y\} = e^{-s}\left(-\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}.$$

Consultando a tabela, vemos que

$$y(t) = u_1(t)(-e^{-2(t-1)} + e^{-(t-1)}) - e^{-2t} + e^{-t}.$$

(8) Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-2)\}$$
$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-2)\}$$
$$\Rightarrow (s^2 + 9)\mathcal{L}\{y\} = e^{-2s} + 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-2s}+1}{s^2+9}.$$

Consultando a tabela, vemos que

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(u_2(t)\mathrm{sen}3(t-2) + \mathrm{sen}3t\right).$$