UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
ESCUELA DE POSTGRADO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA

REPRESENTACIÓN Y ALEATORIZACIÓN EN SISTEMAS DINÁMICOS DE TIPO ALGEBRAICO

MARCELO SOBOTTKA

2005

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA DE POSTGRADO

REPRESENTACIÓN Y ALEATORIZACIÓN EN SISTEMAS DINÁMICOS DE TIPO ALGEBRAICO

MARCELO SOBOTTKA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN EVALUADORA

Sr. Servet Martínez (Profesor Guía)	Universidad de Chile
Sr. Alejandro Maass	Universidad de Chile
Sr. Jaime San Martin	Universidad de Chile
Sr. Patricio Felmer	Universidad de Chile
Sr. Jean-Marc Gambaudo	Université de Bourgogne
Sr. Jean-René Chazottes	École Polytechnique
Sr. Marcus Pivato	Trent University

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2005

RESUMEN DE LA TESIS
PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA
POR MARCELO SOBOTTKA
FECHA: 28 de Octubre de 2005
PROFESOR GUÍA: DR. S. MARTÍNEZ

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo aportar nuevos resultados al estudio de la aleatorización y la representación de sistemas dinámicos de tipo algebraico. Mas precisamente, estudiaremos la convergencia de la media de Cesàro de medidas de probabilidad bajo la dinámica de autómatas celulares cuya regla local está dada por una operación algebraica, y caracterizaremos la dinámica topológica de ellos. En el Capítulo I presentamos las nociones básicas y resultados clásicos sobre dinámica topológica y abstracta, en particular nos concentraremos en los sistemas dinámicos simbólicos que son el objeto de nuestro trabajo.

En el Capítulo II estudiaremos los espacios *shift* que pueden soportar una operación de casi-grupo topológico para la cual la transformación *shift* es un automorfismo. Daremos una completa caracterización de tales espacios y demostraremos que ellos son siempre isomorfos al producto de un *shift* finito con un *full shift* en el espíritu del Teorema de Kitchens. Además, presentaremos resultados respecto del rol que juega la entropía topológica del espacio *shift* en su estructura de casi-grupo. Finalizamos el capítulo probando que cualquier isomorfismo entre dos casi-grupos *shift* es siempre una composición finita de las opera-

ciones de *state spliting* y *amalgamation*.

En el Capítulo III nos concentraremos en el tema de la aleatorización de medidas iniciales por autómatas celulares. Consideraremos el caso de los autómatas celulares de tipo afín definidos sobre cadenas de Markov topológicas que sean grupos *shift*. Para tales casos, utilizando como herramienta la noción de tiempo de renovación para procesos estocásticos y algunos argumentos de combinatoria, probaremos que las medidas iniciales con conección completa y decaimiento sumable compatibles con la cadena de Markov topológica son aleatorizadas por la dinámica del autómata, es decir, la media de Cesàro de ellas bajo la dinámica del autómata celular converge a la medida de máxima entropía.

En el Capítulo IV utilizaremos los resultados presentados en los capítulos anteriores para caracterizar la dinámica topológica de ciertos autómatas celulares bipermutativos definidos sobre cadenas de Markov topológicas. Demostraremos también que los autómatas celulares permutativos a la derecha, que son Ψ-asociativos o N-*scaling* son siempre topológicamente conjugados a un autómata del tipo translación-afín definido sobre el producto de un *full shift* con una cadena de Markov topológica. Finalmente, utilizamos esas conjugaciones topológicas para estudiar la convergencia de la media de Cesàro de medidas bajo la dinámica de esos autómatas.

Agradecimientos

"Não quero lhe falar, [...]

Das coisas que aprendi nos discos

Quero lhe contar como eu vivi

E tudo o que aconteceu comigo"

Antônio Carlos Belchior

Esta tesis representa cerca de cuatro años de mi vida. No simplemente los cuatro años dedicados a mi doctorado y a elaborarla, pero sí cuatro años de experiencías y aprendizajes que fueron mucho más allá de las matemáticas. Experiencías y aprendizajes que solo fueron posibles debido a las personas que hacen parte de mi vida: aquellas que ya hace mucho me acompañaban y aquellas que entraron en mi vida estando yo aqui. Nombrar cada una de esas personas es tan imposible como contar la historia de una vida. Dedico esa tesis con gratitud a todas esas personas.

En especial, la dedico a Mary Anne, quien cruzó las cordilleras para estar a mi lado en ese emprendimiento; a mi familia, que quedó en Brasil, pero cuyo apoyo por toda una vida me trajo hasta aquí; a Julio, Sara, Sandra, Marcela y Gabriel, quienes me acogieron cuando llegué en Chile; a Andrew y Loredana, amigos que encontré por aqui, cada cual de distintas parajes y con sus propias historias, que ahora también hacen parte de la mía.

Quiero expresar mi gratitud a mis guías de tesis, Prof. S. Martínez y Prof. A. Maass, por sus orientaciones y dedicación. También agradezco al Prof. M. Pivato, por sus indicaciones para mejorar la presentación final de mi tesis. Por fin, agradezco al soporte dado por MECESUP UCH0009 y por Núcleo Milenio Información y Aleatoriedad ICM

P01-005.

Contents

Chapter I

Introducción

La presente tesis estudia los sistemas dinámicos simbólicos en una dimensión, conocidos como autómatas celulares. El concepto de autómata celular fue desarrollado en los 50's por von Neumann [17] y desde entonces ha sido estudiado como objeto matemático y aplicado a la resolución de diversos problemas de la física, biología, etc. Como objeto matemático los autómatas celulares forman parte de una importante rama de la matemática, que es la de los sistemas dinámicos, y en particular, de aquellos sistemas dinámicos que son conocidos como simbólicos. Siendo un sistema dinámico, el estudio de los autómatas celulares se hace básicamente bajo dos puntos de vista: del estudio probabilístico de su dinámica, teniendo como principales ramificaciones la teoría ergódica y la teoría de la información; y de la dinámica topológica, la cual nos permite obtener propiedades del sistema que sean invariantes topológicos. En particular, siendo un sistema dinámico simbólico, el estudio de los autómatas celulares se nutre de resultados de procesos estocásticos y de teoría de codificación.

Desde el punto de vista probabilístico, dado un autómata celular (X, Φ) y una medida de probabilidad μ sobre los Borelianos de X, una cuestión relevante es saber como μ evoluciona bajo la dinámica de Φ, es decir, determinar si $\mu \circ \Phi^{-n}$ converge a una medida estacionaria cuando n se va a infinito. Claramente, la respuesta a esa pregunta depende directamente de la regla local de Φ y en general es negativa. Alternativamente, podemos estudiar la convergencia de la media de Cesàro de la medida bajo la dinámica del autómata, es decir, determinar si existe y cual es la distribución en el límite de $N^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \mu \circ \Phi^{-n}$ cuando N va a infinito. Cuando la expresión anterior converge a la medida de entropía máxima ν, decimos que el autómata celular aleatoriza la medida μ.

Concentrémonos en el caso de autómatas celulares de tipo algebraico, es decir, aquellos cuya regla local proviene de una operación algebraica sobre X. Tales autómatas celulares constituyen una importante clase, la cual ha sido ampliamente estudiada. Originalmente, el problema de la aleatorización de autómatas algebraicos fue estudiado por Lind [10] para el caso en que X es el *full shift* sobre el grupo cíclico $\mathbb{Z}_2 = (\{0, 1\}, +_{mod\ 2})$ y que Φ es el autómata cuya la regla local es sumar $(\mod 2)$ los estados de dos células contiguas. En su trabajo, Lind demostró que cualquier medida Bernoulli sobre X es aleatorizada por Φ a la medida de Haar (que en ese caso es la medida Bernoulli uniforme). Trabajos posteriores han repetido ese resultado para otros tipos de medidas iniciales, otros tipos de autómatas algebraicos y otros espacios que no son *full shift*. En cuanto a las técnicas que han sido utilizadas en esos trabajos, los podemos clasificar en dos puntos de vista distintos: del análisis armónico; y de la teoría de renovación.

El objetivo inicial de este trabajo fue el estudiar la aleatorización de medidas de probabilidad iniciales de memoria infinita y decaimiento sumable para autómatas algebraicos definidos sobre cadenas de Markov topológicas. El primero camino que se planteó fue el de intentar recuperar los resultados ya existentes utilizando como herramienta la conjugación topológica de autómatas celulares algebraicos sobre cadenas de Markov con autómatas algebraicos sobre *full shifts*. Tal metodología derivó en la generalización de los resultados de Kitchens [9] para casi-grupos *shifts* y constituye el Capítulo II de esta tesis. La utilización de las herramientas desarrolladas para estudiar topológicamente los casi-grupos *shift* resultó útil para resolver el problema de la convergencia de la distribución en media de Cesàro para diversos casos en los cuales la regla local del autómata posee cierta regularidad y está descrita en el Capítulo IV. Sin embargo, tal técnica no permite que obtengamos un resultado que sea válido para toda una clase de autómatas celulares.

Para estudiar el problema de aleatorización de medidas con memoria infinita por autómatas celulares algebraicos sobre cadenas de Markov en una clase más general de autómatas celulares, utilizamos la teoría de renovación. En el Capítulo III presentamos ese estudio que consiste en generar conjuntamente un espacio de probabilidad con ley de probabilidad μ_w (que es la esperanza condicional de μ para un pasado dado) y un proceso de renovación, ambos como producto de variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes.

En las siguientes secciones presentamos las definiciones y resultados clásicos sobre sistemas dinámicos que intervienen en esta tesis. Para un estudio más profundo referimos el lector a [11], [19] y [27].

I.1 Dinámica abstracta y topológica

Dado X un espacio cualquiera y $T : X \to X$ una transformación, nos interesaremos en estudiar la dinámica de T, es decir, describir las órbitas de los puntos de X bajo las iteradas de T. Sin embargo, muchas veces la dinámica de T puede ser demasiado compleja para que se pueda describir cada órbita. Eso hace necesario utilizar alguna herramienta que nos permita describir el comportamiento del sistema de forma más general.

Los conceptos de dinámica abstracta y topológica son dos formas de estudiar el comportamiento general de los sistemas dinámicos. La dinámica abstracta nos entrega herramientas para entender un sistema dinámico del punto de vista de la teoría de la medida, es decir, deducir propiedades del sistema que son válidas para (según alguna medida) casi todos los puntos. Por otro lado, la dinámica topológica supone que X es un espacio topológico y estudia como T actúa sobre los abiertos de X.

I.1.1 Sistemas dinámicos abstractos

Decimos que $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es un sistema dinámico abstracto si $(X, \mathcal{B})$ es un espacio medible, $T : X \to X$ es un mapa $\mathcal{B}$-medible y μ es una medida de probabilidad T-invariante ($\mu \circ T^{-1} = \mu$).

Decimos que dos sistemas dinámicos abstractos $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ y $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ son conjugados en medida si existe una aplicación $\mathbf{f} : X \to Y$ que es medible, tiene inversa medible, preserva las medidas ($\nu = \mu \circ \mathbf{f}^{-1}$) y conmuta con las transformaciones T y S (es decir, $\mathbf{f} \circ T = S \circ \mathbf{f}$). Si la aplicación $\mathbf{f}$ no es inversible, entonces decimos que $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es una extensión de $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ o equivalentemente que $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ es un factor de $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$.

Podemos estudiar los sistemas dinámicos abstractos a través de su entropía en medida, concepto fundamental en teoría de la información que busca medir la complejidad del sistema. Más exactamente, dado $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ decimos que $\alpha := \{A_n\}_{n \in J} \subseteq \mathcal{B}$, con J numerable, es una μ-partición si $\mu(A_m \cap A_n) = 0$ para $m \neq n$ y además $\mu\Big(\bigcup_{n \in J} A_n\Big) = 1$. Notamos por P_μ al conjunto de todas las μ-particiones. Dado $\alpha \in P_\mu$ definimos la función de información $I_\mu(\alpha) : X \to [0, \infty)$ por

$$I_\mu(\alpha)(x) = -\sum_{A \in \alpha} \mathbf{1}_A(x) \cdot \log \mu(A),$$

y la entropía de α se define por

$$\mathbf{H}_\mu(\alpha) := \int_X I_\mu(\alpha) = -\sum_{A \in \alpha} \mu(A) \cdot \log \mu(A).$$

Notamos $\alpha_0^{N-1} := \Big\{\bigcap_{i=0}^{N-1} A^i : \ A^i \in T^{-i}(\alpha), i = 0, \ldots, N-1\Big\}$ y se tiene que el límite siguiente existe

$$\mathbf{h}_\mu(\alpha, T) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbf{H}_\mu(\alpha_0^{N-1}),$$

y se llama la entropía de T con respecto a α. Finalmente, se define la entropía de T con respecto a la medida μ por

$$\mathbf{h}_\mu(T) := \sup_{\alpha \in P_\mu} \mathbf{h}_\mu(\alpha, T).$$

Se deduce que si $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ es un factor de $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, entonces $\mathbf{h}_\nu(S) \leq \mathbf{h}_\mu(T)$ y luego la entropía (en medida) es un invariante bajo la conjugación (en medida).

I.1.2 Sistemas dinámicos topológicos

Decimos que (X, T) es un sistema dinámico topológico si X es un espacio topológico compacto y $T : X \to X$ es una transformación continua.

Decimos que dos sistemas dinámicos topológicos (X, T) y (Y, S) son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $\mathbf{f} : X \to Y$ que conmuta con las transformaciones T y S. Nuevamente si $\mathbf{f}$ no es inversible decimos que (Y, S) es factor de (X, T).

Podemos definir la entropía topológica del sistema utilizando los recubrimientos abiertos de X. Más precisamente, sea $\mathcal{R}$ la familia de todos los recubrimientos abiertos de X y consideremos $\mathcal{U} \in \mathcal{R}$. Notamos por $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ a la cardinalidad del menor subrecubrimiento de $\mathcal{U}$, es decir,

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) := \min\left\{k \geq 1 :\ \exists U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}, \bigcup_{i=1}^{k} U_i = X\right\}.$$

Si anotamos $\mathcal{U}_0^{N-1} := \left\{\bigcap_{i=0}^{N-1} U^i :\ U^i \in T^{-i}(\mathcal{U}), i = 0, \ldots, N-1\right\}$, se define la entropía topológica de T con respecto a $\mathcal{U}$ por el siguiente límite (que existe por subaditividad)

$$\mathbf{h}(\mathcal{U}, T) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{N}(\mathcal{U}_0^{N-1})$$

y la entropía topológica del sistema por

$$\mathbf{h}(T) := \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{R}} \mathbf{h}(\mathcal{U}, T).$$

Claramente la entropía topológica es un invariante bajo conjugación topológica.

Sea $\mathcal{B}$ la sigma-álgebra de Borel de X y denotamos por $M(T)$ al conjunto de las medidas de probabilidad sobre $\mathcal{B}$ que son T-invariantes. La relación entre la entropía en medida y la entropía topológica es dada por el principio variacional:

$$\mathbf{h}(T) = \sup_{\mu\in M(T)} \mathbf{h}_\mu(T).$$

Cuando el supremo en la expresión anterior es alcanzado por una medida ν, decimos que ν es una medida de máxima entropía.

I.2 Dinámica simbólica

I.2.1 Espacios *shift*

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito con q elementos, que llamaremos un *alfabeto* finito. Sea $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ el espacio de todas las sucesiones bi-infinitas sobre $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \quad x_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{Z}\},$$

lo cual es llamado el *full shift* sobre el alfabeto $\mathcal{A}$.

Consideramos $\mathcal{A}$ dotado de la topología de las partes y sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ consideramos la respectiva topología producto $\tau_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$ la cual hace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ser un espacio Haussdorff y compacto. Para $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ y $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, definimos el conjunto $[a_0, a_1, \ldots, a_n]_j :=$ $\{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \quad x_{i+j} = a_i, \quad 0 \leq i \leq n\}$, lo cual es llamado un *cilindro* de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Observe que los cilindros son generadores de la topología $\tau_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$ y son conjuntos abiertos-cerrados para ella. Denotamos por $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ el sistema dinámico topológico donde $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es la transformación *shift*, es decir, el homeomorfismo dado por

$$\sigma\big((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Decimos que $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un *espacio shift* si Λ es cerrado para la topología $\tau_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$ y es σ-invariante, es decir, $\sigma(\Lambda) = \Lambda$. Si Λ es un espacio *shift* podemos tomar $\sigma_{|_\Lambda}$ la restricción de la transformación *shift* a Λ y tenemos que $(\Lambda, \sigma_{|_\Lambda})$ es también un sistema dinámico topológico. Denotaremos por $\mathcal{W}(\Lambda, n)$ al conjunto de las palabras de largo n permitidas en Λ, es decir,

$$\mathcal{W}(\Lambda, n) = \{(a_i)_{0\leq i\leq n-1} \in \mathcal{A}^n | \quad \exists (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda, \quad x_i = a_i, \quad 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Una forma alternativa de definir un espacio *shift* es en términos de *palabras prohibidas*, es decir, Λ es un espacio *shift* si, y sólo si, existe un conjunto $F \subseteq \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{A}^n$ tal que:

$$(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_i)_{k\leq i\leq \ell} \notin F, \quad \forall k \leq \ell$$

Es directo que $F = \emptyset$ equivale a que $\Lambda = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, y que $F \subseteq \mathcal{A}$ equivale a decir que $\Lambda = \emptyset$ ó Λ es un *full shift* sobre un subconjunto de $\mathcal{A}$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que siempre $F \cap \mathcal{A} = \emptyset$, es decir, que Λ utiliza todas las letras de $\mathcal{A}$.

Dado un espacio *shift* $\Lambda \subsetneq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, siempre podemos considerar que su conjunto F de palabras prohibidas es minimal en el sentido de que para todo $(a_i)_{0\leq i\leq m} \in \mathrm{F}$ si tomamos $0 \leq k \leq \ell \leq m$, con $k \neq 0$ o $\ell \neq m$, entonces $(a_i)_{k\leq i\leq \ell} \in \mathcal{W}(\Lambda, \ell - k + 1)$. Podemos caracterizar Λ a partir del conjunto F minimal. En particular, si F es finito decimos que Λ es un *shift de tipo finito*, y que $M := \min\{m \geq 1 : \ F \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{A}^n\} - 1$ es el *paso* o *memoria* de Λ. Cuando $M = 1$, llamamos Λ un *shift de Markov* o una *cadena de Markov topológica*.

Los *shift* de Markov pueden ser vistos como generados por el recorrido (infinito) sobre un grafo orientado. Es decir, existe un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$, con vértices $\mathcal{V} = \mathcal{A}$ y aristas $\mathcal{U} = \{u_1, u_2 \ldots, u_m\}$ tal que $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$ si, y sólo si, para todo $i \in \mathbb{Z}$ existe una arista en $\mathcal{U}$ que tiene origen en x_i y fin en x_{i+1}. Alternativamente también podemos pensar que Λ está determinado por una *matriz de transición*, es decir, existe una matriz $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{i,j\in\mathcal{A}}$, con $A_{ij} \in \{0, 1\}$ para cualesquiera $i, j \in \mathcal{A}$, la cual cumple $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$ si, y sólo si, $A_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

I.2.2 *Sliding block codes* y las representaciones de orden superior de un *shift*

Sean $\Lambda_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\Lambda_G \subseteq G^{\mathbb{Z}}$ dos espacios *shift*. Una aplicación $\mathbf{f} : \Lambda_{\mathcal{A}} \to \Lambda_G$ se dice un *sliding block code* si está dada por una regla local del tipo k-bloque, es decir, existen $\ell, r \geq 0$, con $k = \ell + r + 1$, y $f : \mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{A}}, k) \to G$ tales que para todo $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Lambda_{\mathcal{A}}$ y $j \in \mathbb{Z}$ se tiene $\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)_j = f\big(x_{j-\ell}, \ldots, x_j, \ldots, x_{j+r}\big)$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{x} & = & (& \cdots & , & \boxed{x_{j-\ell}, \ldots, x_j \ldots, x_{j+r}} & , \\
 & & & & & \Big\downarrow f & \\
\mathbf{f}(\mathbf{x}) & = & (& \cdots & , & \big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)_j & ,
\end{array}
$$

Figure I.1: La regla local de $\mathbf{f}$ mira los bloques de largo $\ell + r + 1$ de la sucesión $\mathbf{x}$.

Decimos que $\mathbf{f}$ tiene memoria ℓ y anticipación r. Sin pérdida de generalidad para nuestro estudio podemos siempre considerar $\ell = 0$.

La familia de aplicaciones que son *sliding block codes* coincide con la familia de las aplicaciones continuas que conmutan con la transformación *shift*, es decir, las aplicaciones $\mathbf{f} : \Lambda_{\mathcal{A}} \to \Lambda_G$ tales que $\mathbf{f} \circ \sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} = \sigma_{G^{\mathbb{Z}}} \circ \mathbf{f}$. Además, si $\mathbf{f}$ es un *sliding block code* y es inversible, entonces $\mathbf{f}^{-1}$ también es un *sliding block code*. En particular, eso nos da que si $\Lambda_{\mathcal{A}}$ es un *shift* de tipo finito y $(\Lambda_{\mathcal{A}}, \sigma_{\mathcal{A}})$ es topológicamente conjugado a (Λ_G, σ_G), entonces Λ_G es también un *shift* de tipo finito.

Un caso importante de *sliding block codes* son los *códigos de representaciones k-bloque*: $\mathbf{f} : \Lambda_{\mathcal{A}} \to \Lambda_G$ es un código de representación k-bloque de $\Lambda_{\mathcal{A}}$ si, y sólo si, tiene una regla local $f : \mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{A}}, k) \to G$ inversible (en ese caso se dice que Λ_G es la representación k-bloque de $\Lambda_{\mathcal{A}}$). Es posible demostrar que si tenemos un *shift* de tipo finito con memoria M, entonces su representación M-bloque será un *shift* de Markov.

Además del *sliding block code*, otro tipo importante de codificación es el *código de representación de orden superior* k, que es la aplicación $\mathbf{f} : \Lambda \to \big(\mathcal{W}(\Lambda, k)\big)^{\mathbb{Z}}$ sobre el espacio *shift* Λ, definida para todo $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$ por $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, donde $y_j = [x_{jk}, x_{jk+1}, \ldots, x_{(j+1)k-1}] \in \mathcal{W}(\Lambda, k)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Nuevamente, si Λ es un *shift* de tipo finito, entonces su representación superior de orden k será también un *shift* de tipo finito y si M es la memoria de Λ, entonces su representación superior de orden M será un *shift* de Markov.

I.2.3 Espacios *shift* como casi-grupos topológicos

Sea X un espacio topológico en el cual está definida una operación binaria $*$ cerrada y continua sobre X. Decimos que $(X, *)$ es un casi-grupo topológico si $*$ es cancelable a la derecha y a la izquierda (bipermutativa), es decir, para todo $a \in X$, las funciones $x \mapsto a*x$ y $x \mapsto x * a$ sobre X son inyectivas. En particular, si X es un casi-grupo finito, entonces las funciones anteriores serán biyecciones.

Sea $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un espacio *shift* y supongamos que $(\Lambda, *)$ es un casi-grupo topológico. Además supongamos que la transformación *shift* es un automorfismo para $*$. Luego, $*$ es un *sliding block code* de $\Lambda\times\Lambda$ en Λ, lo que significa que es una *operación k-bloque*, donde $k = \ell + r + 1$ y $\phi : \mathcal{W}(\Lambda, k) \times \mathcal{W}(\Lambda, k) \to \mathcal{A}$, tal que para todo $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \mathbf{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ y todo $j \in \mathbb{Z}$,

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})_j = \phi\big([x_{j-\ell}, \ldots, x_{j+r}], [y_{j-\ell}, \ldots, y_{j+r}]\big).$$

En tal caso, diremos que $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *)$ es un casi-grupo *shift* y $(\Lambda, *)$ un sub-casi-grupo *shift*.

Kitchens [9] estudió el caso en que $(\Lambda, *)$ es un grupo *shift*, demostrando que Λ debe necesariamente ser un *shift* de tipo finito y es siempre isomorfo $(\Sigma, \tilde{*})$, donde Σ es un *shift* de Markov y $\tilde{*}$ es una operación 1-bloque. Además, Kitchens probó también que $(\Lambda, *)$ es isomorfo a $(\mathbb{F} \times K^{\mathbb{Z}}, \otimes)$ donde $\mathbb{F}$ es finito, $K^{\mathbb{Z}}$ es un *full shift* y $\otimes$ es una operación k-bloque. En el Capítulo II, reproduciremos los resultados de Kitchens para el caso más general de los casi-grupos *shift*.

I.2.4 Entropía topológica y en medida de un *shift*

La entropía topológica de un *shift*, es decir, del sistema dinámico topológico (Λ, σ) depende únicamente del lenguaje de Λ. En términos prácticos, la calculamos como el siguiente límite:

$$\mathbf{h}(\Lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log |\mathcal{W}(\Lambda, N)| \,.$$

Supongamos ahora que μ es una medida de probabilidad sobre los Borelianos de Λ tal que $(\Lambda, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ es un sistema dinámico abstracto. Se tiene que la partición α de los cilindros definidos en la coordenada cero es un generador fuerte, luego la entropía del *shift* con respecto a μ es

$$\mathbf{h}_\mu(\Lambda) = h_\mu(\alpha, \sigma)$$

Recuerde que una medida μ sobre los Borelianos de Λ es de entropía máxima, si ella es tal que $\mathbf{h}_\mu(\Lambda) = \mathbf{h}(\Lambda)$.

Supongamos que $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *)$ es un grupo *shift* y que $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un subgrupo *shift*. La medida de Haar es la única medida de probabilidad sobre los Borelianos de Λ que es invariante por la acción del grupo. Además, es posible demostrar [14] que la medida de Haar es la única medida con entropía máxima para (Λ, σ).

I.3 Autómatas celulares

Sea $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un espacio *shift* y $\Phi : \Lambda \to \Lambda$ una transformación continua que conmuta con la transformación *shift*, es decir, una transformación con regla local k-bloque, $k = \ell + r + 1$. El sistema dinámico topológico (Λ, Φ) es llamado un *autómata celular (a.c.)*.

Denotemos por $\phi : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}$ la regla local de Φ. Decimos que Φ es permutativo a la derecha si para cada palabra $[a_1, \ldots, a_{k-1}] \in \mathcal{W}(\Lambda, k-1)$ se tiene que el mapa $a_k \mapsto \phi(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ es una permutación sobre $\mathcal{A}$. De manera análoga definimos el concepto de un autómata permutativo a la izquierda. Cuando un autómata es simultáneamente permutativo a la derecha y a la izquierda, diremos que él es bipermutativo.

Cuando un autómata celular tiene memoria $\ell = 0$ y anticipación r, decimos que él es un autómata de radio r. Sin embargo, para efectos de estudiar la dinámica de (Λ, Φ), podemos siempre considerar $\ell = 0$. Además, podemos también siempre considerar $r = 1$, ya que cuando $r > 1$ podemos utilizar el código $\mathbf{f}$ de representación de orden superior r de Λ, obteniendo otro espacio *shift* Λ' y un mapa $\Phi' := \mathbf{f} \circ \Phi \circ \mathbf{f}^{-1}$ con anticipación 1, tales que (Λ, Φ) y (Λ', Φ') son topológicamente conjugados.

