Computação Numérica II - Prof. Mário - 08/10/2005

Aula 1: Integração numérica

Resumo: *Nem sempre é possível obter uma forma analítica simplificada para calcular de uma integral. Nesta aula vamos estabelecer algumas fórmulas para calcular a integração numérica.*

Em vários problemas práticos não se conhece a forma analítica da função que se deseja integrar. Mesmo que se conheça a forma analítica, o cálculo da primitiva pode ser trabalhoso ou mesmo resultar em funçoes que não podem ser expressas em termos de funçoes elementares.

Em geral as formas numéricas de avaliar a integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

estão baseadas em aproximar o integrando f por um polinômio que o aproxime no intervalo $[a, b]$.

Regra dos trapézios

A regra dos trapézios consiste em aproximar f por uma função linear por partes:

$$T_n(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

em que

$$h = \frac{b-a}{n}\,; \qquad x_j = a + jh\,, \quad j = 0, 1, \ldots n$$

Regra de Simpson

A regra dos trapézios consiste em aproximar f por uma função quadrática por partes:

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-2}) + f(x_n)\right]$$

Fórmulas para o erro

Pode-se mostrar que o erro cometido pelo cálculo das regras do trapézio e de Simpson são:

$$E_n^T(f) \equiv I(f) - T_n(f) = \frac{-h^2(b-a)}{12}f''(c_n) \;\approx\; \frac{-h^2(b-a)}{12}[f'(b) - f'(a)] = \tilde{E}_n^T(f)$$

$$E_n^S(f) \equiv I(f) - S_n(f) = \frac{-h^4(b-a)}{180}f^{(4)}(c_n) \;\approx\; \frac{-h^4(b-a)}{180}[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a) = \tilde{E}_n^S(f)$$

em que $c_n \in [a, b]$. As expressões para $\tilde{E}_n^T(f)$ e $\tilde{E}_n^S(f)$ são as estimativas práticas.

Exercícios

1. Programe com MATLAB as regras de integração dadas nesta aula.
2. Avalie seus programas para obter uma aproximação para as integrais abaixo:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \;\;; \qquad\qquad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$$

3. Explique o porquê as estimativas para das fórmulas dos erros descritas acima.
4. Pesquise e deduza a fórmula de integração do *ponto médio*.