Un tipo especial de autómatas celulares son los autómatas algebraicos, es decir, aquellos cuya la regla local es dada por alguna operación algebraica sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Por ejemplo, supongamos que $*$ es una operación de grupo sobre $\mathcal{A}$ y que Φ es un autómata de radio 1 sobre $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ con regla local $\phi : \mathcal{W}(\Lambda, 2) \to \mathcal{A}$ definida por

$$\phi(x_0, x_1) = \eta(x_0) * \rho(x_1) * c, \tag{I.1}$$

donde $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ y $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ son endomorfismos y $c \in \mathcal{A}$. Los autómatas algebraicos que tienen regla local de la forma (I.1) para una operación $*$ de grupo Abeliano, son clasificados como sigue:

- si $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ y $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ son automorfismos que conmutan, es decir, $\eta \circ \rho = \rho \circ \eta$, entonces decimos que Φ es un *a.c. afín*;
- si $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ y $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ son automorfismos que conmutan y $c = 0_{\mathcal{A}}$ (c es el elemento neutro del grupo $(\mathcal{A}, *)$), entonces decimos que Φ es un *a.c. lineal*;
- si $\eta = \rho = id$ y $c = 0_{\mathcal{A}}$, entonces decimos que Φ es un *a.c. de grupo*.

En las tres clases descritas arriba los autómatas celulares son bipermutativos.

Además, en principio no hay ninguna exigencia sobre Λ de tener alguna estructura algebraica específica. De hecho, es posible construir un ejemplo donde (Λ, Φ) es un *a.c. afín* y en que $(\Lambda, *)$ no es un grupo *shift*:

Ejemplo I.3.1. *Sea $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ y considere la operación $+$ sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que es la operación inducida por la operación en $\mathcal{A}$. Consideremos $\Sigma \subset \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}}$ el* subshift *generado a partir del conjunto de palabras prohibidas $F = \{00, 11, 22, 010, 020, 101, 121, 202, 212\}$, definimos $\Lambda \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ por $\Lambda := \Sigma \oplus \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}}$ y el mapa $\Phi : \Lambda \to \Lambda$ dado por la regla local $\phi(x_0, x_1) = \mathbf{2} \cdot x_0 + \mathbf{2} \cdot x_1 + 1$. Se tiene que (Λ, Φ) es un* a.c. afín*, pero $(\Lambda, +)$ no es un grupo* shift.

No necesariamente un autómata de tipo algebraico tiene que ser bipermutativo o originado a partir de una operación 1-bloque. Por ejemplo, si $(\Lambda, *)$ es un grupo *shift*, donde $*$ es una operación k-bloque, entonces $\Phi := id * \sigma$ es un autómata celular algebraico que no es permutativo a la derecha.

En el Capítulo III nos concentraremos en el caso en que el espacio $(\Lambda, *)$ es un subgrupo de $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *)$ y que (Λ, Φ) es un *a.c. afín*. Bajo esas condiciones, presentaremos resultados sobre la aleatorización de medidas iniciales por esos autómatas y extenderemos tales resultados al caso más general en el cual $*$ es una aplicación de grupo Abeliano k-bloque. Llamamos la atención de que no es difícil verificar que la medida de Haar es también la única medida de entropía máxima para (Λ, Φ). En el Capítulo IV extenderemos los resultados sobre la convergencia de la media de Cesàro de medidas iniciales bajo la acción de clases de autómatas de tipo algebraico que son solamente permutativos a la derecha. Además, demostraremos resultados sobre la representación de esos autómatas celulares y, en particular, sobre la representación de autómatas bipermutativos en general.

Chapter II

Casi-grupos *shifts*

II.1 Presentación

En este capítulo caracterizaremos los espacios *shift* que pueden soportar una operación 1-bloque de casi-grupo.

El problema de caracterizar espacios *shift* que tienen estructuras algebraicas para las cuales la transformación *shift* es un automorfismo fue propuesto originalmente para el caso de grupos por Bowen y resuelto por Kitchens [9] quien ha demostrado que cualquier sistema dinámico topológico (X, T), donde $(X, \tilde{*})$ es un grupo topológico zero dimensional y $T : X \to X$ es un automorfismo expansivo, es simultáneamente topológicamente conjugado e isomorfo a $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \sigma)$, donde $\Sigma_{\mathbf{A}}$ es un *shift* de Markov y $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ es un grupo con operación 1-bloque. En particular, ese resultado prueba que los únicos espacios *shift* que admiten una operación de grupo para la cual la transformación *shift* es un automorfismo, son los *shift* de tipo finito. Más aún, Kitchens ha probado que todo espacio *shift*

$(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$, donde $*$ es operación 1-bloque, es a la vez topológicamente conjugado e isomorfo a un espacio de la forma $(\mathbb{F} \times \Sigma_n, \otimes)$, donde $\mathbb{F}$ es un *shift* finito (es decir, $|\mathbb{F}| < \infty$), Σ_n es un *full shift* con n símbolos, y $\otimes$ es una operación k-bloque.

Posteriormente, Sindhushayana-Marcus-Trott [26] estudiaron el caso más general de los espacios *shift* homogéneos, obteniendo un resultado análogo al de Kitchens. Tales espacios son constituídos por los *shifts* Λ, sobre un alfabeto finito $\mathcal{A}$, para los cuales existe un grupo (con respecto a la operación de composición) $P(\mathcal{A})$ de las permutaciones sobre $\mathcal{A}$ y un subgrupo $\Sigma \subseteq P(\mathcal{A})^{\mathbb{Z}}$, tal que para todo $(p_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ y $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$ se tiene que $\big(p_i(x_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$. Observamos que la clase de los *shift* homogéneos contiene la clase de los espacios *shift* para los cuales la transformación *shift* es un automorfismo, pero no se restringe a ella. De hecho, en [26] son presentados ejemplos de que la clase de los *shift* homogéneos también pueden contener espacios *shift* con estructuras de grupos para las cuales la transformación *shift* no es un automorfismo.

Recordamos que un casi-grupo *shift* es un espacio *shift* $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ sobre lo cual está definida una operación binaria cerrada y cancelable a la izquierda y a la derecha, para la cual la transformación *shift* es un automorfismo. En este capítulo estudiaremos la estructura algebraica de los casi-grupos *shift*. Entre otros resultados, recuperaremos para casi-grupos *shift* el resultado de Kitchens, es decir, demostraremos que los espacios *shift* que soportan una operación de casi-grupo 1-bloque son siempre topológicamente conjugados e isomorfos al producto de algún *shift* finito producto un *full shift* donde está definida una operación k-bloque de casi-grupo.

Sea $(\Lambda, *)$ un casi-grupo *shift* con operación 1-bloque. Notemos que hay que imponer en la parte (iii) del Teorema II.2.33 la condición de que existe una sucesión constante $\mathbf{c} = (\ldots, c, c, c, \ldots) \in \Lambda$. En la versión de Kitchens (ver inicio de la Subsección §II.2.3) no es necesaria esa hipótesis ya que todo grupo *shift* siempre posee sucesiones constantes (ver Lema 35 en [20]). De hecho, el Ejemplo II.1.1 nos da un casi-grupo *shift* irreducible que no contiene ninguna sucesión constante:

Ejemplo II.1.1. *Sea* $\mathcal{A} = \{a_i, b_i, c_i, d_i | \quad i = 1, 2, 3\}$ *un conjunto donde está definida la operación de casi-grupo* $\bullet$ *dada por la siguiente tabla:*

$\bullet$	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
a_1	a_3	b_3	c_3	d_3	a_2	b_2	c_2	d_2	a_1	b_1	c_1	d_1
b_1	b_3	a_3	d_3	c_3	b_2	a_2	d_2	c_2	b_1	a_1	d_1	c_1
c_1	c_3	d_3	a_3	b_3	c_2	d_2	a_2	b_2	c_1	d_1	a_1	b_1
d_1	d_3	c_3	b_3	a_3	d_2	c_2	b_2	a_2	d_1	c_1	b_1	a_1
a_2	a_2	b_2	c_2	d_2	a_1	b_1	c_1	d_1	a_3	b_3	c_3	d_3
b_2	b_2	a_2	d_2	c_2	b_1	a_1	d_1	c_1	b_3	a_3	d_3	c_3
c_2	c_2	d_2	a_2	b_2	c_1	d_1	a_1	b_1	c_3	d_3	a_3	b_3
d_2	d_2	c_2	b_2	a_2	d_1	c_1	b_1	a_1	d_3	c_3	b_3	a_3
a_3	a_1	b_1	c_1	d_1	a_3	b_3	c_3	d_3	a_2	b_2	c_2	d_2
b_3	b_1	a_1	d_1	c_1	b_3	a_3	d_3	c_3	b_2	a_2	d_2	c_2
c_3	c_1	d_1	a_1	b_1	c_3	d_3	a_3	b_3	c_2	d_2	a_2	b_2
d_3	d_1	c_1	b_1	a_1	d_3	c_3	b_3	a_3	d_2	c_2	b_2	a_2

Notemos por $*$ *a la operación* 1*-bloque inducida por* $(\mathcal{A}, \bullet)$ *sobre* $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$*. Sea* $\Lambda \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ *el* subshift *determinado por el grafo de la Figura II.1. Se tiene que* $(\Lambda, *)$ *es un casi-grupo* shift *irreducible.*

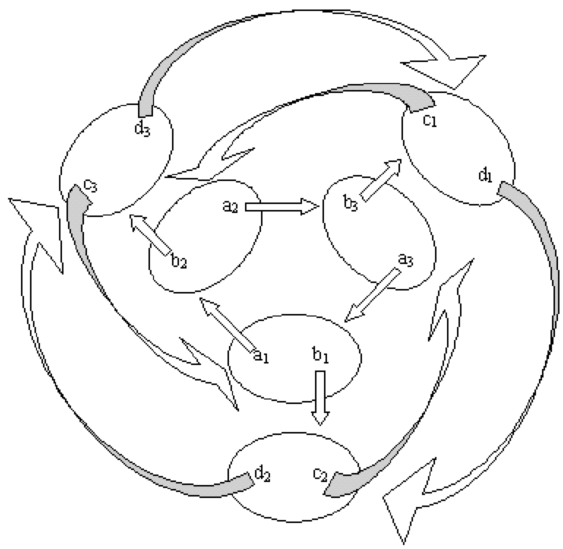

Figure II.1: Grafo que genera la cadena de Markov topológica Λ.

Usando el algoritmo desarrollado en la demostración del Teorema II.2.33, obtenemos que $(\Lambda, *)$ *es topológicamente conjugado e isomorfo a* $(\mathbb{F} \times \mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}, \otimes)$*, donde:* $(\mathbb{Z}_2, +)$ *es el grupo cíclico;* $\mathbb{F} \subset \{u, v, w\}^{\mathbb{Z}}$ *es el* shift *finito que permite solamente las pasajes* $u \to v \to w \to u$ *y sobre el cual está definida la única operación* 1*-bloque de casi-grupo* $\tilde{*}$ *tal que para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{F}$ *se verifica* $\mathbf{x} \tilde{*} \sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$*; y la operación* $\otimes$ *está definida para todo* $(u_i, x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (v_i, y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F} \times \mathbb{Z}_2^Z$ *por*

$$(u_i, x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \otimes (v_i, y_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (u_i \tilde{*} v_i, x_i + y_i)_{i \in \mathbb{Z}}.$$

II.2 Artículo

A continuación reproducimos el artículo *Topological Quasi-Group Shifts* publicado en *Discrete and Continuous Dynamical Systems*.

II.2.1 Introduction

One of the main questions concerning symbolic dynamics and algebraic structures was asked by R. Bowen: characterize group shifts, that is shifts supporting a group structure so that the shift map is an automorphism. This question was answered by B. Kitchens [9], who showed that any group shift is conjugated to the product of a full shift with a finite set. A more general case was studied by N.T. Sindhushayana, B. Marcus and M. Trott [26], who proved the analogous result for a homogeneous shift, that is a shift space X on the alphabet $\mathcal{A}$ for which there exist a group $P(\mathcal{A})$ of permutations of $\mathcal{A}$ and a group shift $Y \subseteq P(\mathcal{A})^{\mathbb{Z}}$, such that X is invariant under the action of any element of Y.

This work concentrates on quasigroups, often called cancellation semi-groups, thus with left and right cancellable operations. In §II.2.3 we present sufficient and necessary conditions to a compact zero-dimensional quasi-group $(X, *)$, where is defined an expansive automorphism $T : X \to X$, to be conjugated and isomorphic to a Markov shift with a 1-block operation. Furthermore, we give examples of zero-dimensional quasigroups which verify such conditions. These are quasi-group versions of results of [9], and their proofs use a quasi-group version of compact zero-dimensional groups ([23],Theorem 16, pg.77).

We will show that the unique shift spaces which can support a 1-block quasi-group operation are Markov shifts. So, §II.2.4 is dedicated to study the case when Λ is a Markov shift and $*$ is a 1-block operation. There, we characterize completely its structure by supplying a conjugacy with a product of a finite quasigroup with a full shift.

In the last section we use amalgamations and state splittings operations ([9],[1] and [28]), to characterize any isomorphism between two quasi-group shifts as in Kitchens [9].

II.2.2 Background

Let $\mathcal{A}$ be a finite alphabet and $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ be the *two-sided full shift* endowed with the product topology (it is a Hausdorff compact space) . Let $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ be a *Shift space*, that is a closed shift-invariant set, and denote by $L_\Lambda \subseteq \mathcal{A}$ the alphabet used by Λ.

Let $\mathcal{W}(\Lambda, n)$ be the set of all words or blocks with length n which are allowed in Λ (often we simply write $\mathcal{W}(n)$ instead of $\mathcal{W}(\Lambda, n)$) . Given $u = [u_1, \ldots, u_n] \in \mathcal{W}(\Lambda, n)$, we write $\mathcal{F}(\Lambda, u)$, or simply $\mathcal{F}(u)$, the follower set of u:

$$\mathcal{F}(\Lambda, u) = \{b \in \mathcal{A} : [u_1, \ldots, u_n, b] \in \mathcal{W}(\Lambda, n+1)\} .$$

In the same way, we define $\mathcal{P}(\Lambda, u)$, or simply $\mathcal{P}(u)$, the set of predecessors of u.

For $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$, $m \leq n$, we denote $\mathbf{x}[m, n] := [x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n] \in \mathcal{W}(n-m+1)$.

Let σ_Λ be the *shift map* defined on Λ, when the context is clear we simply put σ instead of σ_Λ.

We say that Λ is a *shift of finite type* (SFT) if there exists $N \geq 0$ such that for any $\mathbf{x} \in \Lambda$ and for all $n \geq N$ we have $\mathcal{F}(\mathbf{x}[-n, 0]) = \mathcal{F}(\mathbf{x}[-N, 0])$. In this case we refer to Λ as a $(N+1)$-step SFT.

If $\mathbf{A}$ is a transition matrix on the alphabet $\mathcal{A}$, denote by $\Sigma_{\mathbf{A}} := \left\{\mathbf{x} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \quad A_{x_i x_{i+1}} = 1\right\}$ the *two sided Markov shift* and by $L_{\mathbf{A}}$ the alphabet used by $\Sigma_{\mathbf{A}}$. Without lost of generality, we can assume that all rows and columns of $\mathbf{A}$ are not null, what is equivalent to say that $L_{\mathbf{A}} = \mathcal{A}$. A Markov shift is a 1-step SFT.

Let G be a set and $*$ a binary operation on G. We say that $(G, *)$ is a *quasigroup* if $*$ is left and right cancellable:

$$\forall a, b, c \in G, \quad a * b = a * c \quad (or \quad b * a = c * a) \Longleftrightarrow b = c$$

If, in addition, G is a topological space and $*$ is continuous with respect to topology of G, we say that $(G, *)$ is a *topological quasigroup*. When the context is clear, for $a, b \in (G, *)$, we write ab instead of $a * b$.

A partition $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ of G is said to be compatible with $*$ if defining $U_i * U_j := \{a * b \in G : \quad a \in U_i, b \in U_j\}$, so for all $i, j \in I$ there exists $k \in I$ such that $U_i * U_j = U_k$, which is equivalent to say $(\mathcal{U}, *)$ is also a quasigroup.

Suppose that $(\Lambda, *)$ is a topological quasigroup. Then, the shift map is a continuous isomorphism if and only if $*$ is given by a $(\ell + r + 1)$-block local rule, i.e., there exists $\ell, r \geq 0$ and $\rho : \mathcal{W}(\ell + r + 1) \times \mathcal{W}(\ell + r + 1) \to \mathcal{A}$, such that

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda, \forall j \in \mathbb{Z}, (x * y)_j = \rho(\mathbf{x}[j - \ell, j + r], \mathbf{y}[j - \ell, j + r]).$$

In this case, we say that ℓ is the memory and r the anticipation of $*$. When $\ell = r = 0$, $*$ is a 1-block operation.

(X, T) is a *topological dynamical system* if X is a compact space and $T : X \to X$ a homeomorphism. If there exists $x \in X$, such that $\{T^n(x) : n \geq 0\}$ is dense in X, (X, T) is said to be *transitive* or *irreducible*. Two topological dynamical systems (X, T) and (Y, S) are *topologically conjugated* if and only if there exists a homeomorphism $\zeta : X \to Y$, such that $\zeta \circ T = S \circ \zeta$.

If $(X, *)$ is a topological quasigroup and (X, T) a topological dynamical system, such that $T : X \to X$ is an automorphism for $*$, we will denote it by $(X, *, T)$.

We will say that $(X, *, T)$ and $(Y, *, S)$ are isomorphic if and only if there exists $\zeta : X \to Y$, which is both a topological conjugation between (X, T) and (Y, S), and an isomorphism between $(X, *)$ and $(Y, *)$.

If (X, T) is a topological dynamical system, then its topological entropy [27] will be denoted by $\mathbf{h}(T)$. When we refer to the entropy of a shift $(\Lambda, \sigma_\Lambda)$, we will write $\mathbf{h}(\Lambda)$.

II.2.3 Expansive automorphisms on zero-dimensional quasi-groups

In [9] Kitchens proved that if $(X, \star)$ is a topological group and $T : X \to X$ is an automorphism, such that:

(H1) X is compact (Hausdorff), zero-dimensional and has a numerable topological basis, that is, each element $\mathbf{a} \in X$ has a clopen fundamental neighborhood $\{V_n\}_{n\geq 1}$:

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots \qquad \text{, and} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{\mathbf{a}\} .$$

(H2) T is an expansive automorphism;

then,

- $(X, \star, T)$ is isomorphic by a 1-block code to $\left(\mathbb{F} \times \Sigma_n, \otimes, \sigma_{\mathbb{F}} \times \sigma_{\Sigma_n}\right)$, where $\mathbb{F}$ is a finite group with 1-block operation; Σ_n is a full n shift; and $\otimes$ is a k-block operation, with memory 0 and anticipation $k-1$.
- If $\mathbf{h}(T) = 0$, then $\Sigma_n = \{a\}$, that is, the full shift is trivial.
- If T is irreducible, then $\mathbb{F} = \{e\}$, that is, $\mathbb{F}$ is trivial.

Recall that expansivity means that *there exists $\mathcal{U}$, a partition of X by clopen sets (which is finite since X is compact), such that $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that $T^n(\mathbf{x})$ and $T^n(\mathbf{y})$ belong to distinct sets of $\mathcal{U}$.*

Our aim is to extend the previous result to the case when $(X, \star)$ is a topological quasi-group. Now, since a quasigroup has fewer assumptions about its structure, we need some additional hypotheses on $(X, \star)$. In particular, it is reasonable to assume the following property:

(H3) $\forall \mathbf{x} \in X$: $\mathbf{x} \star X = X \star \mathbf{x} = X$.

(H3) is equivalent to: $\forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$, $\exists \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in X$, such that $\mathbf{x_1} \star \mathbf{y} = \mathbf{z}$ and $\mathbf{y} \star \mathbf{x_2} = \mathbf{z}$. Furthermore, since $\star$ is a quasigroup, the elements $\mathbf{x_1}$ and $\mathbf{x_2}$ are unique. Notice that if $(X, \star)$ is a finite quasigroup, then (H3) holds.

Under (H3) we can define on X the following quasi-group operations $\tilde{\star}$ and $\hat{\star}$:

$$\mathbf{x} \tilde{\star} \mathbf{y} = \mathbf{z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{z} \star \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

and

$$\mathbf{x} \hat{\star} \mathbf{y} = \mathbf{z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} \star \mathbf{z} = \mathbf{y}$$

Also, for any $\mathbf{a} \in X$, we can define the functions $f_{\mathbf{a}} : X \to X$ and $f^{\mathbf{a}} : X \to X$ by $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \star \mathbf{x}$ and $f^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \star \mathbf{a}$. In the same way we define $\tilde{f}_{\mathbf{a}}$ and $\tilde{f}^{\mathbf{a}}$, using the operation $\tilde{\star}$, and the functions $\hat{f}_{\mathbf{a}}$ and $\hat{f}^{\mathbf{a}}$, using the operation $\hat{\star}$. It is easy to check that all of these functions are homeomorphisms.

We recall the identity element plays a fundamental role in the study of zero-dimensional groups (see [9], and [23],Theorem 16, pg.77). In the case of zero-dimensional quasi-groups we will need the hypothesis (H3) to define an equivalent notion of identity and inverse elements:

Definition II.2.1. *For an arbritarily fixed element* $\mathbf{e} \in X$*, given* $\mathbf{a} \in X$ *we define* $\mathbf{a}^-$ *and* $\mathbf{a}^+$ *as the unique elements in* X *(which there exist due (H3)), such that* $\mathbf{a}^- \star \mathbf{a} = \mathbf{e}$ *and* $\mathbf{a} \star \mathbf{a}^+ = \mathbf{e}$*. We say* $\mathbf{a}^-$ *and* $\mathbf{a}^+$ *are respectively the left and right inverses of* $\mathbf{a}$ *with respect to* $\mathbf{e}$*.*

Notice that $\mathbf{a}^- = (f^{\mathbf{a}})^{-1}(\mathbf{e}) = \tilde{f}_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})$ and $\mathbf{a}^+ = {f_{\mathbf{a}}}^{-1}(\mathbf{e}) = \hat{f}^{\mathbf{e}}(\mathbf{a})$. Moreover, we have that $(\mathbf{a}^-)^+ = (\mathbf{a}^+)^- = \mathbf{a}$ and the maps $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^-$ and $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^+$ are homeomorphisms.

In order to reach our goal, some additional hypotheses over $(X, \star)$ will be needed.

II.2.3.1 Expansive automorphisms

Assume that hypotheses (H1) and (H2) hold for $(X, \star, T)$. We shall prove that there exists a quasi-group shift $(\Lambda, *)$ such that $(X, \star, T)$ is isomorphic to $(\Lambda, *, \sigma)$.

Lemma II.2.2. *Let* $(X, \star, T)$ *as above. Then* $(X, \star, T)$ *is isomorphic to* $(\Lambda, *, \sigma)$ *, where* Λ *is a shift and* $*$ *is a* k*-block operation, for some* $k \geq 1$*.*

Proof. From expansibility and 0-dimensionality there exists a partition $\mathcal{U}$ of X, a shift space $\Lambda \subseteq \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$, and a homeomorphism $\zeta : X \to \Lambda$, which is a topological conjugacy between (X, T) and $(\Lambda, \sigma_\Lambda)$.

In Λ, we define the quasi-group operation $*$, given by:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Lambda, \qquad \mathbf{a} * \mathbf{b} := \zeta\big(\zeta^{-1}(\mathbf{a}) \star \zeta^{-1}(\mathbf{b})\big)$$

We have that $(\Lambda, *)$ is isomorphic by ζ to $(X, \star)$. Furthermore, since σ_Λ is an automorphism for $*$, then $*$ is k-block, for some $k \geq 1$.

$\square$

In particular we will be interested in the case $*$ being a 1-block operation. From the proof of Lemma II.2.2 we deduce that $*$ is a 1-block operation if and only if the partition $\mathcal{U}$ is compatible with $\star$. For instance, if X is a shift space with a 1-block operation $\star$, then any partition $\mathcal{U}$ of X by cylinders defined by the same coordinates is compatible with $\star$ (which means $(X, \star, T)$ is isomorphic to $(\Lambda, *, \sigma)$, where $*$ is 1-block).

The natural problem consists in finding such partitions compatible with the operation for any topological quasigroup in which (H1), (H2) (and additionally (H3)) hold. This problem remain open. Therefore, we can ask for the kind of quasi-group structures allowing to obtain analogous results.

Suppose $(X, \star, T)$ is a topological quasigroup, verifying (H1), (H2), and such that the following properties hold:

(h1) $(X, \star)$ is commutative (that is $f_{\mathbf{a}} = f^{\mathbf{a}}$);

(h2) $\star$ has period 2, this means, $\forall \mathbf{a} \in X$, $f_{\mathbf{a}}$ has period 2;

(h3) The aforementioned element $\mathbf{e} \in X$ has a fundamental neighborhood system $(V_n)_{n \geq 1}$, such that

$$\forall n \geq 1, \qquad \mathbf{e}V_n \subseteq V_n$$

(h4) $(X, \star)$ has the medial property:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in X, \qquad (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star (\mathbf{c} \star \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \star \mathbf{c}) \star (\mathbf{b} \star \mathbf{d}).$$

Notice that [(h1) and (h2)] is equivalent to [$\star$, $\tilde{\star}$ and $\hat{\star}$ are identical]. Thus, for all $\mathbf{a} \in X$: $\mathbf{a}^- = \mathbf{a}^+$. Moreover, these two hypotheses imply that (H3) holds and that the hypothesis (h3) is equivalent to $\forall n \geq 1$, $\mathbf{e}V_n = V_n\mathbf{e} = V_n$.

Furthermore, from (h3), $\mathbf{e} \star \mathbf{e} = \mathbf{e}$, which implies $\mathbf{e}^- = \mathbf{e} = \mathbf{e}^+$. We notice $\mathbf{e}$ is *not* an identity element, since in general $\mathbf{e} \star \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \star \mathbf{e}$.

Hence, by using (h4), we deduce that for all $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, the left inverse with respect to $\mathbf{e}$ verifies:

$$(\mathbf{a} \star \mathbf{b})^- = (\mathbf{a}^- \star \mathbf{b}^-) \tag{II.1}$$

Example II.2.3. *Let* $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \times \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *and let a 2-block operation* $\star$ *with local rule* $\rho : \mathcal{W}(X,2) \times \mathcal{W}(X,2) \to L_X$ *be defined for* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}(X,2)$*,* $\mathbf{x} = [(x_0^1, x_0^2), (x_1^1, x_1^2)]$ *and* $\mathbf{y} = [(y_0^1, y_0^2), (y_1^1, y_1^2)]$*, by:*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} (x_0^1 + y_0^1, x_0^2 + y_0^2 + 1) & if\ x_0^1 = x_1^1,\ y_0^1 = y_1^1 \\ \\ (x_0^1 + y_0^1, x_0^2 + y_0^2) & otherwise \end{cases},$$

where $+$ *denote the sum* $mod\ 2$*.*

Then, $(X, \star)$ *verifies all of the previous hypotheses, but it is not a group.*

The next result is a quasi-group version of a construction done on topological zero-dimensional groups ([23],Theorem 16, pg.77).

Theorem II.2.4. *Let* $(X, \star)$ *be a topological quasigroup, such that (H1), (h1), (h2), (h3), (h4) hold. Then, given a neighborhood* U *of* $\mathbf{e}$*, there exists a clopen neighborhood* $Q \subseteq U$ *of* $\mathbf{e}$*, such that* $\mathcal{Q} := \{\mathbf{a}Q : \mathbf{a} \in X\}$ *is a finite partition of* X *compatible with* $\star$*.*

Proof.

step 1 Let $(V_n)_{n\geq 1}$ be the neighborhood system over $\mathbf{e}$, given by (h3). We can suppose

$V_{n+1} \subseteq V_n, \forall n \geq 1.$

Let $M \subseteq X$ be a compact subset such that $\mathbf{e} \in M$. We say that $\mathbf{a} \in M$ can be connected to $\mathbf{e}$ over M by a chain of order n, if and only if there exists a sequence $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e},\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k = \mathbf{a} \in M$, such that

$$\mathbf{a}_i^{-}\mathbf{a}_{i+1} \in V_n, \qquad 1 \leq i \leq k-1$$

Let M_n be the set of all points in M, which can be connected to $\mathbf{e}$ over M by a chain of order n. It is straightforward to see that $M_{n+1} \subseteq M_n$. Moreover, every point in M_n can be connected to $\mathbf{e}$ over M_n by a chain of order n. In fact, if $\mathbf{a} \in M_n$, then there exist $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e},\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k = \mathbf{a} \in M$ such that $\mathbf{a}_i^{-}\mathbf{a}_{i+1} \in V_n$, $1 \leq i \leq k-1$. Hence, for any $j = 1, \ldots, k$, $\mathbf{a}_j$ can be connected to $\mathbf{e}$ over M by a chain of order n. Therefore, for any $j = 1, \ldots, k$, $\mathbf{a}_j \in M_n$. Thus, $\mathbf{a}$ can be connected to $\mathbf{e}$ over M_n by a chain of order n.

step 2 We will show that M_n is a relative open set of $\tau_M := \{A \cap M : A \subseteq X \textit{ is open}\}$ the induced topology in M.

Given $\mathbf{a} \in M_n$, we search for a relative open set of M, neighborhood of $\mathbf{a}$, that is a subset of M_n.

Let $V' := f_{\mathbf{a}^-}^{-1}(V_n) \cap M$, which is a relative open set of M, since the continuity of $f_{\mathbf{a}^-}$

implies that $f_{\mathbf{a}^-}^{-1}(V_n)$ is open. Moreover, $f_{\mathbf{a}^-}(f_{\mathbf{a}^-}^{-1}(V_n)) = \mathbf{a}^- \star f_{\mathbf{a}^-}^{-1}(V_n) = V_n$, which implies that $\mathbf{a} \in f_{\mathbf{a}^-}^{-1}(V_n)$. Now, let $\mathbf{b} \in V'$, and $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e},\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k = \mathbf{a} \in M$ be a chain of order n connecting $\mathbf{a}$ to $\mathbf{e}$ over M. Since $\mathbf{b} \in V'$, it is direct to see that $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e},\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k = \mathbf{a},\ \mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{b} \in M$ is a chain of order n connecting $\mathbf{b}$ to $\mathbf{e}$ over M, because $\mathbf{a}_k^- \mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}^-\mathbf{b} = f_{\mathbf{a}^-}(\mathbf{b}) \in V_n$. Thus, $\mathbf{b} \in M_n$, so $V' \subseteq M_n$.

step 3 We need to prove that M_n is a closed set of X or equivalently $M_n^c := X \setminus M_n$ is open. Since $M_n^c = M \setminus M_n \cup M^c$, and M^c is open, it is sufficient to show that $M \setminus M_n$ is open.

Let $\mathbf{a} \in M \setminus M_n$, put $V' := (f^{\mathbf{a}})^{-1}(V_n)$, which is an open set since $f^{\mathbf{a}}$ is continuous. Notice that $f^{\mathbf{a}}(V') = V' \star \mathbf{a} = V_n$ and, since $\mathbf{e} \in V_n$, it implies that $\mathbf{a}^- \in V'$. Let $V'' := (V')^+ := \left\{\mathbf{v}'' \in X : \mathbf{v}'' = \mathbf{v}'^+,\ \mathbf{v}' \in V'\right\}$, which is an open set containing $\mathbf{a}$ because $\mathbf{a}^- \in V'$, and $(\mathbf{a}^-)^+ = \mathbf{a}$.

The set V'' cannot intersect M_n. In fact, if the contrary $M_n \cap V'' \neq \emptyset$ holds, then it is possible to take $\mathbf{b} \in M_n \cap V''$ such that $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e},\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k = \mathbf{b} \in M$ is a chain of order n which connects $\mathbf{b}$ to $\mathbf{e}$ over M. But $\mathbf{b} \in V''$, so $\mathbf{b}^- \in V'$ and then $\mathbf{b}^-\mathbf{a} \in V_n$. Since $\mathbf{a} \in M$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e},\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k = \mathbf{b},\ \mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a} \in M$ is a chain of order n which connects $\mathbf{a}$ to $\mathbf{e}$ over M. Hence, $\mathbf{a} \in M_n$, a contradiction with the assumption $\mathbf{a} \in M \setminus M_n$.

Since $V'' \subseteq M \setminus M_n$ is an open neighborhood of $\mathbf{a}$, we deduce that $M \setminus M_n$ is an open set.

step 4 Let $M^* := \bigcap_{n\geq 1} M_n$. Since $\{M_n\}_{n\geq 1}$ is a collection of closed sets and $\forall n \geq 1$, $\mathbf{e} \in M_n$, we have that $\mathbf{e} \in M^*$.

Let us show that $M^* = \{\mathbf{e}\}$. It is sufficient to show that $\forall \mathbf{b} \in M$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{e}$, there exists $t \geq 1$, such that $\mathbf{b} \notin M_t$, which implies $\mathbf{b} \notin M^*$.

In fact, given $\mathbf{b} \in M$, and since M is a closed set and X is a zero-dimensional Hausdorff set, we can write $M = A \cup B$, a disjoint union of closed sets where $\mathbf{e} \in A$ and $\mathbf{b} \in B$. Since A and B are compacta, we have that $A^- \star B$ is also compact, so it is a closed set. Furthermore, $\mathbf{e} \notin A^- \star B$ because A and B are disjoint. Then, we can take V_t a neighborhood of $\mathbf{e}$, such that $V_t \cap (A^- \star B) = \emptyset$.

We have that $\mathbf{b} \notin M_t$. In fact, if the contrary $\mathbf{b} \in M_t$ holds, there would be a chain of order t connecting $\mathbf{b}$ to $\mathbf{e}$ over M

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e},\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k = \mathbf{b} \in M, \qquad \mathbf{a}_i^- \mathbf{a}_{i+1} \in V_t, \qquad 1 \leq i \leq k-1$$

This would imply that there exists j such that $\mathbf{a}_j \in A$ and $\mathbf{a}_{j+1} \in B$, and so $\mathbf{a}_j^- \mathbf{a}_{j+1} \in V_t \cap (A^- \star B)$.

step 5 Let $U \subseteq X$ be a neighborhood of $\mathbf{e}$. Since $\star$ is continuous, there exists $V \subseteq U$, open neighborhood of $\mathbf{e}$, such that $V \star V \subseteq U$.

We put $M := \overline{U}$ (the closure of U) and since $M^* = \{\mathbf{e}\}$, there exists $t \geq 1$, such that $M_t \subseteq V$. In fact, if there did not exist such t, then for each $n \geq 1$ the set $M_n \cap V^c$

would be closed and not empty. Then, $\bigcap_{n\geq 1}(M_n \cap V^c)$ would be not empty, what is a contradiction with $M^* = \{\mathbf{e}\}$.

M_t is a relative open set of M, so there exists W an open set of X, such that $M_t = M \cap W = \overline{U} \cap W$. Since $M_t \subseteq V \subseteq U$, we have that $M_t = M_t \cap W \subseteq V \cap W \subseteq U \cap W \subseteq \overline{U} \cap W = M_t$, that is, $M_t = V \cap W$ is an intersection of two open sets, so itself is an open set.

Let us show that $M_t \star M_t = M_t$. By construction, $M_t \star M_t \subseteq V \star V \subseteq M$. If $\mathbf{c} \in M_t \star M_t$, then $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$, with $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M_t$, and there exist two chains of order t, $(\mathbf{a}_i)_{1\leq i\leq k}$ and $(\mathbf{b}_j)_{1\leq j\leq m}$ which connect respectively $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ to $\mathbf{e}$ over M_t.

Thus, we can take the chain $(\mathbf{c}_i)_{1\leq i\leq k+m-1}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i\mathbf{e} && ,\ \ if\ 1 \leq i \leq k \\ &\mathbf{c}_i = \mathbf{ab}_{i-k+1} && ,\ \ if\ k+1 \leq i \leq k+m-1 \end{aligned}$$

Using the medial property and $\mathbf{e}V_t = V_t\mathbf{e} = V_t$ we get that for all $i \in \{1, \ldots,\ k+m-1\}$ follows $\mathbf{c}_i^- \mathbf{c}_{i+1} \in V_t$. In fact,

$$\mathbf{c}_i^- \mathbf{c}_{i+1} = \begin{cases} (\mathbf{a}_i^- \mathbf{e})(\mathbf{a}_{i+1}\mathbf{e}) = (\mathbf{a}_i^- \mathbf{a}_{i+1})(\mathbf{ee}) \in V_t\mathbf{e} & ,\ \ if\ 1 \leq i < k \\ (\mathbf{a}^- \mathbf{e})(\mathbf{ae}) = (\mathbf{a}^- \mathbf{a})(\mathbf{ee}) \in V_t & ,\ \ if\ i = k \\ (\mathbf{a}^- \mathbf{b}_{i-k+1}^-)(\mathbf{ab}_{i-k+2}) = (\mathbf{a}^- \mathbf{a})(\mathbf{b}_{i-k+1}^- \mathbf{b}_{i-k+2}) \in \mathbf{e}V_t & ,\ \ otherwise \end{cases}$$

Then, this is a chain of order t connecting $\mathbf{c}$ to $\mathbf{e}$ over M, and then $\mathbf{c} \in M_t$.

We have proved $M_t \star M_t \subseteq M_t$. Since $\star$, $\tilde{\star}$ and $\hat{\star}$ are identical, it follows that

$$M_t \star M_t = M_t \qquad \text{(which implies } M_t^- = M_t = M_t^+\text{)} \tag{II.2}$$

step 6 Let $Q := M_t$, we will show that $\mathcal{Q} := \{\mathbf{a}Q : \mathbf{a} \in X\}$ is a partition of X compatible with $\star$. It follows straightforwardly from hypothesis (H3) that $\mathcal{Q}$ is an open cover of X and, by medial property, $\mathbf{a}Q \star \mathbf{b}Q = (\mathbf{a} \star \mathbf{b})Q$. Then we only need to prove that $\mathcal{Q}$ is a partition of X. To do this, we introduce the following relation over X:

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{a}^{-}\mathbf{b} \in Q \tag{II.3}$$

We claim that $\sim$ is an equivalence relation. Clearly $\sim$ is reflexive. To prove that $\sim$ is symmetric and transitive, we will prove that

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{a}Q = \mathbf{b}Q \tag{II.4}$$

($\Longrightarrow$) In fact, $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ is equivalent to saying that $\mathbf{a}^- \star \mathbf{b} \in Q$. So, for all $\mathbf{q} \in Q$, let $\mathbf{x} \in X$ be such that $\mathbf{a} \star \mathbf{q} = \mathbf{b} \star \mathbf{x}$. By multiplying this equation by the left by

$(\mathbf{a}^- \star \mathbf{q}^-)$, and by using the medial property, we get

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}^- \star \mathbf{q}^-) \star (\mathbf{a} \star \mathbf{q}) &= (\mathbf{a}^- \star \mathbf{q}^-) \star (\mathbf{b} \star \mathbf{x}),\\ (\mathbf{a}^- \star \mathbf{a}) \star (\mathbf{q}^- \star \mathbf{q}) &= (\mathbf{a}^- \star \mathbf{b}) \star (\mathbf{q}^- \star \mathbf{x}),\\ \mathbf{e} &= (\mathbf{a}^- \star \mathbf{b}) \star (\mathbf{q}^- \star \mathbf{x}).\end{aligned}$$

Since $(\mathbf{a}^- \star \mathbf{b}) \in Q$, we deduce that $(\mathbf{q}^- \star \mathbf{x}) \in Q$ and so $\mathbf{x} \in Q$. Thus, we can conclude that $\mathbf{a}Q \subseteq \mathbf{b}Q$. By symmetric reasoning $\mathbf{a}Q \supseteq \mathbf{b}Q$; hence $\mathbf{a}Q = \mathbf{b}Q$.

($\Longleftarrow$) Conversely, if $\mathbf{a}Q = \mathbf{b}Q$, then for all $\mathbf{q}_1 \in Q$, there exists $\mathbf{q}_2 \in Q$, such that $\mathbf{a} \star \mathbf{q}_1 = \mathbf{b} \star \mathbf{q}_2$. Again, multiplying this equation by the left by $(\mathbf{a}^- \star \mathbf{q}_1^-)$ we get

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}^- \star \mathbf{q}_1^-) \star (\mathbf{a} \star \mathbf{q}_1) &= (\mathbf{a}^- \star \mathbf{q}_1^-) \star (\mathbf{b} \star \mathbf{q}_2),\\ (\mathbf{a}^- \star \mathbf{a}) \star (\mathbf{q}_1^- \star \mathbf{q}_1) &= (\mathbf{a}^- \star \mathbf{b}) \star (\mathbf{q}_1^- \star \mathbf{q}_2),\\ \mathbf{e} &= (\mathbf{a}^- \star \mathbf{b}) \star (\mathbf{q}_1^- \star \mathbf{q}_2).\end{aligned}$$

Even $(\mathbf{q}_1^- \star \mathbf{q}_2) \in Q$, we deduce that $\mathbf{a}^- \star \mathbf{b} \in Q$.

It is not hard to see that $\mathcal{Q} = \{\mathbf{a}Q : \mathbf{a} \in X\} = \{[\mathbf{b}] : \mathbf{b} \in X\}$, where $[\mathbf{b}] := \{\mathbf{c} \in X : \mathbf{c} \sim \mathbf{b}\}$ is the equivalence class of $\mathbf{b}$. Then, $\mathcal{Q}$ is a partition of X into equivalence classes. Moreover, since X is compact, $\mathcal{Q}$ is finite.

□

Using last theorem, the following result has a proof similar to the one of Proposition 2 at [9].

Proposition II.2.5. *Let $(X, \star, T)$ be a topological quasigroup, such that all hypotheses of Theorem II.2.4 hold, and $T : X \to X$ is an expansive automorphism (that is, (H2) holds). Then $(X, \star, T)$ is isomorphic to $(\Lambda, *, \sigma)$, where Λ is a shift and $*$ is a 1-block operation.*

Proof. Let $\mathbf{e} \in X$ be the element such that $\mathbf{e} \star \mathbf{e} = \mathbf{e}$ (this element there exists due to (h3)). Since (X, T) is an expansive dynamical system on a compact and zero-dimensional space, so there exists $V \subset X$ a neighborhood of $\mathbf{e}$ such that $\mathbf{x} \mapsto (T^n\mathbf{x} \star V)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a topological conjugacy between (X, T) and (Λ, σ), where Λ is a shift space on the alphabet $\mathcal{A} := \{\mathbf{a} \star V : \mathbf{a} \in X\}$. From Theorem II.2.4, we can consider without loss of generality $\mathcal{A}$ being a finite partition of X compatible with $\star$. Hence, the result follows.

□

Remark II.2.6. *The hypotheses (h1)-(h4) are strongly restrictive. In fact, for a finite quasigroup $(X, \star)$, Dénes-Keedwell ([4], Theorem 2.2.2, p.70) showed that the medial property implies the quasi-group operation comes from a Abelian group operation, that* *is, there exist an Abelian group operation $+$ on X, two automorphisms η and ρ on X, and $c \in X$, such that $a \star b = \eta(a) + \rho(b) + c$ for all $a, b \in X$. For our case of zero-dimensional quasigroups, Theorem II.2.4, and propositions II.2.5 and II.2.7, allow us to get an analogous result whenever there exists an expansive automorphism (or endomorphism) on X.*

II.2.3.2 1-block quasi-group shifts

Let $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ be a shift space. Suppose that $(\Lambda, *)$ is a quasigroup where $*$ is a 1-block operation. In particular, since $*$ is 1-block, σ is an automorphism over $(\Lambda, *)$.

Proposition II.2.7. *If $(\Lambda, *)$ is as above and in addition (H3) holds, then:*

(i) *There exists an operation $\bullet$ over L_Λ, such that $(L_\Lambda, \bullet)$ is a quasigroup which induces $(\Lambda, *)$;*

(ii) *$\forall k \geq 1$, $\forall g, h \in \mathcal{W}(\Lambda, k)$, we have $|\mathcal{F}(g)| = |\mathcal{F}(h)|$. Furthermore, if $a \in \mathcal{F}(g)$, then $a\mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(g \bullet h) = \mathcal{F}(g) \bullet \mathcal{F}(h)$ and $F(h)a = \mathcal{F}(h \bullet g) = \mathcal{F}(h) \bullet \mathcal{F}(g)$;*

(iii) *Λ is a SFT. Moreover $(\Lambda, *, \sigma)$ is isomorphic to a Markov shift with a 1-block operation.*

Proof.

(i) Since $*$ is a 1-block operation, there exists $\rho : L_\Lambda \times L_\Lambda \to L_\Lambda$ a local rule of $*$. For $a, b \in L_\Lambda$, put $a \bullet b := \rho(a, b)$.

Let us show that $(L_\Lambda, \bullet)$ is a quasigroup. Since L_Λ is finite, this property is equivalent to the fact that for all $a, b \in L_\Lambda$ there exist $c, c' \in L_\Lambda$ which are the unique solutions of $c \bullet a = b$ and $a \bullet c' = b$.

In fact, if we take $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Lambda$, such that $y_0 = a$, $z_0 = b$, there exists $\mathbf{x} \in \Lambda$ a unique solution of $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}$. So $x_0 \bullet y_0 = z_0$, which means that $c := x_0$ is solution of $c \bullet a = b$. Since L_Λ is finite, if we fix a, for each b there exists a distinct solution c. So, we can deduce that $\bullet$ is right permutative. Using the same argument we also deduce the left permutativity. Then, $(L_\Lambda, \bullet)$ is a quasigroup.

(ii) The proof of this fact uses similar arguments as in the proofs of Proposition II.2.10 and Claim II.2.11 after.

(iii) Fix $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Lambda$. We have that $L_\Lambda \supseteq \mathcal{F}(\mathbf{u}[0,0]) \supseteq \mathcal{F}(\mathbf{u}[-1,0]) \cdots \supseteq \mathcal{F}(\mathbf{u}[-n,0]) \supseteq \mathcal{F}(\mathbf{u}[-n-1,0]) \neq \emptyset$. Since L_Λ is finite, there exists N, such that $\mathcal{F}(\mathbf{u}[-n,0]) = \mathcal{F}(\mathbf{u}[-N,0])$, for all $n \geq N$.

Furthermore, if $[g_0, \ldots, g_N] \in \mathcal{W}(\Lambda, N+1)$ and $[h_1, \ldots, h_k, g_0, \ldots, g_N] \in \mathcal{W}(\Lambda, N+k+1)$, then $\mathcal{F}([h_1, \ldots, h_k, g_0, \ldots, g_N]) \subseteq \mathcal{F}([g_0, \ldots, g_N])$ and they are both cosets of $\mathcal{F}(\mathbf{u}[-N,0])$ (by part (ii)). Then, $\mathcal{F}([h_1, \ldots, h_k, g_0, \ldots, g_N]) = \mathcal{F}([g_0, \ldots, g_N])$ and we deduce that Λ is a $(N+1)$-step SFT.

To conclude the proof, we define $\Sigma_{\mathbf{A}}$ as the $(N+1)$-block presentation of Λ, and consider the 1-block quasi-group operation induced by Λ.

$\square$

We notice that there is no evidence about existence of quasigroups $(\Lambda, *)$ such that $*$ is a 1-block operation but (H3) does not hold.

The previous result implies that if (H3) holds, then $(\Lambda, *)$ is a subquasigroup of $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *)$. The following proposition reproduce the result of Proposition II.2.7 using the hypothesis that $(\Lambda, *)$ is a subquasigroup:

Proposition II.2.8. *If $(\Lambda, *)$ is a subquasigroup of $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *)$, where $*$ is a 1-block operation, then there exists an operation $\bullet$ over L_Λ, such that $(L_\Lambda, \bullet)$ is a quasigroup which induces $(\Lambda, *)$.*

Proof. From the fact of $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *)$ is quasigroup follows that for any constant sequences $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $\mathbf{a} = (\ldots, a, a, a, \ldots)$ and $\mathbf{b} = (\ldots, b, b, b, \ldots)$, there exist unique $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $\mathbf{c} = (\ldots, c, c, c, \ldots)$ and $\mathbf{c}' = (\ldots, c', c', c', \ldots)$ solutions of the equations

$$\mathbf{a} * \mathbf{c} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}' * \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Hence, denoting the local rule of $*$ as $\bullet$, for any $a, b \in L_\Lambda$ the equations $a \bullet c = b$ and $c' \bullet a = b$ also have unique solutions, which implies $(L_\Lambda, \bullet)$ is quasigroup.

$\square$

II.2.4 Topological 1-block quasi-group Markov shifts

In this section we consider the case of subquasigroups $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *, \sigma) \subseteq (\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *, \sigma)$, where $\Sigma_{\mathbf{A}}$ is a topological Markov shift, and $*$ is a 1-block quasi-group operation. According to the previous section, the operation $*$ over $\Sigma_{\mathbf{A}}$ is canonically induced by a quasi-group operation $\bullet$ over $L_{\mathbf{A}}$, such that for any $a, b, a', b' \in L_{\mathbf{A}}$,

$$a \in \mathcal{F}(b), a' \in \mathcal{F}(b') \Longrightarrow (a \bullet a') \in \mathcal{F}(b \bullet b')$$

and (II.5)

$$a \in \mathcal{P}(b), a' \in \mathcal{P}(b') \Longrightarrow (a \bullet a') \in \mathcal{P}(b \bullet b')$$

II.2.4.1 Elementary properties

Claim II.2.9. *Let $K \subseteq L_{\mathbf{A}}$. Then $\forall g \in L_{\mathbf{A}}$, $|gK| = |Kg| = |K|$.*

Proof. It follows from the bipermutativity of $*$.

□

Proposition II.2.10. *Let $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ be a 1-block quasi-group shift. Then,*

(i) $\forall g, h \in L_{\mathbf{A}}$, $|\mathcal{F}(g)| = |\mathcal{F}(h)|$ *and* $|\mathcal{P}(g)| = |\mathcal{P}(h)|$

(ii) *If $s \in \mathcal{F}(r)$, $s \in \mathcal{P}(t)$, then*

$$s\mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(r \bullet h),\ \mathcal{F}(h)s = \mathcal{F}(h \bullet r),$$

$$s\mathcal{P}(h) = \mathcal{P}(t \bullet h),\ \mathcal{P}(h)s = \mathcal{P}(h \bullet t).$$

Proof.

(i) step 1 We will prove $|F(h)| \leq |F(g)|$.

Since $\bullet$ is bipermutative, $\exists r \in L_{\mathbf{A}}$, such that $r \bullet h = g$. Let $s \in \mathcal{F}(r)$, for all $h' \in \mathcal{F}(h)$ we have $s \bullet h' \in \mathcal{F}(r \bullet h) = \mathcal{F}(g)$. Then,

$$s\mathcal{F}(h) \subseteq \mathcal{F}(g),$$

and from Claim II.2.9, we deduce the inequality.

step 2 We will show $|F(g)| \leq |F(h)|$.

Let f_r be the permutation over $L_{\mathbf{A}}$, defined by $f_r(a) = r \bullet a$. There exists $k \in \mathbb{N}$, such that $f_r^k(h) = h$, so $h = f_r^{k-1}(g)$.

Thus, for $[r, s] \in \mathcal{W}(2)$, $\forall g' \in \mathcal{F}(g)$, we have

$$\underbrace{[r, s] * (\ldots ([r, s] * [g, g']))}_{[r,s] \text{ } appears \text{ } k-1 \text{ } times} = [f_r^{k-1}(g), f_s^{k-1}(g')] = [h, f_s^{k-1}(g')] \in \mathcal{W}(2)$$

Then, $\forall g' \in \mathcal{F}(g)$, we have $f_s^{k-1}(g') \in \mathcal{F}(h)$ and so $f_s^{k-1}(\mathcal{F}(g)) \subseteq \mathcal{F}(h)$. From Claim II.2.9, we have

$$\left| f_s^{k-1}(\mathcal{F}(g)) \right| = \underbrace{|s * (s * (\ldots (s * \mathcal{F}(g))))|}_{s \text{ } appears \text{ } k-1 \text{ } times} = |\mathcal{F}(g)| \leq |\mathcal{F}(h)|$$

We conclude the aimed equality for the follower sets. Using similar arguments we deduce the similar equality for the predecessor sets.

(ii) is straightforward from part (i) and fact (II.5).

$\square$

Claim II.2.11. *For any* $a, b \in L_{\mathbf{A}}$ *we have that* $\mathcal{F}(a) \bullet \mathcal{F}(b) = \mathcal{F}(a \bullet b)$ *and* $\mathcal{P}(a) \bullet \mathcal{P}(b) = \mathcal{P}(a \bullet b)$

Proof.

$$\mathcal{F}(a) \bullet \mathcal{F}(b) = \bigcup_{a' \in \mathcal{F}(a)} a'\mathcal{F}(b) =_{(1)} \bigcup_{a' \in \mathcal{F}(a)} \mathcal{F}(a \bullet b) = \mathcal{F}(a \bullet b),$$

where $=_{(1)}$ follows from part (ii) of Proposition II.2.10.

For the predecessor sets, we use the same argument.

□

Definition II.2.12. *Let* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *and* $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$ *be as before and define*

- $L_{\bar{\mathbf{A}}} := \{\mathcal{F}(a) : a \in L_{\mathbf{A}}\}$
- $L_{\underline{\mathbf{A}}} := \{\mathcal{P}(a) : a \in L_{\mathbf{A}}\}$

Notice that $L_{\bar{\mathbf{A}}}$ and $L_{\underline{\mathbf{A}}}$ are both covers of $L_{\mathbf{A}}$. On $L_{\bar{\mathbf{A}}}$ and $L_{\underline{\mathbf{A}}}$ we consider the operation canonically defined from the operation on $L_{\mathbf{A}}$ which will be also denoted by $\bullet$. The Claim II.2.11 guarantees that $\bullet$ is closed in $L_{\bar{\mathbf{A}}}$ and $L_{\underline{\mathbf{A}}}$.

Proposition II.2.13. $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$ *and* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}, \bullet)$ *are quasi-groups.*

Proof. We will only show the result for $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$, because the case $(L_{\underline{\mathbf{A}}}, \bullet)$ is entirely analogous.

Since $L_{\bar{\mathbf{A}}}$ is finite, to prove that $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$ is right and left cancellable, is equivalent to prove for all $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in L_{\bar{\mathbf{A}}}$, there exist $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \in L_{\bar{\mathbf{A}}}$, that verify $\mathcal{F}_1 \bullet \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_2$ and $\mathcal{F}_j \bullet \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

We have that $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(a)$ and $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(b)$, for some $a, b \in L_{\mathbf{A}}$. By bipermutativity in $L_{\mathbf{A}}$, there exist $x, x' \in L_{\mathbf{A}}$ such that $a \bullet x = b$ and $x' \bullet a = b$. Then, $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}(x)$ and $\mathcal{F}_j := \mathcal{F}(x')$ are the solutions for above equations.

$\square$

Corollary II.2.14. *The Markov shift $\Sigma_{\mathbf{A}}$ has disjoint follower (and predecessor) sets, i.e., $\mathcal{F}(a) \cap \mathcal{F}(b) \neq \emptyset$ if and only if $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(b)$.*

Proof. Suppose $\mathcal{F}(a) \cap \mathcal{F}(b) \neq \emptyset$. Let $r \in \mathcal{F}(a) \cap \mathcal{F}(b)$ and $c \in L_{\mathbf{A}}$. We have

$$\mathcal{F}(a) \bullet \mathcal{F}(c) = \mathcal{F}(a \bullet c) =_{(*)} r\mathcal{F}(c) = \mathcal{F}(b \bullet c) = \mathcal{F}(b) \bullet \mathcal{F}(c),$$

where $=_{(*)}$ is by Proposition II.2.10(ii).

Since $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$ is bipermutative we conclude that $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(b)$.

$\square$

Corollary II.2.15. $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$ *and* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}, \bullet)$ *are isomorphic. In particular, for any $a, b \in L_{\mathbf{A}}$ we have $|\mathcal{F}(a)| = |\mathcal{P}(b)|$.*

Proof. Let $\tau : L_{\bar{\mathbf{A}}} \to L_{\underline{\mathbf{A}}}$ defined by $\tau(\mathcal{F}_1) = \mathcal{P}(b)$, where $b \in \mathcal{F}_1$ is an arbitrary element. Let us show that τ is well defined, i.e., it depends not on the choice of b. In fact,

$$b, b' \in \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(a) \Longleftrightarrow \exists a \in \mathcal{P}(b) \cap \mathcal{P}(b') \Longleftrightarrow \mathcal{P}(b) \cap \mathcal{P}(b') \neq \emptyset \Longleftrightarrow_{(*)} \mathcal{P}(b) = \mathcal{P}(b'),$$

where $(*)$ is by Corollary II.2.14.

Also from above expressions it is direct that τ is one-to-one. On the other hand, is easy to see that τ is onto.

Now, given $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in L_{\bar{\mathbf{A}}}$, let $b_1 \in \mathcal{F}_1$ and $b_2 \in \mathcal{F}_2$. We have that $b_1 \bullet b_2 \in \mathcal{F}_1 \bullet \mathcal{F}_2$ and

$$\tau(\mathcal{F}_1 \bullet \mathcal{F}_2) = \mathcal{P}(b_1 \bullet b_2) = \mathcal{P}(b_1) \bullet \mathcal{P}(b_2) = \tau(\mathcal{F}_1) \bullet \tau(\mathcal{F}_2).$$

To conclude, notice that this isomorphism implies that $|L_{\bar{\mathbf{A}}}| = |L_{\underline{\mathbf{A}}}|$. Since $L_{\bar{\mathbf{A}}}$ and $L_{\underline{\mathbf{A}}}$ are both partitions of $L_{\mathbf{A}}$, each of them containing sets with the same cardinality (Proposition II.2.10), we deduce that $|\mathcal{F}(a)| = |\mathcal{P}(b)|$, $\forall a, b \in L_{\mathbf{A}}$.

$\square$

Example II.2.16. *Suppose that $*$ is a group operation. In this case, if we denote $e \in L_{\mathbf{A}}$ as the identity element, we have that $\mathcal{F}(e) = \mathcal{F}(e) \bullet \mathcal{F}(e)$ and $\mathcal{P}(e) = \mathcal{P}(e) \bullet \mathcal{P}(e)$ which implies that $(\mathcal{F}(e), \bullet)$ and $(\mathcal{P}(e), \bullet)$ are subgroups of $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$. Moreover, since $L_{\bar{\mathbf{A}}}$ and $L_{\underline{\mathbf{A}}}$ are the sets of cosets of these subgroups, and $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$ and $(L_{\underline{\mathbf{A}}}, \bullet)$ are also groups, we conclude that $\mathcal{F}(e)$ and $\mathcal{P}(e)$ are normal subgroups.*

Definition II.2.17. *Given* $a \in L_{\mathbf{A}}$*, let* $\mathcal{F}(r) \in L_{\bar{\mathbf{A}}}$ *and* $\mathcal{P}(t) \in L_{\underline{\mathbf{A}}}$ *be such that* $a \in \mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}(t)$*. We define* $\mathcal{H}_a := \mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}(t)$ *and denote* $L_{\hat{\mathbf{A}}} := \{\mathcal{H}_a : a \in L_{\mathbf{A}}\}$*.*

Notice that $\mathcal{H}_a$ is well defined because for each $a \in L_{\mathbf{A}}$ there exists a unique $\mathcal{F}(r) \in L_{\bar{\mathbf{A}}}$ and $\mathcal{P}(t) \in L_{\underline{\mathbf{A}}}$ satisfying $a \in \mathcal{F}(r)$ and $a \in \mathcal{P}(t)$. Moreover, we can write $L_{\hat{\mathbf{A}}} = \{\mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}(t) : \quad r, t \in L_{\mathbf{A}}\}$.

Consider the operation $\bullet$ over $L_{\hat{\mathbf{A}}}$ as in $L_{\bar{\mathbf{A}}}$ and $L_{\underline{\mathbf{A}}}$. The Claim II.2.18 give us that $\bullet$ is closed in $L_{\hat{\mathbf{A}}}$.

Claim II.2.18. $\forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in L_{\mathbf{A}}$*,* $(\mathcal{H}_1 \bullet \mathcal{H}_2) \in L_{\hat{\mathbf{A}}}$*. Moreover,* $\mathcal{H}_{a \bullet b} = \mathcal{H}_a \bullet \mathcal{H}_b = a \bullet \mathcal{H}_b = \mathcal{H}_a \bullet b$ *and for all* $a \in L_{\mathbf{A}}$*,* $|\mathcal{H}_a|\,|L_{\hat{\mathbf{A}}}| = |L_{\mathbf{A}}|$*.*

Proof. Suppose $\mathcal{H}_1 = \mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}(t)$ and $\mathcal{H}_2 = \mathcal{F}(s) \cap \mathcal{P}(u)$. Thus,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \bullet \mathcal{H}_2 &= (\mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}(t)) \bullet (\mathcal{F}(s) \cap \mathcal{P}(u)) = \textstyle\bigcup_{g \in (\mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}(t))} g\big(\mathcal{F}(s) \cap \mathcal{P}(u)\big) \\ &= \textstyle\bigcup_{g \in (\mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}(t))} \big(g\mathcal{F}(s) \cap g\mathcal{P}(u)\big) =_{(1)} \mathcal{F}(r \bullet s) \cap \mathcal{P}(t \bullet u), \end{aligned} \tag{II.6}$$

where $=_{(1)}$ comes from Proposition II.2.10(ii).

Since $\mathcal{H}_1 \bullet \mathcal{H}_2$ is a non-empty intersection of sets in $L_{\bar{\mathbf{A}}}$ and $L_{\underline{\mathbf{A}}}$, we deduce that it lies in $L_{\hat{\mathbf{A}}}$.

Moreover, from definition of $\mathcal{H}_a$ and $\mathcal{H}_b$ it follows that $(a \bullet b) \in (\mathcal{H}_a \bullet \mathcal{H}_b)$. Then $\mathcal{H}_{a \bullet b} = \mathcal{H}_a \bullet \mathcal{H}_b$. On the other hand, from equation (II.6), we get $\mathcal{H}_a \bullet \mathcal{H}_b = a \bullet \mathcal{H}_b = \mathcal{H}_a \bullet b$. These last equalities imply that any element of $L_{\hat{\mathbf{A}}}$ can be written as the product of any other element of $L_{\hat{\mathbf{A}}}$ by some element of $L_{\mathbf{A}}$, which implies $|\mathcal{H}_a|\,|L_{\hat{\mathbf{A}}}| = |L_{\mathbf{A}}|$ for any $a \in L_{\mathbf{A}}$.

□

Proposition II.2.19. $(L_{\hat{\mathbf{A}}}, \bullet)$ *is a quasigroup.*

Proof. Use the same argument as in Proposition II.2.13.

□

Corollary II.2.20. $\forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in L_{\hat{\mathbf{A}}}$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset \Longleftrightarrow \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

Proof. The relation $(\Longleftarrow)$ is obvious. For the other one $(\Longrightarrow)$, put $\mathcal{H}_1 = \mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}(t)$ and $\mathcal{H}_2 = \mathcal{F}(s) \cap \mathcal{P}(u)$. Notice that $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ implies $\mathcal{F}(r) \cap \mathcal{F}(s) \neq \emptyset$ and $\mathcal{P}(t) \cap \mathcal{P}(u) \neq \emptyset$. Thus, by Corollary II.2.14, we have $\mathcal{F}(r) = \mathcal{F}(s)$ and $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(u)$, and the result follows.

□

II.2.4.2 Homomorphisms and isomorphisms

Fix $e \in L_{\mathbf{A}}$ and let $\mathcal{H} := \mathcal{H}_e = \mathcal{F}(\bar{x}) \cap \mathcal{P}(\bar{y})$, where $\bar{x} \in \mathcal{P}(e)$ and $\bar{y} \in \mathcal{F}(e)$. Given $a \in L_{\mathbf{A}}$, define a^{-} as the element in $L_{\mathbf{A}}$ that verifies $a^{-} \bullet a = e$.

Definition II.2.21. *Let* $S : L_{\hat{\mathbf{A}}} \to L_{\mathbf{A}}$ *be an arbitrary section of* $L_{\hat{\mathbf{A}}}$*, i.e., an arbitrary map such that* $\forall \mathcal{H}_1 \in L_{\hat{\mathbf{A}}}$*,* $S(\mathcal{H}_1) \in \mathcal{H}_1$*.*

Notice that $\forall \mathcal{H}_1 \in L_{\hat{\mathbf{A}}}$, $\mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_1)} = \mathcal{H}_1$.

Claim II.2.22. $\forall a \in L_{\mathbf{A}}$, $(S(\mathcal{H}_a)^- \bullet a) \in \mathcal{H}$.

Proof. By definition of S we have $\mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)} = \mathcal{H}_a$. Then,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)^- \bullet a} &=_{(1)} \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)^-} \bullet \mathcal{H}_a =_{(2)} \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)^-} \bullet \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)} \\ &=_{(1)} \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)^- \bullet S(\mathcal{H}_a)} =_{(3)} \mathcal{H}_e = \mathcal{H}, \end{aligned}$$

where $=_{(1)}$ is by Claim II.2.18, $=_{(2)}$ follows from definition of S, and $=_{(3)}$ follows from definition of $^-$.

□

Proposition II.2.23. *The map* $\phi : L_{\mathbf{A}} \to L_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}$ *given by* $\phi(a) = \big(\mathcal{H}_a, S(\mathcal{H}_a)^- \bullet a\big)$ *is a bijection. Moreover,* $\phi^{-1} : L_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H} \to L_{\mathbf{A}}$ *is given by* $\phi^{-1}(\mathcal{H}_a, h) = g$*, where* $g \in L_{\mathbf{A}}$ *is the unique element such that* $S(\mathcal{H}_a)^- \bullet g = h$*.*

Proof. To check ϕ is one-to-one let $a, b \in L_{\mathbf{A}}$, then

$$\phi(a)=\phi(b) \iff \big(\mathcal{H}_a, S(\mathcal{H}_a)^- \bullet a) = (\mathcal{H}_b, S(\mathcal{H}_b)^- \bullet b\big)$$

$$\iff \mathcal{H}_a = \mathcal{H}_b \ \ and \ \ S(\mathcal{H}_a)^- \bullet a = S(\mathcal{H}_b)^- \bullet b \iff a=b$$

Since $L_{\mathbf{A}}$ and $L_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}$ are both finite sets with the same cardinality, by Claim II.2.18, ϕ is also onto.

Moreover, given $(\mathcal{H}_a, h) \in L_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}$, let $g \in L_{\mathbf{A}}$ be the unique element such that $h = S(\mathcal{H}_a)^- \bullet g$. We have that

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)^-} \bullet \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)} &=_{(1)} \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)^- \bullet S(\mathcal{H}_a)} = \mathcal{H} \\ &=_{(2)} \mathcal{H}_h = \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)^- \bullet g} =_{(1)} \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)^-} \bullet \mathcal{H}_g, \end{aligned}$$

where $=_{(1)}$ is by Claim II.2.18, and $=_{(2)}$ is because $h \in \mathcal{H}$.

Hence, by Proposition II.2.19, we get $\mathcal{H}_g = \mathcal{H}_{S(\mathcal{H}_a)} = \mathcal{H}_a$. Then, $\phi(g) = (\mathcal{H}_g, S(\mathcal{H}_g)^- \bullet g) = (\mathcal{H}_a, S(\mathcal{H}_a)^- \bullet g) = (\mathcal{H}_a, h)$.

$\square$

Definition II.2.24. *Define in $L_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}$ the operation $\diamond$, given by*

$$(\mathcal{H}_1, h_1) \diamond (\mathcal{H}_2, h_2) := \phi\big[\phi^{-1}(\mathcal{H}_1, h_1) \bullet \phi^{-1}(\mathcal{H}_2, h_2)\big]$$

Notice that alternatively we can write

$$(\mathcal{H}_1, h_1) \diamond (\mathcal{H}_2, h_2) = \big(\mathcal{H}_1 \bullet \mathcal{H}_2, S(\mathcal{H}_1 \bullet \mathcal{H}_2)^- \bullet (g_1 \bullet g_2)\big),$$

where $g_1, g_2 \in L_{\mathbf{A}}$ are the unique elements which verify

$$S(\mathcal{H}_1)^- \bullet g_1 = h_1,$$

$$S(\mathcal{H}_2)^- \bullet g_2 = h_2.$$

Notice that on the first coordinate $\diamond$ coincides with $\bullet$ on $L_{\hat{\mathbf{A}}}$.

Proposition II.2.25. *We can identify* $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$ *to* $(L_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}, \diamond)$.

Proof. It follows straightforward from the definition of $\diamond$ that ϕ is an isomorphism between $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$ and $(L_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}, \diamond)$.

□

Definition II.2.26. *Define the Markov Shift* $\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$ *on the alphabet* $L_{\hat{\mathbf{A}}}$*, given by transitions:*

$$\mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$$

The transitions in Definition II.2.26 can be defined by $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{F}(a)$ for any $a \in \mathcal{H}_0$. In fact, if $\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}(w) \cap \mathcal{P}(z)$, then for all $a \in \mathcal{H}_0$,

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{a' \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{F}(w) \cap \mathcal{P}(z)} \mathcal{F}(a') =_{(1)} \mathcal{F}(a), \tag{II.7}$$

where $=_{(1)}$ is due to the fact that for every $a' \in \mathcal{P}(z)$, we have $z \in \mathcal{F}(a')$, hence $\mathcal{F}(a') = \mathcal{F}(a)$ because the follower sets partition $L_{\mathbf{A}}$, by Corollary II.2.14.

Now, consider the map $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}} \mapsto \big(\phi(a_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(\mathcal{H}_{a_i}, S(\mathcal{H}_{a_i})^- \bullet a_i\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$, which is also denoted as ϕ.

We shall check that $\phi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$ is well defined, i.e., for every $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}}$ we have $\big(\phi(a_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$. Since $\phi\big((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = \big(\phi(a_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(\mathcal{H}_{a_i}, S(\mathcal{H}_{a_i})^- \bullet a_i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$, and for all $i \in \mathbb{Z}$ we have $(S(\mathcal{H}_{a_i})^- \bullet a_i) \in \mathcal{H}$ by Claim II.2.22, it suffices to verify $(\mathcal{H}_{a_i})_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$. This last property is fulfilled because, if $a_i \in \mathcal{F}(a_{i-1})$ and $a_i \in \mathcal{P}(a_{i+1})$, then $\mathcal{H}_{a_i} = \mathcal{F}(a_{i-1}) \cap \mathcal{P}(a_{i+1}) \subseteq \mathcal{F}(a_{i-1}) =_{(*)} \mathcal{F}(\mathcal{H}_{a_{i-1}})$, where $=_{(*)}$ is by equation (II.7).

Proposition II.2.27. *We can identify* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *, \sigma)$ *to* $(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}, \star, \sigma)$*, where* $\star$ *is the 1-block operation induced by* $\diamond$*.*

Proof. Let $\phi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$ be the previous map.

$\phi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$ is one-to-one because its local rule is (Proposition II.2.23).

On the other hand if $(\mathcal{H}_i, h_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$, from Proposition II.2.23 we get $(\mathcal{H}_i, h_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \big(\mathcal{H}_{a_i}, S(\mathcal{H}_{a_i})^{-} \bullet a_i\big)_{i\in\mathbb{Z}}$. So, to deduce that ϕ is onto and ϕ^{-1} is 1-block, it is sufficient to show that $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}}$. Now, by definition of $\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$, we have $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_{a_i} \subseteq \mathcal{F}(a_{i-1})$, and so $a_i \in \mathcal{F}(a_{i-1})$.

Therefore, $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *, \sigma)$ is isomorphic to $(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}, \star, \sigma)$.

□

Corollary II.2.28. $(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}, *)$ *is a quasigroup, where* $*$ *is the operation induced by* $\bullet$ *over* $L_{\hat{\mathbf{A}}}$.

Proof. $(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}, *)$ is a quasigroup because it is a factor of $(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}, \star)$, which is itself a quasigroup because by Proposition II.2.27 says it is isomorphic to $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$.

□

Claim II.2.29. *The shift* $\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$ *verifies* $\mathcal{F}(\mathcal{H}_{\bar{x}}) \cap \mathcal{P}(\mathcal{H}_{\bar{y}}) = \{\mathcal{H}\}$, *for all* $\bar{x} \in \mathcal{P}(e)$ *and* $\bar{y} \in \mathcal{F}(e)$. .

Proof. Since $[\bar{x}, e, \bar{y}] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{A}}, 3)$, we have $[\mathcal{H}_{\bar{x}}, \mathcal{H}, \mathcal{H}_{\bar{y}}] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}, 3)$. Then, $\mathcal{H} \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{\bar{x}}) \cap \mathcal{P}(\mathcal{H}_{\bar{y}})$.

If $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{\bar{x}}) \cap \mathcal{P}(\mathcal{H}_{\bar{y}})$ then $[\mathcal{H}_{\bar{x}}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{\bar{y}}] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}, 3)$. Let $a \in \mathcal{H}_1$, so that $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_a$. By definition of $\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$, we have $\mathcal{H}_a \subseteq \mathcal{F}(\bar{x})$, and so $a \in \mathcal{F}(\bar{x})$.

On the other hand, also from definition of $\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$, it follows that $\mathcal{H}_{\bar{y}} \subseteq \mathcal{F}(a)$. Then, $\bar{y} \in \mathcal{F}(a)$, which is equivalent to $a \in \mathcal{P}(\bar{y})$.

We deduce $a \in \mathcal{H} = \mathcal{F}(\bar{x}) \cap \mathcal{P}(\bar{y})$, and so we conclude $\mathcal{H}_a = \mathcal{H}$.

$\square$

Definition II.2.30. *Define the shift $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ with alphabet $L_{\bar{\mathbf{A}}}$, and whose transitions are given by:*

$$\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \Longleftrightarrow \exists g \in \mathcal{F}_1, \; such\ that\ \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}_2$$

Let $\theta : L_{\mathbf{A}} \to L_{\bar{\mathbf{A}}}$ be the map defined by $\theta(a) = \mathcal{F}(a)$. It is an onto homomorphism from $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$ to $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$, by Proposition II.2.7(ii).

Let $(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, *)$ be the quasigroup, with the operation $*$ on $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$, induced by the operation $\bullet$ on $L_{\bar{\mathbf{A}}}$.

We also denote by θ the map $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}} \mapsto \big(\mathcal{F}(a_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$. Let us show that this map is well defined. Let $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}}$, then $\forall i \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathcal{F}(a_{i-1})$. Thus, $\mathcal{F}(a_{i-1}) \to \mathcal{F}(a_i)$, i.e., $\theta\big((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = \big(\mathcal{F}(a_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$.

Proposition II.2.31. *With the notations above:*

(i) *$\theta : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ is a homomorphism from $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ onto $(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, *)$;*

(ii) *If $\mathcal{H} = \{e\}$, then the element g appearing in the definition of $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ is unique. Moreover, θ is an isomorphism between $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *, \sigma)$ and $(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, *, \sigma)$.*

Proof.

(i) $\theta : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ is a homomorphism because its local rule is a homomorphism from $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$ to $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$.

Let us check that θ is onto. Let $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$, and notice that from definition of $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\exists a_i \in \mathcal{F}_{i-1}$, such that $\mathcal{F}(a_i) = \mathcal{F}_i$. Then, $\exists (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}}$, verifying $\theta((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (\mathcal{F}(a_i))_{i\in\mathbb{Z}} = (\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

(ii) Suppose $\mathcal{H} = \{e\}$. Let us show the uniqueness of g in the definition of $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$.

Let $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ and $g_1, g_2 \in \mathcal{F}_1$ be such that $\mathcal{F}(g_1) = \mathcal{F}(g_2) = \mathcal{F}_2$. Let $a \in L_{\mathbf{A}}$ be such that $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(a)$, and let $h \in \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(g_1) = \mathcal{F}(g_2)$. Then,

$$[a, g_1, h], [a, g_2, h] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{A}}, 3)$$

This implies that $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(a) \cap \mathcal{P}(h) = \mathcal{H}_1$. Since $\mathcal{H}_1 = b \bullet \mathcal{H}$ for some $b \in L_{\mathbf{A}}$, and since $\mathcal{H}$ is unitary, we deduce that $g_1 = g_2$.

$\square$

Remark II.2.32. *If $\mathcal{H} = \{e\}$, then θ^{-1} is a 2-block code, with memory 1:*

$$\forall (\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, \qquad \theta^{-1}\big((\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}},$$

where for all $i \in \mathbb{Z}$, $g_i \in \mathcal{F}_{i-1}$ is the unique element such that $\mathcal{F}(g_i) = \mathcal{F}_i$.

The following theorems are the analogous statements for quasi-groups as those of theorems stated in [9]. From our previous results on quasi-groups these theorems have similar proof than those in [9].

Theorem II.2.33. *Let $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ be a quasigroup, where $\Sigma_{\mathbf{A}}$ is a Markov shift and $*$ is a 1-block operation. Then,*

(i) $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *, \sigma)$ *is isomorphic by a 1-block code to* $\big(\mathbb{F} \times \Sigma_n, \otimes, \sigma_{\mathbb{F}} \times \sigma_{\Sigma_n}\big)$, *where $\mathbb{F}$ is a finite quasigroup with 1-block operation; Σ_n is a full n shift; and $\otimes$ is a k-block quasi-group operation, with memory $k-1$ and anticipation 0.*

(ii) $\mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = 0$ *if and only if* $\Sigma_n = \{(\ldots, a, a, a, \ldots)\}$ *(i.e., the full shift is trivial).*

(iii) $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *is irreducible and has a constant sequence if and only if* $\mathbb{F} = \{e\}$ *(i.e., $\mathbb{F}$ is unitary).*

Proof.

(i) If $\Sigma_{\mathbf{A}}$ is such that $\mathcal{H} = \{e\}$, then we apply Proposition II.2.31 and find a shift $(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, *)$, isomorphic to $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$.

If $|\mathcal{H}| > 1$, then we apply Proposition II.2.27 and identify $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ with $(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \times H_1^{\mathbb{Z}}, \star)$, where $H_1 := \mathcal{H}$. From Claim II.2.29 we have $\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$ has $|\mathcal{H}| = 1$. Therefore, if $\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$ is such that $|\mathcal{F}(e)| = 1$, the proof is finished, and if $\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}$ has $|\mathcal{F}(e)| > 1$, then we can apply Proposition II.2.31 and find out $(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, *)$ isomorphic to $(\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}}, *)$. Notice that in $(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}} \times H_1^{\mathbb{Z}}, \otimes)$, the operation $\otimes$ is not necessarily a 1-block operation but it is a 2-block operation, because θ^{-1} is a 2-block map, by Remark II.2.32.

Now, if $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ has $|\mathcal{H}| = 1$ we reapply Proposition II.2.31, and if $|\mathcal{H}| > 1$ we reapply Proposition II.2.27. We can repeat the same procedure until we obtain $(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}} \times H_1^{\mathbb{Z}} \times H_2^{\mathbb{Z}} \times \cdots \times H_N^{\mathbb{Z}}, \otimes)$, where $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ is such that $|\mathcal{F}(e)| = 1$, which is equivalent to $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ be finite. Notice the operation $\otimes$ will be an N-block operation, where N is the number of times that we apply Proposition II.2.31.

(ii) From the part (i), if $0 = \mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \mathbf{h}(\mathbb{F}) + \mathbf{h}(\Sigma_n)$, then $\mathbf{h}(\Sigma_n) = 0$ and so Σ_n is trivial. The converse holds due the fact that if Σ_n is trivial, then the part (i) implies $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *, \sigma)$ is topologically conjugate to a finite shift.

(iii) Suppose $\Sigma_{\mathbf{A}}$ contains a constant sequence. Then $\mathbb{F}$ also contains a constant sequence. Hence, if $\mathbb{F}$ was not unitary, then $\mathbb{F} \times \Sigma_n$ (and consequently $\Sigma_{\mathbf{A}}$) could not be irreducible.

On the other hand, if $\mathbb{F}$ is unitary, then the part (i) implies $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *, \sigma)$ is topologically conjugate to a full shift, which implies $\Sigma_{\mathbf{A}}$ is irreducible and has a constant sequence.

□

Theorem II.2.34. *Let $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ be an irreducible Markov shift, such that $*$ is a 1-block quasi-group operation. Let $\mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \log(N)$, where $N = p_1^{q_1} \cdots p_r^{q_r}$ is the prime decomposition of N. Then $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *, \sigma)$ is isomorphic to $(\mathbb{F} \times \Sigma_N, \otimes, \sigma_{\mathbb{F}} \times \sigma_{\Sigma_N})$, where Σ_N is the full N shift and $\otimes$ is at most $(q_1 + \cdots + q_r)$-block, with anticipation 0.*

Proof. Since the topological entropy is invariant under topological conjugation, when we apply the procedure presented in the proof of the Theorem II.2.33 we obtain

$$\log(N) = \mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \mathbf{h}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}} \times H_1^{\mathbb{Z}}) = \mathbf{h}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}) + \mathbf{h}(H_1^{\mathbb{Z}}) = \log(\bar{N}) + \log(|H_1|) = \log(\bar{N}\,|H_1|).$$

Thus, $\bar{N}$ divides N. It follows we can apply this procedure $n \leq q_1 + \cdots + q_r$ times, until we get

$$\log(N) = \mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \mathbf{h}(H_1^{\mathbb{Z}} \times H_2^{\mathbb{Z}} \times \cdots \times H_n^{\mathbb{Z}}) = \log(|H_1|\,|H_2| \cdots |H_n|)$$

Therefore $\Sigma_n = H_1^{\mathbb{Z}} \times H_2^{\mathbb{Z}} \times \cdots \times H_n^{\mathbb{Z}}$ is a full shift on N symbols, and the quasi-group operation $\otimes$ on Σ_n is at maximum a $(q_1 + \cdots + q_r)$-block operation.

□

Proposition II.2.35. *Let $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *)$ be a quasigroup, where $*$ is induced by a 1-block operation $\bullet$ on $\mathcal{A}$. Let $\Sigma_{\mathbf{A}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ be a topological Markov chain. Define $\theta : L_{\mathbf{A}} \to L_{\bar{\mathbf{A}}}$ by $\theta(a) = \mathcal{F}(a)$, as before.*

Then $\Sigma_{\mathbf{A}}$ is closed under $*$ if and only if $\theta : L_{\mathbf{A}} \to L_{\bar{\mathbf{A}}}$ is an onto homomorphism. Furthermore, $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ is irreducible (transitive) if and only if there exists $a \in L_{\mathbf{A}}$ such that $\mathcal{F}^k(a) = L_{\mathbf{A}}$ for some $k \geq 0$, where $\mathcal{F}^k(a)$ is defined inductively by $\mathcal{F}^{n+1}(a) = \bigcup_{h\in\mathcal{F}^n(a)} \mathcal{F}(h)$.

Proof. From Proposition II.2.31, if $\Sigma_{\mathbf{A}}$ supports a 1-block quasi-group operation, then θ is an onto homomorphism. Conversely, if $\theta : (L_{\mathbf{A}}, \bullet) \to (L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bullet)$ is an onto homomorphism, then for all $b_1 \in \mathcal{F}(a_1)$ and $b_2 \in \mathcal{F}(a_2)$, it follows $b_1 \bullet b_2 \in \mathcal{F}(a_1) \bullet \mathcal{F}(a_2) = \mathcal{F}(a_1 \bullet a_2)$, which implies $\Sigma_{\mathbf{A}}$ supports the 1-block quasi-group operation induced by $\bullet$.

Furthermore, if $\Sigma_{\mathbf{A}}$ is transitive, then from definition of transitivity it follows that for any $a \in L_{\mathbf{A}}$ there exists $k \geq 0$ such that $\mathcal{F}^k(a) = L_{\mathbf{A}}$. Conversely, if there exist $a \in L_{\mathbf{A}}$ and $k \geq 1$ such that $\mathcal{F}^k(a) = L_{\mathbf{A}}$, then by induction on part (ii) of Proposition II.2.7, we have that $\mathcal{F}^k(b) \bullet \mathcal{F}^k(c) = \mathcal{F}^k(b \bullet c)$, for any $b, c \in L_{\mathbf{A}}$; hence $|\mathcal{F}(b)| = |\mathcal{F}(a)| = |L_{\mathbf{A}}|$ for any $b \in L_{\mathbf{A}}$, which implies $\mathcal{F}(b) = L_{\mathbf{A}}$.

□

Remark II.2.36. *We can define the shift $\Sigma_{\underline{\mathbf{A}}}$, in the same way than Definition II.2.30:*

$$\mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2 \Longleftrightarrow \exists g \in \mathcal{P}_2,\ such\ that\ \mathcal{P}(g) = \mathcal{P}_1.$$

If we consider $\Sigma_{\underline{\mathbf{A}}}$ instead of $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ in Proposition II.2.31, we obtain analogous results, but $\theta^{-1} : \Sigma_{\underline{\mathbf{A}}} \to \Sigma_{\mathbf{A}}$ will be a 2-block code with anticipation 1.

Moreover, in the Theorems II.2.33 and II.2.34, $\otimes$ will be a k-block operation with *memory 0 and anticipation $k-1$.*

II.2.5 Amalgamation and state splitting

Let $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ be a Markov shift with a 1-block quasi-group operation. As before, denote by $\bullet$ the quasi-group operation on $L_{\mathbf{A}}$ induced by $*$. We define the four elementary isomorphisms as in [28]:

State splitting by successors Given $a \in L_{\mathbf{A}}$, let $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(a)$ be a subset such that $L_{\mathbf{A}}/_{\mathcal{H}} := \{g\mathcal{H} : \quad g \in L_{\mathbf{A}}\}$ is a partition of $L_{\mathbf{A}}$ compatible with $\bullet$. Define

$$L_{\tilde{\mathbf{A}}} := \{(g, \mathcal{H}_h) : \quad \mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{F}(g)\} \subseteq L_{\mathbf{A}} \times L_{\mathbf{A}}/_{\mathcal{H}},$$

where $\mathcal{H}_h$ denotes the coset of $L_{\mathbf{A}}/_{\mathcal{H}}$ containing h.

Consider on $L_{\tilde{\mathbf{A}}}$ the operation coinciding with $\bullet$ in each coordinate.

Let $\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$ be the shift defined by the following transitions:

$$(g, \mathcal{H}_h) \to (g', \mathcal{H}_{h'}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g' \in \mathcal{H}_h,$$

which is considered with the operation canonically induced by $L_{\tilde{\mathbf{A}}}$.

The state splitting is the 2-block code, $\varphi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$, defined by:

$$[g,h] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{A}},2) \qquad \mapsto \qquad (g,\mathcal{H}_h) \in L_{\tilde{\mathbf{A}}}$$

Notice that φ^{-1} is a 1-block code given by $(g,\mathcal{H}_h) \in L_{\tilde{\mathbf{A}}} \mapsto g \in L_{\mathbf{A}}$.

The state splitting is an isomorphism between $\Sigma_{\mathbf{A}}$ and $\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$.

State splitting by predecessors It is defined as in the previous case, but using $\mathcal{P}(a)$ instead of $F(a)$.

Amalgamation by common predecessors and disjoint successors Given $a \in L_{\mathbf{A}}$, let $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(a)$ be a subset, such that $L_{\mathbf{A}}/_{\mathcal{H}} := \{g\mathcal{H} : \quad g \in L_{\mathbf{A}}\}$ is a partition of $L_{\mathbf{A}}$ compatible with the operation $\bullet$. Moreover, suppose that $\forall x \in L_{\mathbf{A}}$, we have $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}(x)$ is either empty or unitary.

Define $L_{\tilde{\mathbf{A}}} := L_{\mathbf{A}}/_{\mathcal{H}}$, where it is considered the operation induced by $\bullet$. Let $\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$ be the shift given by transitions:

$$\mathcal{H}_g \to \mathcal{H}_{g'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists h \in \mathcal{H}_g : \quad \mathcal{H}_{g'} \subseteq \mathcal{F}(h)$$

where is defined the operation induced by $L_{\tilde{\mathbf{A}}}$.

The amalgamation is the 1-block code, $\varphi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$, given by

$$g \in L_{\mathbf{A}} \qquad \mapsto \qquad \mathcal{H}_g \in L_{\tilde{\mathbf{A}}}.$$

Notice that φ^{-1} is a 2-block code given by $[\mathcal{H}_g, \mathcal{H}_{g'}] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}, 2) \mapsto h \in L_{\mathbf{A}}$, where h is the unique element belonging to $\mathcal{H}_g$, such that $\mathcal{H}_{g'} \subseteq \mathcal{F}(h)$.

It is straightforward to see that the amalgamation is an isomorphism between $\Sigma_{\mathbf{A}}$ and $\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$.

Amalgamation by common successors and disjoint predecessors It is defined in the same way than the previous case, but changing the roles of the predecessor and the follower sets.

Theorem II.2.37. *Two quasi-group SFTs, each of them with 1-block quasi-group operation, are isomorphic if and only if it is possible to go from one to other by a finite sequence of elementary isomorphisms.*

Proof. Let $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \sigma, *)$ and $(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, \sigma, \bar{*})$ be both quasi-group shifts with 1-block operations. Let $\phi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ be an isomorphism between them.

Without lost of generality we can consider $\Sigma_{\mathbf{A}}$ a Markov shift and ϕ a 1-block code (in fact, we can take the N-block presentation of $\Sigma_{\mathbf{A}}$, with N sufficiently large). Furthermore, $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$ and $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bar{\bullet})$ are both quasi-groups which induce, respectively, the operations $*$ and $\bar{*}$.

We have that $\phi : L_{\mathbf{A}} \to L_{\bar{\mathbf{A}}}$ is an onto homomorphism between $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$ and $(L_{\bar{\mathbf{A}}}, \bar{\bullet})$ (notice that the local rule of the code is also denoted by ϕ).

Define $L_{\mathbf{A}}/_{\phi^{-1}} := \{\phi^{-1}(\{\bar{a}\}) : \quad \bar{a} \in L_{\bar{\mathbf{A}}}\}$, which is a partition of $L_{\mathbf{A}}$ compatible with $\bullet$. This property also holds when we consider for $n \geq 1$, $\phi : \mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{A}}, n) \to \mathcal{W}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, n)$, that is

$$\mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{A}}, n)/_{\phi^{-1}} = \left\{\phi^{-1}(\{[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]\}) : \quad [\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, n)\right\},$$

which is a partition of $\mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{A}}, n)$ compatible with $\bullet$.

Since ϕ^{-1} is a N-block code, there exists m , $1 \leq m \leq N$, such that given $[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, N)$, $\forall [a_1, \ldots, a_N], [a'_1, \ldots, a'_N] \in \phi^{-1}(\{[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N]\})$ we have $a_m = a'_m$.

Fix $[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, N)$, $[x_1, \ldots, x_N] \in \phi^{-1}(\{[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N]\})$ and put $\mathcal{H} := \mathcal{F}(x_m) \cap \phi^{-1}(\bar{x}_{m+1})$. It follows that $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(x_m)$ and $L_{\mathbf{A}}/_{\mathcal{H}}$ is a partition of $L_{\mathbf{A}}$, compatible with $\bullet$. Furthermore, for every $b \in L_{\mathbf{A}}$ the set $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}(b)$ has at most one element. In fact, if there was more than one element in $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}(b)$, then we could find two distinct sequences in $\Sigma_{\mathbf{A}}$ with the same image by ϕ, what is a contradiction about injectivity of this map.

Denote by $\varphi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$ the amalgamation by common predecessors and disjoint successors, where $\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}} := L_{\mathbf{A}}/_{\mathcal{H}}$. We recall φ is a 1-block code and φ^{-1} is a 2-block code.

We define $\tilde{\phi} : \Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}} \to \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ the 1-block map which has local rule (which we will also denote by $\tilde{\phi}$), given by $\tilde{\phi}(\mathcal{H}_g) := \phi(g')$ for any $g' \in \mathcal{H}_g$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}} \arrow[drr, "\tilde{\phi}"] & & \Sigma_{\mathbf{A}} \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[d, "\phi"] \\
& & \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}
\end{tikzcd}$$

Now, we have that given $[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, N)$, for all $[\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_N], [\tilde{a}'_1, \ldots, \tilde{a}'_N] \in \tilde{\phi}^{-1}(\{[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N]\})$ follows that $\tilde{a}_m = \tilde{a}'_m$ and $\tilde{a}_{m+1} = \tilde{a}'_{m+1}$.

We repeat the above process until we get a 1-block isomorphism, $\tilde{\phi} : \Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}} \to \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$, such that for any $[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, N)$, for all $[\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_N], [\tilde{a}'_1, \ldots, \tilde{a}'_N] \in \tilde{\phi}^{-1}(\{[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N]\})$ follows $\tilde{a}_i = \tilde{a}'_i$, $m \leq i \leq N$.

To conclude, we come back and applying the amalgamation by common successors and disjoint predecessors from the entry $(m - 1)$ until the first entry. We obtain that $\tilde{\phi} : \Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}} \to \Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ is a 1-block isomorphism, and for all $[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N] \in \mathcal{W}(\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}, N)$ we have that $\tilde{\phi}^{-1}(\{[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N]\})$ contains a unique N-block of $\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$. This implies that $\Sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$ and $\Sigma_{\bar{\mathbf{A}}}$ are identical.

$\square$

Chapter III

Aleatorización de medidas con memoria infinita

III.1 Presentación

En este capítulo presentaremos resultados sobre la aleatorización de medidas por la acción de autómatas celulares de tipo algebraico. En otras palabras, sea $(G, *)$ un grupo Abeliano finito, $\mathfrak{G} \subseteq G^{\mathbb{Z}}$ una cadena de Markov topológica, y $\Phi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ definido para todo $\mathbf{x} \in \mathfrak{G}$ e $i \in \mathbb{Z}$ por la regla local:

$$\big(\Phi(\mathbf{x})\big)_i := \mathbf{a} \cdot x_i + \mathbf{b} \cdot x_{i+1} + \mathbf{c},$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son números enteros y $\mathbf{c} \in G$. Dada una medida μ, invariante por translaciones (es decir, σ-invariante), estamos interesados en conocer su evolución bajo la dinámica del autómata celular $(\mathfrak{G}, \Phi)$. Notemos que el límite $\Phi^n\mu$, cuando n va a infinito, en general no existe. De hecho, aún en el caso simple, cuando $G = \mathbb{Z}_2$, $\mathfrak{G} = G^{\mathbb{Z}}$, $\big(\Phi(\mathbf{x})\big)_i = x_i + x_{i+1}$, y μ es la medida Bernoulli tal que $\mu\big([0]_i\big) = p = 1 - \mu\big([1]_i\big)$, tal límite puede no existir [10], ya que

$$\big(\Phi^n(\mathbf{x})\big)_i = \begin{cases} x_i + x_{i+n} & , \; si \; n = 2^k \\ \\ (x_i + x_{i+n}) + (x_{i+1} + x_{i+n+1}) & , \; si \; n = 2^k + 1 \end{cases},$$

y luego

$$\Phi^n\mu\big([0]_i\big) = \begin{cases} p^2 + (1-p)^2 & , \; si \; n = 2^k \\ \\ p^4 + (1-p)^4 + 6p^2(1-p)^2 & , \; si \; n = 2^k + 1 \end{cases}.$$

Debido a eso, alternativamente estudiamos la convergencia de la media de Cesàro de la iteración de la medida bajo la acción de Φ, es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Phi^n\mu.$$

En su trabajo, Lind [10] estudió la convergencia de la media de Cesàro para el caso anteriormente citado $({\mathbb{Z}_2}^{\mathbb{Z}}, \Phi)$ siendo un a.c. de *grupo* y μ siendo una medida Bernoulli) demostrando que ella converge a la medida uniforme Bernoulli. El método empleado por Lind fue el análisis armónico, en él el autómata celular es visto como un endomorfismo y la medida uniforme Bernoulli es la medida de Haar. Más tarde, en [5] y [12] se probó que el resultado obtenido por Lind también se verifica cuando se considera como medida inicial cualquier medida de Markov.

Usando como herramienta la teoría de renovación de [2] y [18], Ferrari-Maass-Martínez -Ney [6] probaron que si $G = \mathbb{Z}_{p^s}$, con p siendo primo, $\mathfrak{G} = G^{\mathbb{Z}}$, y Φ siendo un *a.c. lineal*, entonces la media de Cesàro de la acción de Φ sobre cualquier medida con conexiones completas y decaimiento sumable también converge a la medida uniforme Bernoulli.

Retomando el punto de vista del análisis armónico Pivato-Yassawi ([21] y [22]), demostraron el mismo resultado para una clase más general de autómatas $(G^{\mathbb{Z}}, \Phi)$, con $(G, +)$ siendo un grupo Abeliano finito cualquiera, y de medidas μ. De hecho, en su trabajo, la convergencia de la media de Cesàro de los iterados de μ a la medida uniforme Bernoulli es garantizada para cualquier medida de probabilidad *armónicamente mezcladora* μ y cualquier Φ que sea *difusivo en densidad*. En particular los *a.c. afín* son difusivos en densidad [22]. Más tarde en [8] fue demostrado que las medidas con conexiones completas y decaimiento sumable sobre $G^{\mathbb{Z}}$ son armónicamente mezcladoras y fue demostrada la convergencia de la media de Cesàro de tales medidas cuando $(G^{\mathbb{Z}}, \Phi)$ es un autómata *permutativo a la derecha* y Ψ*-asociativo* ó N*-scaling*.

Un caso más general de autómatas $(\mathfrak{G}, \Phi)$ fue estudiado en [14], donde $(G, +)$ es una

p^s-torsión, $\mathfrak{G} \subseteq G^{\mathbb{Z}^d}$ es un subgrupo *shift* que posee algunas propiedades específicas, Φ es un *a.c. de grupo*, y μ es una medida de Markov sobre $\mathfrak{G}$. Bajo esas condiciones, demostraron que también se verifica la convergencia de la media de Cesàro de los iterados de μ a la medida de Haar (que es la medida de Markov cuyas las leyes finito-dimensionales son uniformes). Aún para p^s-torsiones, el caso particular en que $\mathfrak{G} \subseteq G^{\mathbb{Z}}$ es cualquier subgrupo fue estudiado en [15], donde el mismo resultado fue demostrado.

En este capítulo demostraremos que los resultados obtenidos en los trabajos anteriores también son válidos cuando $(G, +)$ es una p^s-torsión, $\mathfrak{G} \subseteq G^{\mathbb{Z}}$ es cualquier subgrupo, $\Phi = \mathbf{a} \cdot id + \mathbf{b} \cdot \sigma + \mathbf{c}$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son números interos y $\mathbf{c} \in \mathfrak{G}$ es una sucesión constante, es un *a.c. afín* y μ es una medida con conexiones completas (compatible con $\mathfrak{G}$) y decaimiento sumable.

III.2 Artículo

Reproducimos aqui el artículo ititulado *Limit Measures for Affine Cellular Automata on Topological Markov Subgroups* escrito en co-autoría com A. Maass y S. Martínez.

III.2.1 Introduction

Let $(G,+)$, $G=\{0,1,\ldots,q\}$, be a finite Abelian group and $(G^{\mathbb{Z}},+)$ be the product group with the componentwise addition. Let $\mathfrak{G}\subseteq G^{\mathbb{Z}}$ be a subgroup shift, which without loss of generality we can consider use all alphabet G. It is well known [9] $\mathfrak{G}$ can be seen as a topological Markov chain.

We say $\Phi:\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}$ is an *affine cellular automaton*, if it is given by $\Phi:=\mathbf{a}\,id+\mathbf{b}\,\sigma+\mathbf{c}$, where $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{Z}$ are such that the maps $g\mapsto\mathbf{a}\cdot g$ and $g\mapsto\mathbf{b}\cdot g$ are both automorphisms on G, and $\mathbf{c}\in\mathfrak{G}$ is a constant sequence.

Given a shift-invariant probability measure μ on $\mathfrak{G}$, an important problem is to understand the evolution of the measure under the dynamics of Φ. Even in the simplest case there does not exist the limit of $\mu\circ\Phi^{-n}$ as $n\to\infty$. To avoid it, the convergence of the Cesàro mean distribution $N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\mu\circ\Phi^{-n}$ as $n\to\infty$ has been studied. In this spirit, Lind [10] considered the case where $G=\mathbb{Z}_2$, $\mathfrak{G}=G^{\mathbb{Z}}$, $\Phi=id+\sigma$ and μ being any Bernoulli measure, and proves that under those conditions the Cesàro mean distribution always converges to the Haar measure on $G^{\mathbb{Z}}$ (i.e. the uniform Bernoulli measure). Later, in [5] and [12], the same result was shown for μ being a Markov measure of full support. In [6] using regeneration theory of stochastic processes with finite state space, it was proved that the Cesàro mean distribution also converges to the Haar measure when μ is a probability measure with complete connections and summable decay, $G = \mathbb{Z}_{p^s}$ for some p prime, and $\Phi = \mathbf{a}\ id + \mathbf{b}\ \sigma$. Using harmonic analysis Pivato-Yassawi [21], [22], has found the same result for the case where: $G = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{m_i}$ for any collection of positive integers $\{m_i : 1 \leq i \leq k\}$; the initial measure is harmonically mixing; and Φ is a diffusive in density cellular automaton. In fact, this case contains those where Φ is affine and μ has complete connection and summable decay, see [6], [8]. Notice that all previous results are stated for the case where $\mathfrak{G} = G^{\mathbb{Z}}$.

Recently, in [14] was showed that if $(G, +)$ is p^s-torsion, $\mathfrak{G} \subseteq G^{\mathbb{Z}^d}$ is a subgroup shift satisfying a 'lifting property', $\Phi = id + \sigma$ and μ is a Markov random field supported on $\mathfrak{G}$, the attractiveness property of the Haar measure also holds. In [15] the same result was proved but only in the one-dimensional case. We recall the Haar measure on $\mathfrak{G} \subsetneq G^{\mathbb{Z}^d}$ corresponds to the uniform Markov measure on the allowed words.

In [9] Kitchens showed that any irreducible subgroup shift $(\mathfrak{G}, +)$ is isomorphic and topologically conjugate to a full shift group $(A^{\mathbb{Z}}, *)$, where $*$ is not necessarily a 1-block operation. Let $\pi : \mathfrak{G} \to A^{\mathbb{Z}}$ be this isomorphism, then from the proof of Kitchens's Theorem we can deduce that the projection on $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ of any probability measure μ on $\mathfrak{G}$ with complete connections and summable decay, that we denote by $\mu \circ \pi^{-1}$, is also a probability measure with complete connections and summable decay. Moreover, if $\Phi = \mathbf{a} \cdot id_{\mathfrak{G}} + \mathbf{b} \cdot \sigma_{\mathfrak{G}} + \mathbf{c}$ is an affine c.a. on $\mathfrak{G}$, then it is topologically conjugated to $\varphi := \mathbf{a} \cdot id_{A^{\mathbb{Z}}} * \mathbf{b} \cdot \sigma_{A^{\mathbb{Z}}} * \pi(\mathbf{c})$ through π. Therefore, whenever $*$ is a 1-block operation (e.g., if the topological entropy of

$(\mathfrak{G}, \sigma_{\mathfrak{G}})$ is $\log N$, where $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_q$ with $\{p_i\}_{i=1,\ldots,q}$ being a family of distinct prime numbers) we can conclude the Cesàro mean convergence directly from [8]. However, this occurs only if $*$ has some type of regularity, and so for most of affine cellular automata $(\mathfrak{G}, \Phi)$ we can not use this method.

In this work we also consider $(G, +)$ a p^s-torsion group and we prove the convergence of the Cesàro mean distribution to the Haar measure when $\mathfrak{G} \subseteq G^{\mathbb{Z}}$ is any subgroup shift, μ is a probability measure with complete connections (compatible with $\mathfrak{G}$) and summable decay, and Φ is any affine cellular automaton. The elements of our proof shares results with [6] and [15], in particular the regenerative construction of measures with infinite memory and summable decay, and the combinatorics of the binomial coefficients associated with the iterates of the cellular automaton.

This paper is organized as follows. In §III.2.2 we develop the background and state our main result (Theorem III.2.1). In §III.2.3, for a fixed left-infinite sequence $w = (\ldots, w_{-2}, w_{-1})$allowed in $\mathfrak{G}$, we construct a random sequence $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on G which distribution coincides with the conditional probability measure μ_w and so, in §III.2.3.1 we define the renewal process associate to $\mathbf{x}$. Finally, in §III.2.4 we shall prove that for sufficiently large n the finite-dimensional distribution of $\Phi^n(\mathbf{x})$, conditioned to the renewal times, coincide with the finite-dimensional law of the Haar measure, then we prove Theorem III.2.1.

III.2.2 Background and main result

We say that the Abelian group $(G,+)$ is p^s-torsion, for some prime number p and some $s \geq 1$, if: (i) $p^s g = 0$ for any $g \in G$; (ii) given $1 < m < p^s$ there exists $g \in G$ such that $mg \neq g$.

Denote by $\sigma : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ the shift map, which is defined for every $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ and $n \in \mathbb{Z}$ as $(\sigma(\mathbf{g}))_n = g_{n+1}$.

Given $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$, $\mathbf{g} = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, and $m \leq n$, we denote by $\mathbf{g}_m^n = (g_m, g_{m+1}, \ldots, g_n)$. For $\ell \geq 1$, denote by $\mathfrak{G}_\ell$ the set of all allowed words with length ℓ in $\mathfrak{G}$. Given $g \in G$, we write $\mathcal{F}(g)$, as the follower set of g:

$$\mathcal{F}(g) = \{h \in G : (g,h) \in \mathfrak{G}_2\}\,.$$

In the same way, we define $\mathcal{P}(g)$ the set of predecessors of g.

For $g \in G$ put $\mathcal{F}^1(g) := \mathcal{F}(g)$ and for any $n > 1$ define recursively $\mathcal{F}^{n+1}(g) = \cup_{h\in\mathcal{F}^n(g)}\mathcal{F}(h)$. From [9], for every $n \geq 1$, $\mathcal{F}^n := \mathcal{F}^n(0)$ is a normal subgroup of G, and for any $h \in G$ there exists $h' \in G$ such that $\mathcal{F}^n(h) = h' + \mathcal{F}^n$. In particular, we can define arbitrarily a map $f : G \to G$, such that $f(g) \in \mathcal{F}(g)$ and thus $\mathcal{F}(g) = f(g) + \mathcal{F}$.

Furthermore, the irreducibility of $\mathfrak{G}$ implies it is mixing, and it is equivalent to say that there exists $m \geq 0$ such that $\mathcal{F}^m = G$. From here, we shall assume $\mathfrak{G}$ is irreducible and we will denote by r the smallest m satisfying the previous property.

Given $g_0, g_n \in G$ and $n \geq 1$, we define

$$\mathbb{C}^n(g_0, g_n) = \{(g_1, \ldots, g_{n-1}) \in \mathfrak{G}_{n-1} : \quad (g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n) \in \mathfrak{G}_{n+1}\}.$$

Notice that $\mathbb{C}^n(0,0)$ is a normal subgroup of G and so for all $n \geq r$ and $g, h \in G$, one has

$$|\mathbb{C}^n(g,h)| = |\mathbb{C}^n(0,0)| = |G|^{-1} |\mathcal{F}|^n. \tag{III.1}$$

In fact, since $n \geq r$, given $g, h \in G$, $\mathbb{C}^n(g,h) \neq \emptyset$. Then, it follows that $\bigcup_{g,h\in G} \mathbb{C}^n(g,h) = \mathfrak{G}_{n+1}$ and so

$$|G|^2 |\mathbb{C}^n(0,0)| = \left| \bigcup_{g,h\in G} \mathbb{C}^n(0,0) \right| = \left| \bigcup_{g,h\in G} \mathbb{C}^n(g,h) \right| = |\mathfrak{G}_{n+1}| = |G| \, |\mathcal{F}|^n.$$

Denote by $\mathfrak{G}^-$ and $\mathfrak{G}^+$, the projections of $\mathfrak{G}$ on $G^{-\mathbb{N}^*}$ and $G^{\mathbb{N}}$ respectively. Given $w \in \mathfrak{G}^-$ denote by $\mathfrak{G}^+_w$ the projection on $\mathfrak{G}^+$ of the set of all sequences $(g_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{G}$, with $g_i = w_i$ for $i \leq -1$. Notice that if $n \geq r$, then for any $w \in \mathfrak{G}^-$ one has $\sigma^n(\mathfrak{G}^+_w) = \mathfrak{G}^+$.

Let μ be any shift-invariant probability measure on $\mathfrak{G}$. For $w \in \mathfrak{G}^-$, $w = (\ldots, w_{-2}, w_{-1})$, let μ_w be the probability measure on $\mathfrak{G}^+_w$ obtained for μ conditioning to the past w.

We say μ has *complete connections* (compatible with $\mathfrak{G}$) if given $a \in G$, for all $w \in \mathfrak{G}^-$ such that $a \in \mathcal{F}(w_{-1})$, one has $\mu_w(a) > 0$.

If μ is a probability measure with complete connections, we define the quantities γ_m, for $m \geq 1$, by

$$\gamma_m := \sup \left\{ \left| \frac{\mu_v(a)}{\mu_w(a)} - 1 \right| : \quad \begin{array}{l} v, w \in \mathfrak{G}^-; \quad v_{-i} = w_{-i},\ 1 \leq i \leq m; \\ a \in \mathcal{F}(v_{-1}) = \mathcal{F}(w_{-1}) \end{array} \right\}$$

When $\sum_{m \geq 1} \gamma_m < \infty$, we say μ has *summable decay*, and this implies a uniform continuity condition on $\mu_w(a)$ as a function of w. In fact, for fixed $w_{-1} \in G$ and $a \in \mathcal{F}(w_{-1})$, for any $\epsilon > 0$ there exists m such that for any pair of $v, w \in \mathfrak{G}^-$, with $v_{-i} = w_{-i}$ for $1 \leq i \leq m$, we have $\left| \frac{\mu_v(a)}{\mu_w(a)} - 1 \right| < \epsilon$. Therefore, $|\mu_v(a) - \mu_w(a)| < \epsilon$ for any $v, w \in \mathfrak{G}^-$ such that $v_{-i} = w_{-i}$ for $1 \leq i \leq m$.

Denote by ν the Haar measure on $\mathfrak{G}$, which is the Markovian measure given by the stochastic matrix $\mathbf{L} = (L_{gh})_{g,h \in G}$, where $L_{gh} := |\mathcal{F}^{-1}| \, \mathbf{1}_{\mathcal{F}(g)}(h)$, and the $\mathbf{L}$-stationary vector $\rho = (\rho_g = |G|^{-1})_{g \in G}$. We recall ν is the maximal entropy measure for the Markov shift $(\mathfrak{G}, \sigma)$ and it is the unique Φ-invariant Markov measure with full support. Moreover, for all $m \leq n$, let $\ell = m - n + 1$ and $\mathbf{g} = (g_m, \ldots, g_n) \in \mathfrak{G}_\ell$ follows that $\nu \{\mathbf{x} \in \mathfrak{G} : \quad \mathbf{x}_m^n = \mathbf{g}\} = |G|^{-1} |\mathcal{F}|^{-(\ell-1)} =: \delta_\ell$.

Now, using the above notations we are able to state our main result as follows:

Theorem III.2.1. *Let G be p^s-torsion and $\mathfrak{G} \subseteq G^{\mathbb{Z}}$ be an irreducible subgroup shift.*

Suppose $\Phi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ is an affine c.a. and μ is a shift-invariant probability measure with complete connections and summable decay compatible with $\mathfrak{G}$. Then, the Cesàro mean of the iterates of μ, under the action of Φ, converges to the Haar measure.

Observe that to prove Theorem III.2.1 it is sufficient to show that for any $w \in \mathfrak{G}^-$, $m \in \mathbb{N}$ and $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{m+1}$:

$$\lim_{N\to\infty} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mu_w\Big((\Phi^{-n}\mathbf{x})_0^m = \mathbf{g}\Big) = \delta_{m+1} \tag{III.2}$$

III.2.3 Processes with infinite memory and regeneration times

Let μ be a probability measure with complete connections and summable decay compatible with $\mathfrak{G}$. In this section we shall construct, for a fixed $w \in \mathfrak{G}^-$, a stochastic process $\{x_n\}_{n\geq 0}$ and a probability law $\mathbb{P}_w$, such that

$$\mathbb{P}_w\Big\{x_n = g_n\Big| \quad x_{n-1} = g_{n-1}, \ldots, x_0 = g_0\Big\} = \mu_{g_{n-1}\ldots g_0 w}(g_n), \tag{III.3}$$

and present their renewal properties. We follow closely the construction made in [6]

Let $w \in \mathfrak{G}^-$ and $g \in \mathcal{F}(w_{-1})$. Put $P(g|w) := \mu_w(g)$. Then $P(g|w) > 0$ because μ has complete connections. We define:

$$a_{-1}(g|w) := \inf\Big\{P(z|v) : \quad v \in \mathfrak{G}^-, \quad z \in \mathcal{F}(v_{-1})\Big\}$$

and

$$a_0(g|w) := \inf\Big\{P(g|v): \quad v \in \mathfrak{G}^-, \quad \textit{such that } g \in \mathcal{F}(v_{-1})\Big\}.$$

Notice that $a_{-1}(g|w)$ depends neither on g nor on w, while $a_0(g|w)$ does not depend on w. Furthermore, the function $P(v|\cdot) : \{z \in \mathfrak{G}^- : v \in \mathcal{F}(z_{-1})\} \to [0,1]$ is continuous because μ has summable decay, and is nonzero because μ has complete connections. Thus, since $\Sigma_{\mathbf{A}}$ is compact, $a_{-1}(g|w) > 0$. Let $\alpha > 0$ be such that $\alpha < a_{-1}(g|w)\,|\mathcal{F}|$.

Now, for $k \geq 1$, define

$$a_k(g|w) := \inf\Big\{P(g|v): \quad v \in \mathfrak{G}^-, \quad v_i = w_i,\ -k \leq i \leq -1, \quad g \in \mathcal{F}(v_{-1})\Big\}.$$

From the definition of $a_k(g|w)$ follows that $\{a_k(g|w)\}_{k\geq -1}$ is a non-decreasing sequence such that $\lim\limits_{k\to\infty} a_k(g|w) = P(g|w)$.

We will use the above quantities to determine a partition of the interval $[0,1]$ as follows:

Let $b_{-1}(g|w) := a_{-1}(g|w) - \alpha\,|\mathcal{F}|^{-1}$ and for $k \geq 0$ put $b_k(g|w) := a_k(g|w) - a_{k-1}(g|w)$. Then we can construct a partition of $(\alpha, 1]$ by intervals $B_k(g|w)$ of Lebesgue measure $b_k(g|w)$, respectively, disposed in increasing order with respect to g and k, that is, writing $g_1, \ldots, g_{|\mathcal{F}|} \in \mathcal{F}(w_{-1})$ with $g_i < g_{i+1}$, $i = 1, \ldots, |\mathcal{F}|$, then we ordered the intervals as follows: $B_{-1}(g_1|w), \ldots, B_{-1}(g_{|\mathcal{F}|}|w), B_0(g_1|w), \ldots, B_0(g_{|\mathcal{F}|}|w), \ldots$.

In fact, from this construction

$$\left| \bigcup_{k\geq -1} B_k(g|w) \right| = P(g|w) - \alpha \left|\mathcal{F}\right|^{-1} \tag{III.4}$$

and

$$\left| \bigcup_{g\in\mathcal{F}(w_{-1})} \bigcup_{k\geq -1} B_k(g|w) \right| = 1 - \alpha, \tag{III.5}$$

then $[0,1]$ can be written as the disjoint union $[0,\alpha] \cup \bigcup_{g\in\mathcal{F}(w_{-1})} \bigcup_{k\geq -1} B_k(g|w)$.

Now, consider $\mathbb{P}$ a probability law such that $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ are two independent sequences of iid random variables, such that: U_n is uniformly distributed in $[0,1]$, so $\mathbb{P}\{U_n \leq c\} = c$, for any $c \in [0,1]$; and V_n is uniformly distributed in $\mathcal{F}$, that is, $\mathbb{P}\{V_n = g\} = |\mathcal{F}|^{-1}$, for any $g \in \mathcal{F}$.

Then, for each $w \in \mathfrak{G}^-$ we can construct a stochastic process $\{x_n\}_{n\geq 0}$ recursively by:

$$x_n := \Big(f(x_{n-1}) + V_n\Big)\mathbf{1}_{[0,\alpha]}(U_n) + \sum_{g\in\mathcal{F}(x_{n-1})} g \sum_{k\geq -1} \mathbf{1}_{B_k(g|x_{n-1}\ldots x_0 w)}(U_n),$$

where $f : G \to G$ is an arbitrary map such that $f(g) \in \mathcal{F}(g)$.

From here, we shall denote $\mathbb{P}_w := \mathbb{P}$ the probability law of the process $(x_n : n \geq 0)$ which was constructed with respect to the past w. We can check the equation (III.3) holds:

$$\mathbb{P}_w \left\{ x_n = g_n \middle| x_{n-1} = g_{n-1}, \ldots, x_0 = g_0 \right\}$$

$$= \mathbb{P}\Big\{U_n \leq \alpha, V_n = g_n - f(g_{n-1})\Big\} + \mathbb{P}\Big\{U_n \in \textstyle\bigcup_{k\geq -1} B_k(g_n|g_{n-1}\ldots g_0 w)\Big\}$$

$$= \alpha\,|\mathcal{F}|^{-1} + \left|\textstyle\bigcup_{k\geq -1} B_k(g_n|g_{n-1}\ldots g_0 w)\right| =_{(*)} \mu_{g_{n-1}\ldots g_0 w}(g_n),$$

where $=_{(*)}$ is because equation (III.4).

Now, we define for $\ell \geq -1$, $B_\ell(w) := \bigcup_{g\in\mathcal{F}(w_{-1})} B_\ell(g|w)$ and the quantities

$$a_\ell := \min_{w\in\mathfrak{G}^-} \left\{ \sum_{g\in\mathcal{F}(w_{-1})} a_\ell(g|w) \right\},$$

which is a non-decreasing nonzero sequence such that for any $w \in \mathfrak{G}^-$

$$[0, a_k] \subseteq [0, \alpha] \cup \bigcup_{\ell=-1}^{k} B_\ell(w).$$

Hence, we have recovered Lemma 2.4 in [6], namely: *in the event* $\{U_n \leq a_k\}$ *for* $n \in \mathbb{N}$ *we only need to look at* $x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$ *to decide the value of* x_n.

III.2.3.1 Regeneration Times and Renewal Process

For $i \leq j$, denote by $\mathbf{U}_i^j \leq \alpha$ the events $U_i \leq \alpha, U_{i+1} \leq \alpha, \ldots, U_j \leq \alpha$. Given $m \geq 1$, define the times $(T_i^{(m)})_{i\geq 1}$ by

$$T_1^{(m)} := \min\Big\{n \geq 0 : \quad \mathbf{U}_n^{n+m} \leq \alpha, \quad U_{n+m+j+1} \leq a_{j-1}, \quad \forall j \geq 0\Big\}$$

and for $i \geq 2$

$$T_i^{(m)} := \min\left\{n > T_{i-1}^{(m)} : \quad \mathbf{U}_n^{n+m} \leq \alpha, \quad U_{n+m+j+1} \leq a_{j-1}, \quad \forall j \geq 0\right\}$$

Thus, we can define $\mathbf{N}^{(m)}$ a random counting measure on $\mathbb{N}$ induced by $(T_i^{(m)})_{i\geq 1}$ for any $A \subseteq \mathbb{N}$ by:

$$\mathbf{N}^{(m)}(A) := \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}_A(T_i^{(m)}), \qquad \mathbf{N}^{(m)}(\{n\}) := \mathbf{N}^{(m)}(n)$$

From Lemma 2.5 in [6], $\mathbf{N}^{(m)}$ corresponds to a renewal stationary process on $\mathbb{N}$, with finite inter-renewal mean. Then, by Lemma 3.1 in [6], there exists a non-increasing function $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, such that $\varepsilon(n) \to 0$ as $n \to \infty$, and $\mathbb{P}\left\{\mathbf{N}^{(m)}(A) = 0\right\} \leq \varepsilon(|A|)$. Also, $\mathbb{P}\left\{\mathbf{U}_n^{n+m} \leq \alpha, \quad U_{n+m+j+1} \leq a_{j-1}, \quad \forall j \geq 0\right\} = \alpha^{m+1} a_0 a_1 \cdots := \beta$. We claim $\beta > 0$. In fact, since μ has summable decay follows that for any $v, w \in \mathfrak{G}^-$, $g \in \mathcal{F}(v_{-1})$ and $k \geq 0$:

$$\left|\frac{\mathbb{P}_v\{x_0 = g\}}{\mathbb{P}_w\{x_0 = g\}} - 1\right| \leq \gamma_k \qquad \text{, if } v_i = w_i, \quad i = -1, \ldots, k.$$

Thus,

$$\mathbb{P}_v\{x_0 = g\} \geq (1 - \gamma_k)\mathbb{P}_w\{x_0 = g\} \qquad \text{, if } v_i = w_i, \quad i = -1, \ldots, k;$$

and therefore:

$$a_k(g|v) \geq (1-\gamma_k)\mathbb{P}_w\{x_0 = g\} \qquad \text{, si } v_i = w_i, \quad i = -1, \ldots, k.$$

Now, taking the sum on $g \in \mathcal{F}(w_{-1})$ and the minimum on $v \in \mathfrak{G}^-$ such that $v_i = w_i$ for $i = 1, \ldots, k$, we obtain $a_k \geq (1-\gamma_k)$. Thus, $\sum_{k\geq 0}(1-a_k) \leq \sum_{k\geq 0}\gamma_k < \infty$, which implies $a_0 a_1 \cdots > 0$.

III.2.4 The Cesàro Limit

In this section we shall prove Theorem III.2.1. In order to do this, we need to prove the following two lemmas, which are infinite memory measure versions of Lemmas 3.1 and 3.2 in [15].

Recall r is the smallest integer such that $\mathcal{F}^r = G$. Given $w \in \mathfrak{G}^-$, let $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be the stochastic process related to w. Given $m \leq n$ we denote as $\mathfrak{F}_m^n$ the sigma-algebra on $\mathfrak{G}^+$ defined by the entries $\mathbf{x}_m^n$. Notice this sigma-algebra does not depend on w if $m \geq r$.

Lemma III.2.2. *Let $k \geq r$, $m \geq 0$, and $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{m+1}$ then:*

(i) $\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big| \quad \mathbf{U}_{k-r+1}^{k+m} \leq \alpha, \quad \mathfrak{F}_0^{k-r}\Big\} = \delta_{m+1}$

(ii) $\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big| \mathbf{U}_{k-r+1}^{k+m+r} \leq \alpha,\ U_{k+m+r+j+1} \leq a_{j-1},\ j \geq 0,\ \mathfrak{F}_0^{k-r} \vee \mathfrak{F}_{k+m+r}^{\infty}\Big\} = \delta_{m+1}$

Proof. **(i)** Let $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_{k-r}) \in \mathfrak{G}_{k-r+1}$ such that $h_0 \in \mathcal{F}(w_{-1})$, $g = (g_k, g_{k+1}, \ldots, g_{k+m}) \in \mathfrak{G}_{m+1}$, then:

$$\mathbb{P}_w \left\{ \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g} \middle| \mathbf{U}_{k-r+1}^{k+m} \leq \alpha, \quad \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h} \right\}$$

$$= \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^r(h_{k-r}, g_k)} \mathbb{P}_w \left\{ \mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{z}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g} \middle| \mathbf{U}_{k-r+1}^{k+m} \leq \alpha, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h} \right\},$$

$$=_{(*)} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^r(h_{k-r}, g_k)} |\mathcal{F}|^{-(r+m)} = \delta_{m+1}$$

where $=_{(*)}$ is because for all $k - r + 1 \leq n \leq k + m$ the value of x_n depends only on the random variable V_n which is uniformly distributed on $\mathcal{F}$, and $|\mathbb{C}^r(h_{k-r}, g_k)| = |\mathbb{C}^r(0,0)| = |G|^{-1} |\mathcal{F}|^r$.

(ii) Fix $N > k + m + r$. Let $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_{k-r}) \in \mathfrak{G}_{k-r+1}$ such that $h_0 \in \mathcal{F}(w_{-1})$, $\mathbf{g} = (g_k, g_{k+1}, \ldots, g_{k+m}) \in \mathfrak{G}_{m+1}$, and $\mathbf{y} = (y_{k+m+r}, y_{k+m+r+1}, \ldots, y_N) \in \mathfrak{G}_{N-k-m-r+1}$. Put $\tilde{m} = m + 2r - 1$ and $\tilde{k} = k - r + 1$, then

$$\mathbb{P}_w \left\{ \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g} \middle| \mathbf{U}_{k-r+1}^{k+m+r} \leq \alpha, U_{k+m+r+j+1} \leq a_{j-1}, j \geq 0, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y} \right\}$$

$$= \mathbb{P}_w \left\{ \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g} \middle| \mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \quad \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y} \right\} \tag{III.6}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_w \left\{ \mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y} \middle| \mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g} \right\}}{\mathbb{P}_w \left\{ \mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y} \middle| \mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h} \right\}} \mathbb{P}_w \left\{ \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g} \middle| \mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h} \right\}.$$

Notice that,

$$\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\} \tag{III.7}$$

$$= \sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^r(g_{k+m},y_{k+m+r})} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}, \mathbf{x}_{k+m+1}^{k+m+r-1} = \mathbf{z}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\}.$$

For each $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^r(g_{k+m}, y_{k+m+r})$ one has:

$$\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}, \mathbf{x}_{k+m+1}^{k+m+r-1} = \mathbf{z}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\}$$

$$= \sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^r(h_{k-r},g_k)} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}, \mathbf{x}_{k+m+1}^{k+m+r-1} = \mathbf{z}, \mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{v}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\}$$

$$= \sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^r(h_{k-r},g_k)} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{v}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}, \mathbf{x}_{k+m+1}^{k+m+r-1} = \mathbf{z}\Big\}$$

$$\times\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k+m+1}^{k+m+r-1} = \mathbf{z}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{v}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\}$$

$$\times\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{v}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\}$$

$$=_{(\sharp)} C\,|\mathcal{F}|^{-(r-1)} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^r(h_{k-r},g_k)} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{v}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\}, \tag{III.8}$$

where $=_{(\sharp)}$ is because in the event $\{\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \quad \mathbf{x}_0^{k+m+r-1} = \mathbf{u}\}$ it follows that $\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}$ does not depend on the chosen $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{k+m+r+1}(w_{-1}, y_{k+m+r})$ which implies the first factor is equal to $C := \mathbb{P}\left\{\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}| \quad \mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1,\ \mathfrak{F}_0^{k+m+r-1}\right\} > 0$; and for all $k+m+1 \leq n \leq k+m+r-1$ the value of x_n only depends on the random variable V_n which is uniformly distributed on $\mathcal{F}$.

For each $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^r(h_{k-r}, g_k)$ it follows:

$$\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{v}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{v}\Big\}}{\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}\Big\}} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k-r+1}^{k-1} = \mathbf{v}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}\Big\}$$

$$=_{(\natural)} \frac{|\mathcal{F}|^{-(m+1)}}{\delta_{m+1}} |\mathcal{F}|^{-(r-1)}, \tag{III.9}$$

where, the denominator reduces by part (i), while the numerator and the term on the right both reduce by the same 'renewal-epoch' argument as in equation (III.8).

Combining equations (III.7), (III.8) and (III.9), and since $|\mathbb{C}^r(h_{k-r}, g_k)| = |\mathbb{C}^r(g_{k+m}, y_{k+m+r})| = |\mathbb{C}^r(0,0)| = |G|^{-1}|\mathcal{F}|^r$, we get

$$\mathbb{P}_w \Big\{ \mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big\}$$

$$= \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^r(g_{k+m}, y_{k+m+r})} C\,|\mathcal{F}|^{-(r-1)} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^r(h_{k-r}, g_k)} \frac{|\mathcal{F}|^{-(m+1)}}{\delta_{m+1}} |\mathcal{F}|^{-(r-1)} \tag{III.10}$$

$$= \frac{C\,|\mathcal{F}|^{-m+1}}{|G|^2\,\delta_{m+1}}.$$

On the other hand, one has:

$$\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}\Big\}$$

$$= \sum_{\mathbf{g}'\in\mathfrak{G}_{m+1}} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}'\Big\} \tag{III.11}$$

$$\times\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}'\ \Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}\Big\}$$

$$= \frac{C\,|\mathcal{F}|^{-m+1}}{|G|^2\,\delta_{m+1}} \sum_{\mathbf{g}'\in\mathfrak{G}_{m+1}} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}'\ \Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}\Big\} = \frac{C\,|\mathcal{F}|^{-m+1}}{|G|^2\,\delta_{m+1}}$$

Then, replacing (III.10) and (III.11) in (III.6), and using **(i)** we have for any $N > k+m+r$

$$\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_k^{k+m} = \mathbf{g}\Big|\quad \mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k}) = 1, \quad \mathbf{x}_0^{k-r} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{x}_{k+m+r}^N = \mathbf{y}\Big\} = \delta_{m+1},$$

so taking the limit as $N \to \infty$ we conclude the proof.

□

Now, consider $\Phi := \mathbf{a}\ id + \mathbf{b}\ \sigma + \mathbf{c}$ an affine c.a. defined on $\mathfrak{G}$. Recall $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are relatively prime to p and $\mathbf{c} = (\ldots, c, c, c, \ldots) \in \mathfrak{G}$. We will not distinguish the operations on G and $\mathfrak{G}$. Then given $\mathbf{x} \in \mathfrak{G}$, $i \in \mathbb{N}$ and $n \geq 1$ it follows

$$\Big(\Phi^n(\mathbf{x})\Big)_i = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{a}^{n-k}\mathbf{b}^k x_{i+k} + c \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \mathbf{a}^{k-\ell}\mathbf{b}^{\ell}.$$

For every $m \in \mathbb{Z}$ denote by $m^{(s)}$ its equivalent class $\mod (p^s)$ in $\mathbb{Z}_{p^s}$, then

$$\Big(\Phi^n(\mathbf{x})\Big)_i = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \mathbf{a}^{n-k}\mathbf{b}^k\right)^{(s)} x_{i+k} + c \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k} \left(\binom{k}{\ell} \mathbf{a}^{k-\ell}\mathbf{b}^{\ell}\right)^{(s)}. \tag{III.12}$$

Suppose $\ell, m, k \geq 0$, $n \geq m + \ell + 1$, and $m \leq k \leq n - \ell$, then we say that k is $(m, \ell)-$*isolated in* n if: (i) $\binom{n}{k}^{(s)} \neq 0$; and (ii) for every $k' \in \{k - m, \dots, k + \ell\}$, $k' \neq k$, then $\binom{n}{k'}^{(s)} = 0$.

Lemma III.2.3. *Let r be as before, $m \geq 0$, $n \geq 2r + 2m + 1$, and assume k is $(r + m, r + m)$-isolated in n. Then, for every $i \in \mathbb{N}$ and $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{m+1}$:*

$$\mathbb{P}_w\Big\{(\Phi^n\mathbf{x})_i^{i+m} = \mathbf{g}\Big| \mathbf{U}_{i+k-r+1}^{i+k+m+r} \leq \alpha, \quad U_{i+k+m+r+j+1} \leq a_{j-1}, \quad j \geq 0\Big\} = \delta_{m+1}$$

Proof. Define $\mathbf{X} = (X_i, \dots, X_{i+m})$ and $\mathbf{Y} = (Y_i, \dots, Y_{i+m})$ given for each $j \in \{0, \dots, m\}$ by

$$Y_{i+j} = \left(\binom{n}{k}\mathbf{a}^{n-k}\mathbf{b}^{k}\right)^{(s)} x_{i+j+k} \tag{III.13}$$

and

$$X_{i+j} := \Phi^n(\mathbf{x})_{i+j} - Y_{i+j}. \tag{III.14}$$

Notice that

$$\begin{aligned} X_{i+j} &= \sum_{\substack{k'=0\\k'\neq k}}^{n} \left(\binom{n}{k'}\mathbf{a}^{n-k'}\mathbf{b}^{k'}\right)^{(s)} x_{i+j+k'} \quad + \quad c\sum_{k'=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k'} \left(\binom{k'}{\ell}\mathbf{a}^{k'-\ell}\mathbf{b}^{\ell}\right)^{(s)} \\ &=_{(*)} \sum_{k'=0}^{k-r-m-1} \left(\binom{n}{k'}\mathbf{a}^{n-k'}\mathbf{b}^{k'}\right)^{(s)} x_{i+j+k'} \quad + \sum_{k'=k+r+m+1}^{n} \left(\binom{n}{k'}\mathbf{a}^{n-k'}\mathbf{b}^{k'}\right)^{(s)} x_{i+j+k'} \\ &\qquad + \quad c\sum_{k'=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k'} \left(\binom{k'}{\ell}\mathbf{a}^{k'-\ell}\mathbf{b}^{\ell}\right)^{(s)}, \end{aligned} \tag{III.15}$$

where $=_{(*)}$ is because k is $(r+m, r+m)$-isolated.

It follows from their definitions that $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{G}_{m+1}$ and $(\Phi^n\mathbf{x})_i^{i+m} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. In particular $\mathbf{Y} = \left(\binom{n}{k}\mathbf{a}^{n-k}\mathbf{b}^{k}\right)^{(s)} \cdot \mathbf{x}_{i+k}^{i+k+m}$. By Lemma 3.4 [15] $\binom{n}{k}^{(s)}$ is relatively prime to p. Since $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are also relatively prime to p, it follows that $\mathbf{d} = \left(\binom{n}{k}\mathbf{a}^{n-k}\mathbf{b}^{k}\right)^{(s)}$ has a multiplicative inverse $\mathbf{d}^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{p^s}$ and so $\mathbf{d}^{-1}\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{x}_{i+k}^{i+k+m}$. Hence, putting $\tilde{m} = m+2r-1$ and $\tilde{k} = i+k-r+1$:

$$\mathbb{P}_w\left\{(\Phi^n\mathbf{x})_i^{i+m} = \mathbf{g}\middle|\mathbf{U}_{i+k-r+1}^{i+k+m+r} \leq \alpha, \quad U_{i+k+m+r+j+1} \leq a_{j-1}, \quad j \geq 0\right\}$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{z}\in\mathfrak{G}_{n-k-r}\\ \mathbf{h}\in\mathfrak{G}_{k-r},\\ \mathbb{C}^{i+1}(w_{-1},h_0)\neq\emptyset}} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{Y}=\mathbf{g}-\mathbf{X}\Big|\mathbf{x}_i^{i+k-r-1}=\mathbf{h},\mathbf{x}_{i+k+m+r+1}^{i+m+n}=\mathbf{z},\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k})=1\Big\}$$

$$\times\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_i^{i+k-r-1}=\mathbf{h},\mathbf{x}_{i+k+m+r+1}^{i+m+n}=\mathbf{z}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k})=1\Big\}$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{z}\in\mathfrak{G}_{n-k-r}\\ \mathbf{h}\in\mathfrak{G}_{k-r},\\ \mathbb{C}^{i+1}(w_{-1},h_0)\neq\emptyset}} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_{i+k}^{i+k+m}=\mathbf{d}^{-1}(\mathbf{g}-\mathbf{X})\Big|\mathfrak{F}_0^{i+k-r}\vee\mathfrak{F}_{i+k+m+r}^{\infty},\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k})=1\Big\}$$

$$\times\mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_i^{i+k-r-1}=\mathbf{h},\mathbf{x}_{i+k+m+r+1}^{i+m+n}=\mathbf{z}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k})=1\Big\}$$

$$=_{(\sharp)} \delta_{m+1} \sum_{\substack{\mathbf{z}\in\mathfrak{G}_{n-k-r}\\ \mathbf{h}\in\mathfrak{G}_{k-r},\\ \mathbb{C}^{i+1}(w_{-1},h_0)\neq\emptyset}} \mathbb{P}_w\Big\{\mathbf{x}_i^{i+k-r-1}=\mathbf{h},\mathbf{x}_{i+k+m+r+1}^{i+m+n}=\mathbf{z}\Big|\mathbf{N}^{(\tilde{m})}(\tilde{k})=1\Big\}=\delta_{m+1},$$

where $=_{(\sharp)}$ follows from Lemma III.2.2(ii).

□

III.2.4.1 Proof of Theorem III.2.1

This proof uses strongly the Pascal triangle properties showed in [15].

First, let us introduce the following notation: For $a, i, n \in \mathbb{N}$, let $n = \sum_{j\in\mathbb{N}} n_j p^j$ be the decomposition of n in base p (so $n_j \in \{0, ..., p-1\}$ for every j); $J_i(n) := \{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0, j \geq i\}$; $\xi_i(n) := |J_i(n)|$; and $p^a\mathbb{N} := \{p^a \cdot n :\ n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} :\ n_j = 0, \forall j < a\}$.

Suppose $a \geq 2s + 1$, $p^a \geq 2m + 2r + 1$, and let $\mathcal{M} := \Big\{n \in p^a\mathbb{N} :\ n \geq p^2(m+r)^2,\ \xi_{a+\lfloor \frac{1}{2}\log_p(n)\rfloor}(n) \geq \frac{1}{5}\log_p(n)\Big\}$, where $\lfloor c\rfloor$ denotes the integer part of any given real number c, and so given $n \in \mathcal{M}$ let $A(n) := \{k \leq n :\ k\ is\ (m+r, m+r)-isolated\ in\ n\}$. Then, from the proof of Theorem 1.1 in [15], there exists $C \in \mathbb{R}$ (independent of n) such that $|A(n)| \geq n^C - 1$. Thus, for any $i \geq 0$,

$$\mathbb{P}\ \Big\{\ \exists k \in A(n)\ with\ \mathbf{U}_{i+k-r+1}^{i+k+m+r} \leq \alpha, \quad U_{i+k+m+r+j+1} \leq a_{j-1}, \quad j \geq 0\Big\}$$

$$= \mathbb{P}\Big\{\mathbf{N}^{(m+2r-1)}\big((i-r+1) + A(n)\big) \neq 0\Big\} = 1 - \varepsilon\big(|A(n)|\big) \geq 1 - \varepsilon(n^C - 1),$$

where $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ is a non-increasing function which converges to zero as n goes to infinity (see Subsection III.2.3.1)

Then, using Lemma III.2.3 we get for any $w \in \mathfrak{G}^-$, $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{m+1}$, and $n \in \mathcal{M}$:

$$\Big|\mathbb{P}_w\Big\{(\Phi^n\mathbf{x})_i^{i+m} = \mathbf{g}\Big\} - \delta_{m+1}\Big| \leq \varepsilon(n^C - 1).$$

Lemma 3.5 in [15] says that the relative density of $\mathcal{M}$ is one in $p^a\mathbb{N}$; that is,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{M} \cap \{1, \ldots, n\}|}{|p^a\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, n\}|} = 1.$$

This implies that the $(m+1)$-dimensional marginal of the Cesàro mean converges along $p^a\mathbb{N}$, that is,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|p^a\mathbb{N} \cap \{0, \ldots, N-1\}|} \sum_{n \in p^a\mathbb{N}\cap\{0,\ldots,N-1\}} \mathbb{P}\Big\{(\Phi^n \mathbf{x})_i^{i+m} = \mathbf{g}\Big\} = \delta_{m+1}$$

Therefore, since the Haar measure is invariant for powers of Φ, we have that for any $0 \leq j < p^a$, the $(m+1)$-dimensional marginal of the Cesàro mean also converges along $\mathcal{M}_j = \{n + j; n \in \mathcal{M}\}$. Hence, we conclude from the fact that

$$\begin{aligned} p^a & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \mathbb{P}\Big\{(\Phi^n \mathbf{x})_i^{i+m} = \mathbf{g}\Big\} \\ = & \sum_{0\leq j<p^a} \frac{1}{|\mathcal{M}_j \cap \{0, \ldots, N-1\}|} \sum_{n\in\mathcal{M}_j\cap\{0,\ldots,N-1\}} \mathbb{P}\Big\{(\Phi^n \mathbf{x})_i^{i+m} = \mathbf{g}\Big\} \\ = & \ \delta_{m+1} \end{aligned}$$

□

We can use Theorem III.2.1 together with Kitchens's result to conclude about the convergence of Cesàro mean distribution of wider classes of algebraic cellular automata. In fact, if we consider an Abelian k-block group shift $(\mathfrak{A}, \tilde{+})$, that is, the group operation $\tilde{+}$ is a sliding block code from $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ to $\mathfrak{G}$ with a k-block local rule (see [9] and [11]), then we can take the following result:

Proposition III.2.4. *Suppose* $(\mathfrak{A}, \tilde{+})$ *is* p^s*-torsion for some prime number* p*, and define* $\varphi := \mathbf{a} \cdot id \mathbin{\tilde{+}} \mathbf{b} \cdot \sigma \mathbin{\tilde{+}} \mathbf{c}$*, where* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}$ *are relatively prime to* p*, and* $\mathbf{c} \in \mathfrak{A}$ *is a constant sequence. If* μ *is a probability measure with complete connections and summable decay compatible with* $\mathfrak{A}$*, then the Cesàro mean distribution of the iterates of* μ *under the action of* φ *converges to the Haar measure.*

Proof. From Proposition 4 in [9] we set there exists a 1-block shift group $(\mathfrak{G}, +)$, such that $(\mathfrak{A}, \tilde{+}, \sigma_{\mathfrak{A}})$ is isomorphic to $(\mathfrak{G}, +, \sigma_{\mathfrak{G}})$, that is, there exists a map $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{G}$ which is a topological conjugacy between $(\mathfrak{A}, \sigma_{\mathfrak{A}})$ and $(\mathfrak{G}, \sigma_{\mathfrak{G}})$, and an isomorphism between $(\mathfrak{A}, \tilde{+})$ and $(\mathfrak{G}, +)$. Therefore, π is also a topological conjugacy between $(\mathfrak{A}, \varphi)$ and $(\mathfrak{G}, \Phi)$, where $\Phi = \mathbf{a} \cdot id_{\mathfrak{G}} + \mathbf{b} \cdot \sigma_{\mathfrak{G}} + \pi(\mathbf{c})$. In particular, $+$ is a 1-block operation on $\mathfrak{G}$, and so $(\mathfrak{G}, \Phi)$ is an affine cellular automaton as in Theorem III.2.1.

Suppose μ is a probability measure on $\mathfrak{A}$ with complete connections (compatible with $\mathfrak{A}$) and summable decay. We need to show that $\mu' := \mu \circ \pi^{-1}$ also has complete connections (compatible with $\mathfrak{G}$) and summable decay.

In fact, the construction of the proof of Proposition 4 in [9] gives that π is a Higher Block Code (see [11]). Without loss of generality we can consider π has memory ℓ and anticipation 0. Thus, given a cylinder $[a'_i, \ldots, a'_m]$ in $\mathfrak{G}$ we have that $\pi^{-1}\big([a'_i, \ldots, a'_m]\big) = [a_{i-\ell}, \ldots, a_m]$ is a cylinder in $\mathfrak{A}$. Hence, given $a' \in G$, for all $w' \in \mathfrak{G}^-$ such that $a' \in \mathcal{F}(w'_{-1})$, set $aw = \pi^{-1}(a'w')$ with $a \in \mathfrak{A}$ and $w \in \mathfrak{A}^-$. One has that

$$\mu'_{w'}(a') = \mu_{\pi^{-1}(w')}\big(\pi^{-1}(a')\big) = \mu_w(a) > 0,$$

and

$$\gamma'_m := \sup\left\{\left|\frac{\mu_{v'}(a')}{\mu_{w'}(a')} - 1\right| : \quad v', w' \in \mathfrak{G}^-; \quad v'_{-i} = w'_{-i},\ 1 \le i \le m; \quad a' \in \mathcal{F}(v'_{-1}) = \mathcal{F}(w'_{-1})\right\}$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{\mu_v(a)}{\mu_w(a)} - 1\right| :\ v, w \in \mathfrak{A}^-;\ v_{-i} = w_{-i},\ 1 \le i \le m+\ell;\ a \in \mathcal{F}(v_{-1}) = \mathcal{F}(w_{-1})\right\} = \gamma_{m+\ell}.$$

Now, since μ' has complete connections and summable decay, we use Theorem III.2.1 to get Φ randomizes μ' to ν', that is the Haar measure on $\mathfrak{G}$. Then

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu \circ \varphi^{-n} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu \circ \pi^{-1} \circ \Phi^{-n} \circ \pi \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu' \circ \Phi^{-n} \circ \pi = \nu' \circ \pi, \end{aligned}$$

and due to the uniqueness of the maximum-entropy measure we have $\nu' \circ \pi$ is the Haar measure on $\mathfrak{A}$.

□

Chapter IV

Autómatas celulares algebraicos

IV.1 Translaciones sobre cadenas de Markov topológicas

Sea $\Sigma_{\mathbf{A}}$ un *shift* de Markov. Decimos que $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \mathbf{g})$ es una translación si $\mathbf{g}$ es un autómata celular de radio 1, de la forma $\mathbf{g} = \mathbf{s} \circ \sigma$, donde $\mathbf{s} : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\mathbf{A}}$ es un código 1-bloque con regla local $s : L_{\mathbf{A}} \to L_{\mathbf{A}}$ que es una permutación sobre $L_{\mathbf{A}}$. En otras palabras,

$$\forall (e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}},\ \mathbf{g}\big((e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = \mathbf{s} \circ \sigma\big((e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = \big(s(e_{i+1})\big)_{i\in\mathbb{Z}}$$

Sea $F_{\mathbf{A}} := W(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, 2) \setminus \mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{A}}, 2)$ el conjunto de las palabras prohibidas de largo 2 que determinan $\Sigma_{\mathbf{A}}$ (ver §I.2.1). Directamente de su definición tenemos que toda translación sobre $\Sigma_{\mathbf{A}}$ tiene la propiedad que si $[a, b] \in F_{\mathbf{A}}$, entonces $[s(a), s(b)] \in F_{\mathbf{A}}$.

La siguiente proposición es un caso particular de un resultado más general presentado en [16]. La inclumos por poseer una demostración directa debido a la estructura particular de las translaciones.

Proposición IV.1.1. *Si* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \mathbf{g})$ *es una translación, entonces es topológicamente conjugado a* $(\Sigma_{\mathbf{A}'}, \sigma)$*, donde* $\Sigma_{\mathbf{A}'}$ *es un* shift *de Markov sobre el alfabeto* $\mathcal{A}$*.*

Proof. Definimos el conjunto de palabras prohibidas

$$F_{\mathbf{A}'} := \left\{[s^i(a), s^{i+1}(b)] \in \mathcal{W}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, 2) : [a, b] \in F_{\mathbf{A}},\ i \in \mathbb{Z}\right\},$$

y $\Sigma_{\mathbf{A}'}$ el *shift* de Markov definido a partir de $F_{\mathbf{A}'}$.

Definimos $\eta : \Sigma_{\mathbf{A}} \to Im(\eta)$, por $\eta\big((e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = \big(s^i(e_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}$. Se tiene que η es biyectivo y su inversa es $\eta^{-1}\big((e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = \big(s^{-i}(e_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}$. Veamos que $\eta(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \Sigma_{\mathbf{A}'}$:

De hecho, es directo que $\eta(\Sigma_{\mathbf{A}}) \subseteq \Sigma_{\mathbf{A}'}$. Por otro lado, dado $(e'_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}'}$ colocamos para cada $i \in \mathbb{Z}$, $e_i = s^{-i}(e'_i)$. Luego, se tiene que para todo $i \in \mathbb{Z}$, $[e'_i, e'_{i+1}] = [s^i(e_i), s^{i+1}(e_{i+1})]$, donde $[e_i, e_{i+1}] \notin \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$. Por lo tanto $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}}$, con lo que se deduce la inclusión opuesta.

Con eso se tiene que $\Sigma_{\mathbf{A}'}$ es el *shift vertical* asociado al sistema dinámico $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \mathbf{g})$, luego η es conjugación topológica entre $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \mathbf{g})$ y $(\Sigma_{\mathbf{A}'}, \sigma)$.

$\square$

IV.2 Autómatas celulares de tipo algebraico

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto finito y $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \Phi)$ un autómata de radio 1, con regla local $\phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Supongamos que $\mathbf{A}$ es una matriz de transición sobre el alfabeto $L_{\mathbf{A}} := \mathcal{A}$, la cual genera una cadena de Markov topológica $\Sigma_{\mathbf{A}}$ que verifica:

$$(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}} \Longrightarrow \big(\phi(x_i, y_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}} \tag{IV.1}$$

Luego, $\Phi(\Sigma_{\mathbf{A}}) \subseteq \Sigma_{\mathbf{A}}$ y por lo tanto podemos considerar la restricción de Φ a $\Sigma_{\mathbf{A}}$, la cual continuaremos a notar por Φ, de manera que $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ es un autómata celular de radio 1 definido sobre la cadena de Markov topológica $\Sigma_{\mathbf{A}}$. Sea $(L_{\mathbf{A}}, \bullet)$, donde $\bullet$ es la operación sobre $L_{\mathbf{A}}$, inducida por ϕ:

$$\forall a, b \in L_{\mathbf{A}}, a \bullet b := \phi(a, b)$$

Note que esta operación no verifica necesariamente ninguna propiedad algebraica. La hipótesis (IV.1) nos permite considerar $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$, donde $*$ es la operación cerrada en $\Sigma_{\mathbf{A}}$ inducida por $\bullet$,

$$\forall (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}}, (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} * (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} := (x_i \bullet y_i)_{i\in\mathbb{Z}},$$

En términos de $*$, el autómata celular se escribe como $\Phi = id * \sigma$.

IV.2.1 Autómatas celulares bipermutativos

Proposición IV.2.1. *Sea* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *un autómata celular de radio* 1 *y bipermutativo, definido sobre la cadena de Markov topológica* $\Sigma_{\mathbf{A}}$. *Sea* $\phi : L_{\mathbf{A}} \times L_{\mathbf{A}} \to L_{\mathbf{A}}$ *la regla local de* Φ *y supongamos que* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *verifica la propiedad (IV.1). Entonces,*

(i) $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *es topológicamente conjugado por un código 1-bloque a* (G, Φ_G)*, donde* $G = \mathbb{F} \times \Sigma_n$*,* $\mathbb{F}$ *finito,* Σ_n *es un* full n shift *y* Φ_G *es un autómata celular de radio* k*, dado por* $\Phi_G = id_G \otimes \sigma_G$*, donde* $\otimes$ *es una operación* k*-bloque de casi-grupo.*

(ii) *Si* $\mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = 0$ *(la entropía topológica del* shift *es cero), entonces* $\Sigma_n = \{\mathbf{a}\}$*, es decir, el* full shift *es trivial.*

(iii) *Si* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *es irreducible y tiene una sucesión constante, entonces* $\mathbb{F} = \{e\}$*, es decir,* $\mathbb{F}$ *es trivial.*

Proof. **(i)** Sea (Σ, Φ) un autómata celular de radio 1, bipermutativo y que verifica la propiedad (IV.1). Para $a, b \in L_{\mathbf{A}}$, notemos $a \bullet b = \phi(a, b)$. Luego, podemos escribir $\Phi = id * \sigma$, donde $*$ es la operación de casi-grupo en $\Sigma_{\mathbf{A}}$, inducida por $\bullet$.

Por el Teorema II.2.33, $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ es isomorfo a $(\mathbb{F} \times \Sigma_n, \otimes)$, donde $\otimes$ es una operación k-bloque, con anticipación $k-1$. Notamos $G = \mathbb{F} \times \Sigma_n$, $\varphi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to G$ al isomorfismo y definimos $\Phi_G := id_G \otimes \sigma_G$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi \circ \Phi &= \varphi \circ (id_{\Sigma_{\mathbf{A}}} * \sigma_{\Sigma_{\mathbf{A}}}) =_{(a)} (\varphi \circ id_{\Sigma_{\mathbf{A}}}) \otimes (\varphi \circ \sigma_{\Sigma_{\mathbf{A}}}) \\ &=_{(b)} (id_G \circ \varphi) \otimes (\sigma_G \circ \varphi) = (id_G \otimes \sigma_G) \circ \varphi = \Phi_G \circ \varphi \end{aligned}$$

donde $=_{(a)}$ se debe a que φ es un isomorfismo entre $*$ y $\otimes$, y $=_{(b)}$ se debe a que φ es un código 1-bloque (ver Teorema II.2.33), luego conmuta con la transformación *shift*.

Desde que $\otimes$ es una operación k-bloque, con anticipación $k-1$, tenemos que Φ_G tiene regla local $k+1$-bloque con anticipación k.

(ii) y (iii) Siguen directo del Teorema II.2.33.

$\square$

Observación IV.2.2. *Por el Remark II.2.36 podemos obtener un resultado análogo, pero teniendo* $\otimes$ *una operación con memoria* $k-1$ *y anticipación* 0*. Luego,* Φ_G *tendría memoria* k *y anticipación* 0*.*

Observe que Φ_G en el teorema anterior no necesariamente es bipermutativo. Por ejemplo, si $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ es un grupo y la operación $*$ es 1-bloque, se tiene que $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ es un *a.c. de grupo* (lo cual es bipermutativo), pero $(G, \otimes)$ puede ser un grupo *shift* con operación radio k para algún $k > 1$. Luego, (G, Φ_G) no puede ser permutativo a la derecha. De hecho, si denotamos $L_G := \varphi(L_{\mathbf{A}})$ y por $\rho : \mathcal{W}(G,k) \times \mathcal{W}(G,k) \to L_G$ la regla local de $\otimes$, entonces como σ_G es un automorfismo para el grupo (G, Φ_G) el elemento neutro $\mathbf{e}$ del grupo es tal que $\sigma_G(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$, lo que implica que $\mathbf{e} = (\ldots e, e, e, \ldots)$. Ahora, tomándose $w \in \mathcal{W}(G,k)$, $w = (\overbrace{e, e, \ldots, e}^{k})$, se tiene que para todo $a \in L_G$:

$$\phi_{G_w}(a) = \phi_G(wa) = \phi_G\big((\overbrace{e, e, \ldots, e, a}^{k+1})\big) = \rho\big((\overbrace{e, e, \ldots, e}^{k}), (\overbrace{e, e, \ldots, a}^{k})\big) = e$$

IV.2.2 Autómatas celulares permutativos a la derecha

En esta sección estudiaremos los autómatas celulares de tipo *N-scaling* y Ψ-asociativo, permutativos a la derecha y definidos sobre cadenas de Markov topológicas.

Decimos que un autómata celular $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ de radio 1 es *N-scaling* para algún $N \geq 2$ si su regla local $\phi : L_{\mathbf{A}} \times L_{\mathbf{A}} \to L_{\mathbf{A}}$ cumple para todo $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathbf{A}}$,

$$\big(\Phi^N(\mathbf{x})\big)_0 = x_0 \bullet x_N.$$

Decimos que el autómata es Ψ-asociativo, si existe una permutación $\Psi : L_{\mathbf{A}} \to L_{\mathbf{A}}$ tal que para cualesquiera $a, b, c \in L_{\mathbf{A}}$, se tiene que

$$(a \bullet b) \bullet c = \Psi\big(a \bullet (b \bullet c)\big)$$

Cuando $\Sigma_{\mathbf{A}} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, Host-Maass-Martínez [8] han demostrado que los autómatas *N-scaling* permutativos a la derecha son siempre topológicamente conjugados al producto de un *a.c. afín* con una translación, mientras los autómatas Ψ-asociativos permutativos a la derecha son siempre topológicamente conjugados al producto de un *a.c. de grupo* con una translación. El Teorema IV.2.4 reproduce ese resultado para el caso más general de cadenas de Markov topológicas. Para demostar ese resultado debemos recordar algunos hechos sobre tales autómatas celulares autómatas celulares:

Recuerdo IV.2.3.
- *Si* $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \Phi)$ *es un* a.c. ψ-asociativo*, por el Teorema 6 de [8], tenemos que existe* $\mathbf{u} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to K^{\mathbb{Z}} \times B^{\mathbb{Z}}$*, código 1-bloque, que conjuga topológicamente* $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \Phi)$ *y* $(K^{\mathbb{Z}} \times B^{\mathbb{Z}}, \Phi_K \times \mathbf{g}_B)$*, donde* $B \subseteq \mathcal{A}$ *y* K *son dos alfabetos finitos,* ϕ_K *es un* a.c. de grupo *y* $\mathbf{g}_B$ *es una translación.*

Recuerde que $\mathbf{g}_B = \mathbf{s}_B \circ \sigma_B$*, donde* $\mathbf{s}_B : B^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$ *es un código 1-bloque con regla local* $s_B : B \to B$*, una permutación sobre* B*. Además, [8] nos dá que* $s_B : B \to B$ *está definido para todo* $e' \in B$ *por* $s_B(e') = e'' \bullet e'$*, donde* $e'' \in B$ *es cualquiera.*

Además, $\mathbf{u}$ *tiene regla local* $u : \mathcal{A} \to K \times B$*, una biyección, dada para todo* $a \in \mathcal{A}$ *por*

$$u(a) = (\tilde{a}, e_a)$$

donde $\tilde{a}$ *es la clase de equivalencia de* $a \in \mathcal{A}$*, según la relación de equivalencia,*

$$a \sim b \Longleftrightarrow \forall c \in \mathcal{A},\ a \bullet c = b \bullet c$$

y e_a *es el único elemento de* $\mathcal{A}$ *para el cual* $a \bullet e_a = a$*. Para todo* $a \in \mathcal{A}$ *y* $e \in B$*, se tiene que* $a \bullet e \sim a$*. Además, se verifica que* $e_{a \bullet b} = e_a \bullet e_b = s_B(e_b)$*.*

Por fin, dado que Φ_K *es un* a.c. de grupo*, su regla local define una operación de grupo sobre* K*:*

$$\forall \tilde{a}, \tilde{b} \in K, \tilde{a} \tilde{\bullet} \tilde{b} := \phi_K(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

- *Por el Teorema 8 de [8], cuando* $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \Phi)$ *es un* a.c. N-scaling *todo lo anterior sigue igual, con excepción de que* Φ_K *será un a.c. afín y en la aplicación* $u(a) = (\tilde{a}, e_a)$*,* e_a *es definido como el único elemento de* B *para el cual la ecuación* $e_a = x \bullet a$ *tiene solución.*

Teorema IV.2.4. *Sea* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *un autómata celular* Ψ*-asociativo (o* N-scaling*) permutativo a la derecha, definido sobre la cadena de Markov topológica* $\Sigma_{\mathbf{A}}$*. Sea* $\phi : L_{\mathbf{A}} \times L_{\mathbf{A}} \to L_{\mathbf{A}}$ *la regla local de* Φ *y supongamos que* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *verifica la propiedad (IV.1). Entonces,* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *es topológicamente conjugado por un código* 1*-bloque a* $(\Sigma_K \times \Sigma_B, \Phi_K \times \mathbf{g}_B)$*, donde* Σ_K *y* Σ_B *son cadenas de Markov topológicas,* (Σ_K, Φ_K) *es un* a.c. de grupo *(o un* a.c. afín*) y* $(\Sigma_B, \mathbf{g}_B)$ *es una translación.*

Proof.

Paso 1 Dado que ϕ está definida para todo $L_{\mathbf{A}} = \mathcal{A}$, podemos considerar un autómata celular Ψ-asociativo (o N-scaling), de radio 1, con la misma regla local, que extiende Φ a $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Notaremos tal extensión también por Φ.

Sean $(K^{\mathbb{Z}} \times B^{\mathbb{Z}}, \Phi_K \times \mathbf{g}_B)$ el *a.c. grupo-translación* (o *afín-translación*) y $\mathbf{u} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to K^{\mathbb{Z}} \times B^{\mathbb{Z}}$ la conjugación topológica presentados en el Recuerdo IV.2.3.

Definimos en $K \times B$ la operación permutativa a la derecha inducida por la regla local de $\Phi_K \times \mathbf{g}_B$, que también notaremos por $\bullet$, y dada para todo $(\tilde{a}_1, e_1), (\tilde{a}_2, e_2) \in K \times B$ por

$$(\tilde{a}_1, e_1) \bullet (\tilde{a}_2, e_2) = \big(\tilde{a}_1 \tilde{\bullet} \tilde{a}_2, s_B(e_2)\big)$$

Observe que $u : \mathcal{A} \to K \times B$ es un isomorfismo entre $(\mathcal{A}, \bullet)$ y $(K \times B, \bullet)$. De hecho, u es biyectivo y

$$u(a \bullet c) = (\widetilde{a \bullet c}, e_{a \bullet c}) =_{(a)} (\tilde{a} \tilde{\bullet} \tilde{c}, e_a \bullet e_c)$$

$$= \big(\tilde{a}\tilde{\bullet}\tilde{c}, s_B(e_c)\big) = (\tilde{a}, e_a) \bullet (\tilde{c}, e_c) = u(a) \bullet u(c),$$

donde $=_{(a)}$ se debe al Teorema 6 (o 8) en [8].

La operación $\bullet$ en $K \times B$ induce de la manera canónica, componente a componente, una operación 1-bloque $*$ sobre $K^{\mathbb{Z}} \times B^{\mathbb{Z}}$. Luego, $\mathbf{u} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to K^{\mathbb{Z}} \times B^{\mathbb{Z}}$ es un isomorfismo entre $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, *)$ y $(K^{\mathbb{Z}} \times B^{\mathbb{Z}}, *)$.

Sea el SFT $\Lambda := \mathbf{u}(\Sigma_{\mathbf{A}}) \subseteq K^{\mathbb{Z}} \times B^{\mathbb{Z}}$. Como $\mathbf{u}$ es conjugación topológica entre Φ y $\Phi_K \times \mathbf{g}_B$, se cumple que $\Phi_K \times \mathbf{g}_B(\Lambda) = \Lambda$. De ahí, se tiene que el autómata $(\Lambda, \Phi_K \times \mathbf{g}_B)$ está bien definido y que la operación $*$ es cerrada en Λ. Además, $\mathbf{u}|_{\Sigma_{\mathbf{A}}}$ es conjugación topológica entre $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ y $(\Lambda, \Phi_K \times \mathbf{g}_B)$, e isomorfismo entre $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ y $(\Lambda, *)$.

Paso 2 Veamos que existe $M \geq 1$, tal que para todo $e \in B$, se tiene $s_B^M(e) = e$.

Dado que s_B es una permutación sobre B, entonces para todo $e \in B$, existe $M_e \geq 1$, tal que $s_B^{M_e}(e) = e$, como B es un alfabeto finito, podemos tomar M múltiplo de los periodos de cada elemento de B. Luego, se tiene el resultado.

Paso 3 Debido a la bipermutatividad de $\tilde{\bullet}$ existe $L \in \mathbb{N}$, tal que $\forall \tilde{a}, \tilde{c} \in K$ se verifican

$$\underbrace{(\,(\,(\tilde{c}\tilde{\bullet}\tilde{a})\ldots\tilde{\bullet}\tilde{a})\tilde{\bullet}\tilde{a})\tilde{\bullet}\tilde{a}}_{\tilde{a}\ \textit{multiplicado}\ L\ \textit{veces a la derecha de}\ \tilde{c}} \quad = \quad \underbrace{\tilde{a}\tilde{\bullet}(\tilde{a}\tilde{\bullet}(\tilde{a}\tilde{\bullet}\ldots(\tilde{a}\tilde{\bullet}\tilde{c})\,)\,)}_{\tilde{a}\ \textit{multiplicado}\ L\ \textit{veces a la izquierda de}\ \tilde{c}} \quad = \tilde{c}.$$

Paso 4 Probemos que $\Lambda = \Sigma_K \times \Sigma_B$, donde $\Sigma_K \subseteq K^{\mathbb{Z}}$ y $\Sigma_B \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ son dos *shift* de Markov.

Sean $\pi_K : \Lambda \to K^{\mathbb{Z}}$ y $\pi_B : \Lambda \to B^{\mathbb{Z}}$ las proyecciones canónicas sobre la primera y segunda coordenada, respectivamente.

Obviamente $\Lambda \subseteq \pi_K(\Lambda) \times \pi_B(\Lambda)$. Vamos a mostrar que $\pi_K(\Lambda) \times \pi_B(\Lambda) \subseteq \Lambda$.

Sean $(\tilde{c}_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \pi_K(\Lambda)$ y $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \pi_B(\Lambda)$. Luego, existen $(\tilde{c}_i, e'_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (\tilde{a}_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$ y

$$\underbrace{\left(\left(\left((\tilde{c}_i, e'_i)_{i\in\mathbb{Z}} * (\tilde{a}_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) * (\tilde{a}_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) \ldots * (\tilde{a}_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) * (\tilde{a}_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}}_{multiplicando\ (\tilde{a}_i,e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\ L\ veces\ a\ la\ derecha}$$

$$= \Bigg(\underbrace{(((\tilde{c}_i \tilde{\bullet} \tilde{a}_i)\tilde{\bullet}\tilde{a}_i) \ldots \tilde{\bullet}\tilde{a}_i)\tilde{\bullet}\tilde{a}_i}_{multiplicando\ \tilde{a}_i\ L\ veces\ a\ la\ derecha}, s_B(e_i)\Bigg)_{i\in\mathbb{Z}}$$

$$= \big(\tilde{c}_i, s_B(e_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$$

Ahora, repitiendo el procedimiento anterior, pero multiplicando $\big(\tilde{c}_i, s_B(e_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}}$ a la derecha por si mismo L veces, obtendremos que $\big(\tilde{c}_i, s_B^2(e_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$. Por inducción, se tiene que para todo $m \geq 0$, $\big(\tilde{c}_i, s_B^m(e_i)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$. Por el Paso 2 existe $M \geq 1$, tal que para todo $i \in \mathbb{Z}$ se tiene $s_B^M(e_i) = e_i$, luego concluimos que $\big(\tilde{c}_i, e_i\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$. Con esto probamos que $\Lambda = \pi_K(\Lambda) \times \pi_B(\Lambda)$.

Observe que $\mathbf{u}|_{\Sigma_{\mathbf{A}}}$ es un código 1-bloque entre $\Sigma_{\mathbf{A}}$ y Λ, cuya inversa también es 1-bloque. Luego, como $\Sigma_{\mathbf{A}}$ es un *shift* de Markov, sigue que Λ también es un *shift* de Markov.

Luego, como $\Lambda = \pi_K(\Lambda) \times \pi_B(\Lambda)$, se tiene que $\pi_K(\Lambda)$ y $\pi_B(\Lambda)$ también deben ser *shift* de Markov (se prueba por contradicción). Notamos $\Sigma_K := \pi_K(\Lambda)$ y $\Sigma_B := \pi_B(\Lambda)$.

□

Observe que (Σ_K, Φ_K) obtenido en el teorema anterior es un *a.c. de grupo* (o *a.c. afín*) que tiene la propiedad (IV.1) pero no necesariamente Σ_K tiene estructura de grupo *shift*. Además, como (Σ_K, Φ_K) es un autómata bipermutativo, podemos aplicar la Proposición IV.2.1 que nos dice que él es topológicamente conjugado por un código 1-bloque a (G, Φ_G), donde $G = \mathbb{F} \times \Sigma_n$ con $\mathbb{F}$ finito y Σ_n siendo un *full n shift*, y Φ_G es un autómata algebraico (un *a.c. de grupo* o *a.c. afín*) de radio k. Por otro lado, por la Proposición IV.1.1 tenemos que $(\Sigma'_B, \mathbf{g}_B)$ es topológicamente conjugado a (Σ_B, σ_B).

IV.3 Medidas Invariantes para autómatas celulares sobre cadenas de Markov topológicas

Sea $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ un autómata celular que verifica la propiedad (IV.1) y con $\Sigma_{\mathbf{A}}$ irreducible. Considere la acción $\mathbb{Z}^2$ definida por (Φ, σ) sobre $\Sigma_{\mathbf{A}}$.

Una cuestión importante es caracterizar las medidas sobre $\Sigma_{\mathbf{A}}$ que son invariantes para la acción (Φ, σ). Diversos trabajos ([8], [20], [24]) han tratado ese problema y para muchos casos demostrado que la única medida invariante es la medida de Parry (propiedad que es conocida como *rigidez*). Recordamos que la medida de Parry está definida como la única medida de máxima entropía para $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \sigma)$ y en el caso particular de que $\Sigma_{\mathbf{A}}$ es un grupo *shift* ella coincide con la medida de Haar sobre $\Sigma_{\mathbf{A}}$.

Utilizando las conjugaciones topológicas presentadas anteriormente, podemos deducir otros resultados de rigidez para $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$. Los siguientes teoremas son casos particulares de los resultados presentados por Sablik [24].

Teorema IV.3.1. *Sea* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *un* a.c. afín*, tal que* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *es irreducible y* $\mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \log p$*, donde* p *es número primo. Sea* μ *medida de probabilidad sobre* $\Sigma_{\mathbf{A}}$*,* (Φ, σ)*-invariante. Si* μ *es ergódico para* σ *y de entropía positiva para* Φ*, entonces* μ *es la medida de Parry.*

Proof. Como $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ es un *a.c. afín*, entonces es bipermutativo, es decir, $\phi(a, b) = a \bullet b$, donde $\bullet$ es una operación de casi-grupo sobre $L_{\mathbf{A}}$.

Por otro lado, por definición de *a.c. afín*, existe una operación de grupo Abeliano sobre $L_{\mathbf{A}}$, η y ρ automorfismos conmutantes y $k \in L_{\mathbf{A}}$, tales que $\phi(a, b) = \eta(a) + \rho(b) + k$. Ello implica que la operación $\bullet$ tiene la propiedad medial:

$$\forall a, b, c, d \in L_{\mathbf{A}}, \qquad (a \bullet b) \bullet (c \bullet d) = (a \bullet c) \bullet (b \bullet d)$$

Luego, la operación de casi grupo $*$ sobre $\Sigma_{\mathbf{A}}$, inducida por $\bullet$ también tiene la propiedad medial.

Por la Proposición IV.2.1, $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ es topológicamente conjugado por φ, un código 1-bloque a $(K^{\mathbb{Z}}, \Phi_K)$, con Φ_K dado por $\Phi_K = id \otimes \sigma$. Además ese mismo código es un isomorfismo entre los casi-grupos $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ y $(K^{\mathbb{Z}}, \otimes)$. De ahí se tiene que $\otimes$ también tiene la propiedad medial.

Como $\mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \log p$, con p número primo, el Teorema II.2.34 nos dá que $|K| = p$ y $\otimes$ es operación 1-bloque. Luego, por la Proposición II.2.8, existe una operación $\odot$ de casi-grupo sobre K, la cual genera la operación $\otimes$. Observe que la regla local de Φ_K es dada por $\phi_K(a', b') = a' \odot b'$.

Se tiene que $\odot$ también tiene la propiedad medial, luego por ([4], Theorem 2.2.2, p.70), existen una operación de grupo Abeliano sobre K, η' y ρ' automorfismos conmutantes, y $c' \in K$, tales que $a' \odot b' = \eta'(a') + \rho'(b') + c'$, es decir, $(K^{\mathbb{Z}}, \Phi_K)$ es un *a.c. afín*.

Ahora bien, sea $\mu' := \mu \circ \varphi^{-1}$. Se tiene que $(K^{\mathbb{Z}}, \mathbf{g})$ y μ' cumplen todas las hipótesis del Teorema 12 en [8]. Luego, μ' es la medida uniforme Bernoulli sobre $K^{\mathbb{Z}}$, i.e., la medida de máxima entropía. De ahí se concluye que μ es la medida de máxima entropía sobre $\Sigma_{\mathbf{A}}$.

$\square$

El siguiente teorema tiene demostración análoga al anterior, pero utilizando el Teorema 13 de [8] en lugar del Teorema 12.

Teorema IV.3.2. *Sea* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *un* a.c. afín*, tal que* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *es irreducible y* $\mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \log p$*, donde* p *es número primo. Sea* μ *medida de probabilidad sobre* $\Sigma_{\mathbf{A}}$*,* (Φ, σ)*-invariante. Supongamos que*

(i) μ *es ergódico para la acción de* (Φ, σ)*;*

(ii) μ *tiene entropía positiva para* Φ*;*

(iii) *La sigma-álgebra de los conjuntos $\sigma^{(p-1)p}$-invariantes coincide $\mathrm{mod}\ \mu$ con la sigma-álgebra de los conjuntos σ-invariantes.*

Entonces, μ es la medida de Parry.

Como ya discutimos anteriormente, dado un autómata celular $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ de radio 1 y bipermutativo con $\Sigma_{\mathbf{A}}$ irreducible, no siempre el autómata celular $(K^{\mathbb{Z}}, \Phi_K)$ obtenido por la Proposición IV.2.1 es también bipermutativo (ver §IV.2.1). En los casos que $(K^{\mathbb{Z}}, \Phi_K)$ sí es bimpermutativo, podemos extender los resultados sobre rigidez de Pivato [20] para $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$.

El problema de encontrar las condiciones necesarias sobre la regla local de Φ para que $(K^{\mathbb{Z}}, \Phi_K)$ sea bipermutativo permanece todavía abierto.

IV.4 Proyecciones de Medidas con conexiones completas y decaimiento sumable

En el Capítulo III presentamos resultados sobre la convergencia de la media de Cesàro de medidas con conexiones completas y decaimiento sumable bajo la dinámica de autómatas del tipo *afín* definidos sobre grupos *shift* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, +)$. En esta sección veamos las condiciones necesarias para reproducir el resultado del Teorema III.2.1 para el caso más general en que $\Sigma_{\mathbf{A}}$ no tiene estructura de grupo, pero $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ cumple la condición (IV.1).

Ejemplo IV.4.1. *Sea $(\Sigma_{\mathbf{A}}, *)$ el casi-grupo* shift *del Ejemplo II.1.1. Observe que la regla local de $*$ es una operación $\bullet$ de casi-grupo sobre $L_{\mathbf{A}}$ con la propiedad medial, luego existe una operación de grupo Abeliano sobre $L_{\mathbf{A}}$, η y ρ automorfismos conmutantes y*

$c \in L_{\mathbf{A}}$, *tales que* $a \bullet b = \eta(a) + \rho(b) + c$. *De ahí, si definimos* $\Phi := id * \sigma$, *claramente* $(L_{\mathbf{A}}^{\mathbb{Z}}, \Phi)$ *es un* a.c. afín *y como* $\Phi(\Sigma_{\mathbf{A}}) = \Sigma_{\mathbf{A}}$, *tenemos que* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *está bien definido. Sin embargo,* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *no soporta la operación* $+$ *(de hecho* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *no soporta ninguna operación de grupo* shift*).*

Las herramientas básicas que utilizaremos para estudiar la convergencia de la media de Cesàro de medidas de probabilidad bajo la acción de autómatas *afines* sobre cadenas de Markov topológicas que verifican (IV.1) son el Teorema III.2.1 y la Proposición IV.2.1. Los lemas siguientes nos dan condiciones para las cuales las propiedades de tener conexiones completas y decaimiento sumable de un medida son preservadas en su proyección por un *sliding block code*.

Lema IV.4.2. *Sean* Λ *y* Λ' *cadenas de Markov topológicas y sea* $\theta : \Lambda \to \Lambda'$ *un código* 1*-bloque invertible, lo cual es constante sobre los conjuntos de los predecesores. Supongamos que* θ^{-1} *tiene memoria* 1 *y anticipación* 0*. Si* μ *es una medida de probabilidad sobre* Λ*,* shift*-invariante, con conexiones completas (compatible con* Λ*) y decaimiento sumable, entonces* $\mu' = \mu \circ \theta^{-1}$ *también tiene conexiones completas (compatible con* Λ'*) y decaimiento sumable.*

Proof. Sea C' un cilindro de Λ' definido en las coordenadas $i = 0, \ldots, m$, con $m \geq 1$, es decir, $C' = [c'_0, \ldots, c'_m]$. Veamos que $C := \theta^{-1}(C')$ es un cilindro de Λ definido en las coordenadas $i = 1, \ldots, m$, es decir, $C = [c_1, \ldots, c_m]$.

Denotemos también por θ la regla local del *sliding block code*. Observe que para todo $1 \leq i \leq m$, $c_i \in L_\Lambda$ está bien definido $c_i := \theta^{-1}(c'_{i-1}, c'_i)$. Luego,

$$\theta^{-1}(C') = \bigcup_{\substack{c_0 \in \mathcal{P}(c_1) \\ \theta(c_0) = c_0'}} [c_0, c_1, \ldots, c_m] = \bigcup_{c_0 \in \mathcal{P}(c_1)} [c_0, c_1, \ldots, c_m] = [c_1, \ldots, c_m]$$

Usando un razonamiento análogo y dado que θ^{-1} tiene anticipación 0, dados $v', w' \in \Lambda'^{-}$, podemos definir $v := \theta^{-1}(v')$ y $w := \theta^{-1}(w')$, los cuales verifican $v, w \in \Lambda^{-}$. En particular, si $v'_{-i} = w'_{-i}$ para $1 \leq i \leq m$, con $m \geq 2$, entonces $v_{-i} = w_{-i}$ para $1 \leq i \leq m-1$.

Ahora, sea $w' \in \Lambda'^{-}$ y $a' \in \mathcal{F}(w'_{-1})$. Entonces, existen únicos $w \in \Lambda$ y $a \in \mathcal{F}(w_{-1})$, tales que $\mu'_{w'}(a') = \mu_w(a) > 0$ porque μ tiene conexiones completas (compatible con Λ). Entonces μ' tiene conexiones completas (compatible con Λ'). Además, para $m \geq 2$, se tiene

$$\gamma'_m = \sup\left\{\left|\frac{\mu'_{v'}(a')}{\mu'_{w'}(a')} - 1\right| :\ v', w' \in \Lambda'^{-};\ v'_{-i} = w'_{-i},\ 1 \leq i \leq m;\ a' \in \mathcal{F}(v'_{-1}) = \mathcal{F}(w'_{-1})\right\}$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{\mu_v(a)}{\mu_w(a)} - 1\right| :\ v, w \in \Lambda^{-};\ v_{-i} = w_{-i},\ 1 \leq i \leq m-1;\ a \in \mathcal{F}(v_{-1}) = \mathcal{F}(w_{-1})\right\} = \gamma_{m-1},$$

con lo que se concluye que μ' tiene decaimiento sumable.

$\square$

De manera análoga podemos demostrar que

Lema IV.4.3. *Sean Λ y Λ' cadenas de Markov topológicas y sea $\varphi : \Lambda \times \Sigma \to \Lambda' \times \Sigma$ el código definido por $\varphi := \theta \times id$, donde $\theta : \Lambda \to \Lambda'$ un código 1-bloque invertible, lo cual es constante sobre los conjuntos de los predecesores. Supongamos que θ^{-1} tiene memoria 1 y anticipación 0. Si μ es una medida de probabilidad sobre Λ,* shift-*invariante, con conexiones completas (compatible con Λ) y decaimiento sumable, entonces $\mu' = \mu \circ \theta^{-1}$ también tiene conexiones completas (compatible con Λ') y decaimiento sumable.*

Ahora bien, consideremos $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ un autómata celular de radio 1 y bipermutativo, lo cual verifica la propiedad (IV.1). Sea $\varphi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to G$ la conjugación topológica entre $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ y (G, Φ_G), donde $G = \mathbb{F} \times \Sigma_n$, dada por la Proposición IV.2.1. Por la Observación IV.2.2 podemos suponer que φ tiene memoria k y anticipación 0. Con esas notaciones, tenemos que:

Proposición IV.4.4. *Si $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ es un autómata celular bipermutativo de radio 1 y μ es una medida de probabilidad con conexiones completas (compatible con $\Sigma_{\mathbf{A}}$) y decaimiento sumable, entonces $\mu \circ \varphi^{-1}$ es medida de probabilidad sobre $G = \mathbb{F} \times \Sigma_n$ que tiene conexiones completas y decaimiento sumable.*

Proof. Por el Teorema II.2.33, φ es dada por la siguiente composición:

$$\varphi = \varphi_n \circ \eta_n \circ \varphi_{n-1} \circ \eta_{n-1} \circ \ldots \circ \varphi_1 \circ \eta_1,$$

donde para todo $i = 1, \ldots, n$, $\varphi_i = \theta_i \times id$ es un código como en el Lema IV.4.3 y η_i es un código invertible 1-bloque cuya inversa es también un código 1-bloque. Luego, para cada $i \leq n$ se tiene que η_i y φ_i preservan la propiedad de conexiones completas y decaimiento sumable de la medida, de donde se concluye el resultado.

$\square$

IV.5 Convergencia de medidas con conexiones completas y decaimiento sumable para autómatas algebraicos

En esa sección regresaremos al problema de la convergencía de la media de Cesàro de medidas de probalididades bajo la acción de autómatas celulares, es decir, estudiaremos el límite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Phi^n \mu.$$

Definición IV.5.1. *Dado un autómata celular $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ bipermutativo y de radio 1 que verifica la propiedad (IV.1), diremos que él es* regular *si el casi-grupo $(\mathbb{F} \times \Sigma_n, \otimes)$ obtenido en el Teorema IV.2.1 es tal que $\otimes = \otimes_{\mathbb{F}} \times \otimes_{\Sigma_n}$, donde $(\mathbb{F}, \otimes_{\mathbb{F}})$ y $(\Sigma_n, \otimes_{\Sigma_n})$ son casi-grupos. Además, si $\otimes_{\Sigma_n}$ es una operación 1-bloque, diremos $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ es* simple.

Ejemplo IV.5.2. *Si $\Sigma_{\mathbf{A}}$ es irreducible o $\mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = 0$, entonces $\Sigma_{\mathbf{A}}$ es regular por el Teorema II.2.33(ii,iii). Si $\mathbf{h}(\Sigma_{\mathbf{A}}) = p$, donde p es primo, entonces $\Sigma_{\mathbf{A}}$ es simple, por el Teorema II.2.34.*

Teorema IV.5.3. *Sea* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *un autómata celular de radio* 1 *que verifica (IV.1), donde* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *no necesariamente es irreducible. Suponga que* μ *es una medida con conexiones completas y decaimiento sumable sobre* $\Sigma_{\mathbf{A}}$*. Entonces:*

(i) *Si* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *es un* a.c. afín *regular y simple, entonces la media de Cesàro de* μ *bajo la acción de* Φ *converge;*

(ii) *Si* $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ *es* Ψ*-asociativo (o* N-scaling*) permutativo a la derecha, y además el* a.c. de grupo *(o* a.c. afín*) asociado a él (ver Teorema IV.2.4) es regular y simple, entonces la media de Cesàro de* μ *bajo la acción de* Φ *converge.*

Proof.

(i) Sean $(\mathbb{F} \times \Sigma_n, \Phi_{\mathbb{F}\times\Sigma_n})$ y $\varphi : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \mathbb{F} \times \Sigma_n$ el autómata celular y la conjugación topológica entregados por la Proposición IV.2.1. Por la Proposición IV.4.4, se tiene que $\mu' = \mu \circ \varphi^{-1}$ es una medida con conexiones completas y decaimiento sumable sobre $\mathbb{F} \times \Sigma_n$. Además, como $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ es regular y simple, se tiene $\Phi_{\mathbb{F}\times\Sigma_n} = \Phi_{\mathbb{F}} \times \Phi_{\Sigma_n}$, donde $(\Sigma_n, \Phi_{\Sigma_n})$ es *a.c. afín*. De hecho, $(\mathbb{F}\times\Sigma_n, \otimes_{\mathbb{F}\times\Sigma_n}) = (\mathbb{F}\times\Sigma_n, \otimes_{\mathbb{F}}\times\otimes_{\Sigma_n})$ tiene la propiedad medial, luego $(\Sigma_n, \otimes_{\Sigma_n})$ tiene la propiedad medial y podemos aplicar ([4], Theorem 2.2.2, p.70), usando un razonamiento análogo al del Teorema IV.3.1, para deducir que Φ_{Σ_n} es un *a.c. afín*.

Además, como $\mathbb{F}$ es finito, se tiene que $(\mathbb{F}, \Phi_{\mathbb{F}})$ es equicontinuo. Luego, por el Corolario 29 en [8], se tiene que la media de Cesàro de μ' bajo la acción de $\Phi_{\mathbb{F}\times\Sigma_n}$ converge a una medida de probabilidad $\mu'_{\mathbb{F}} \times \nu$, donde $\mu'_{\mathbb{F}}$ es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{F}$ la cual es invariante bajo $\Phi_{\mathbb{F}}$ y ν es la medida de Parry sobre Σ_n (que es la medida uniforme de Bernoulli). Como $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ es topológicamente conjugado a $(\mathbb{F} \times \Sigma_n, \Phi_{\mathbb{F}\times\Sigma_n})$, se concluye que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu \circ \Phi^{-n} = (\mu'_{\mathbb{F}} \times \nu) \circ \varphi.$$

(ii) Por el Teorema IV.2.4 y Proposición IV.2.1, y usando ([4], Theorem 2.2.2, p.70) en un razonamiento análogo al del Teorema IV.3.1, deducimos que $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \Phi)$ puede ser representado como $(\Sigma_B \times \mathbb{F} \times \Sigma_n, \mathbf{g}_B \times \Phi_{\mathbb{F}} \times \Phi_{\Sigma_n})$ una translación sobre una cadena de Markov topológica producto un *a.c. de grupo* o un *a.c. afín* sobre un conjunto finito producto un *a.c. de grupo* o un *a.c. afín* sobre un *full shift*. Luego, por el Corolario 29 de [8], se concluye que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu \circ \Phi^{-n} = \mu_{\Sigma_B} \times (\mu'_{\mathbb{F}} \times \nu) \circ \varphi.$$

□

Ejemplo IV.5.4. *El autómata del Ejemplo IV.4.1 es un* a.c. afín *regular y simple, pues aplicando el razonamiento descrito en la demostración de la Proposición IV.2.1 se deduce que él es topológicamente conjugado a* $(\mathbb{F} \times \mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}, \Phi_{\mathbb{F}} \times \Phi_{\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}})$*, donde* $\mathbb{F} = \{(\ldots, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots)\}$*,* $\Phi_{\mathbb{F}} = \sigma_{\mathbb{F}}$ *y* $\Phi_{\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}} = id + \sigma$*. Luego, la media de Cesàro de medidas de probabilidad sobre* $\Sigma_{\mathbf{A}}$ *con conexiones completas y decaimiento sumable bajo la acción de él converge.*

Ejemplo IV.5.5. *Sea* $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ *un conjunto donde está definida la operación* $\bullet$ *dada por la siguiente tabla:*

$\bullet$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	b	a	d	c	f	e	h	g
b	b	a	d	c	f	e	h	g
c	d	c	b	a	h	g	f	e
d	d	c	b	a	h	g	f	e
e	f	e	h	g	b	a	d	c
f	f	e	h	g	b	a	d	c
g	h	g	f	e	d	c	b	a
h	h	g	f	e	d	c	b	a

Sea $\Lambda \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ el subshift *determinado por el grafo de la Figura IV.1.*

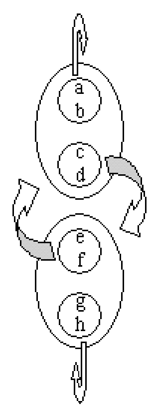

Figure IV.1: Grafo que genera la cadena de Markov topológica Λ.

Definimos $\phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por $\phi(u, v) = u \bullet v$ y consideramos el autómata $\Phi : \Lambda \to \Lambda$ de radio 1 y permutativo a la derecha que tiene ϕ como regla local.

Se tiene que (Λ, Φ) es un autómata permutativo a la derecha y Ψ-asociativo, donde Ψ está dado por $\Psi(\cdot) := \phi(a, \cdot)$.

Usando el algoritmo desarrollado en la demostración del Teorema IV.2.4, obtenemos que (Λ, Φ) *es topológicamente conjugado a* $\big(\Sigma \times \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \Phi_\Sigma \times \mathbf{g}\big)$*, donde:* $\Sigma \subset (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$*;* Φ_Σ *es un* a.c. de grupo*; y* $\mathbf{g}$ *es una translación sobre* $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *dada por* $\mathbf{g}\big((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = \big(\Psi(x_{i+1})\big)_{i\in\mathbb{Z}}$.

Usando el algoritmo desarrollado en la demostración de la Proposición IV.2.1 encontramos que (Σ, Φ_Σ) *es topológicamente conjugado al* a.c. de grupo $(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}, \tilde{\Phi})$*, luego él es regular y simple. Por lo tanto, el Teorema IV.5.3 nos dá la convergencia de la media de Cesàro de medidas con conexiones completas y decaimiento sumable bajo la acción de* (Λ, Φ).

Bibliography

[1] ADLER, R. L., AND MARCUS, B. (1979). Topological entropy and equivalence of dynamical systems. *Memoirs of Amer. Math. Soc.* **219**.

[2] ATHREYA, K. B., AND NEY, P. (1978). A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains. *Transactions of the AMS* **245**, 493–501.

[3] BRESSAUD, X., FERNÁNDEZ, R. AND GALVES, A. (1999). Decay of correlations for non Hölderian dynamics. A coupling approach. *Electron. J. Probab.* **4**(3), 19 pp.

[4] DÉNES, J. AND KEEDWELL A. D. (1974). Latin squares and their applications. *New York-London, Academic Press.*

[5] FERRARI, P. A., MAASS, A. AND MARTÍNEZ, S. (1999). Cesàro mean distribution of group automata starting from Markov measures. Preprint.

[6] FERRARI, P. A., MAASS, A., MARTÍNEZ, S. AND NEY, P. (2000). Cesàro mean distribution of group automata starting from measures with summable decay. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **20**, 6, 1657–1670.

[7] FURSTENBERG, H. (1967). Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Math. Systems Th.* **1**, 1–55.

[8] HOST, B., MAASS, A. AND MARTÍNEZ, S. (2003). Uniform Bernoulli measure in dynamics of permutative cellular automata with algebraic local rules. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **9**, 6, 1423–1446.

[9] KITCHENS, B. P. (1987). Expansive dynamics on zero-dimensional groups. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **7**, 2, 249–261.

[10] LIND, D. A. (1984). Applications of ergodic theory and sofic systems to cellular automata. *Phys. D* **10**, 1-2, 36–44.

[11] LIND, D. A. AND MARCUS, B. (1995). An introduction to symbolic dynamics and coding. *Cambridge, Cambridge University Press.*

[12] MAASS, A. AND MARTÍNEZ, S. (1998). On Cesàro limit distribution of a class of permutative cellular automata. *J. Statist. Phys.* **90**, 1-2, 435–452.

[13] MAASS, A. AND MARTÍNEZ, S. (1999). Time averages for some classes of expansive one-dimensional cellular automata. In *Cellular automata and complex systems (Santiago, 1996)*. Nonlinear Phenom. Complex Systems, Vol. **3**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 37–54.

[14] MAASS, A., MARTÍNEZ, S., PIVATO, M. AND YASSAWI, R. (2006). Asymptotic randomization of subgroup shifts by linear cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **26**, 4, 1203–1224.

[15] MAASS, A., MARTÍNEZ, S., PIVATO, M. AND YASSAWI, R. (2006). Attractiveness of the Haar measure for linear cellular automata on Markov subgroups. *IMS Lecture Notes - Monograph Series, Dynamics and Stochastics* **48**, 100–108. *Festschrift in honour of Michael Keane.*

[16] NASU, M. (1978). Local Maps Inducing Surjective Global Maps of One-Dimensional Tessellation Automata. *Math. Systems Theory Related Fields* **11**, 327–351.

[17] VON NEUMANN, J. (1966). Theory of Self-reproducing Automata (edited and completed by A. W. Burks). *University of Illinois Press.*

[18] NEY, P., AND NUMMELIN, E. (1993). Regeneration for chains with infinite memory. *Probab. Theory Related Fields* **96**(4), 503–520.

[19] PARRY, W. (1981). Topics in ergodic theory. *Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge.*

[20] PIVATO, M. (2005). Invariant measures for bipermutative cellular automata. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **12**, 4, 723–736.

[21] PIVATO, M. AND YASSAWI, R. (2002). Limit measures for affine cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **22**, 4, 1269–1287.

[22] PIVATO, M. AND YASSAWI, R. (2004). Limit measures for affine cellular automata II. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24**, 6, 1961–1980.

[23] PONTRJAGIN, L. (1946). Topological Groups. *Princeton University Press.*

[24] SABLIK, M. (2005). Measure rigidity for algebraic bipermutative cellular automata. *Preprint available in http://arxiv.org/abs/math/0510564*.

[25] SCHMIDT, K. (1995). Dynamical systems of algebraic origin.*Progress in Mathematics*, Vol. **128**. Birkhäuser Verlag, Basel.

[26] SINDHUSHAYANA, N. T., MARCUS, B. AND TROTT, M. (1997). Homogeneous shifts. *IMA J. Math. Control Inform.* **14**, 3, 255–287

[27] WALTERS, P. (1990). An Introduction to Ergodic Theory. *New York, Springer-Verlag.*

[28] WILLIAMS, R. F. (1973). Classification of subshifts of finite type. *Ann. of Math.* **98**, 120–153. Errata: *Ann. of Math.* **99**, 380–381.