Profa. Cristiane - 29/04/2006
Aula 10 - Métodos de Otimização Restrita

4.1 - Minimização com restrições lineares de igualdade

Problema geral:

$$\begin{array}{lll} (P1) & Min & f(x) \\ & s.a & h(x) = 0 \\ & & g(x) \leq 0 \quad x \in \Omega \subset \Re^n \end{array}$$

onde $f(\cdot) : \Re^n \rightarrow \Re$; $g(\cdot) : \Re^n \rightarrow \Re^p$ e $h(\cdot) : \Re^n \rightarrow \Re^m$, $m \leq n$. f, g e $h \in \mathcal{C}^2$ e lineares para g e h.

Conceito de restrição ativa: Uma desigualdade $g_i(x) \leq 0$ é dita ser ativa em um ponto factível $\overline{x}$ se $g_i(\overline{x}) = 0$ e inativa em $\overline{x}$ se $g_i(\overline{x}) < 0$. Por convenção, qualquer restrição de igualdade $h_i(\overline{x}) = 0$ é ativa para qualquer ponto factível.

Assim, podemos considerar soluções locais apenas avaliando as restrições de igualdade. Para complementar o problema (P1), basta adicionar informações na resolução considerando apenas as restrições ativas.

Conceito de plano tangente: Um conjunto de restrições de igualdade no $\Re^n$, $h_1(\overline{x}) = 0, h_2(\overline{x}) = 0, \cdots, h_m(\overline{x}) = 0$ define um subconjunto do $\Re^n$ representando uma hipersuperfície. Se as restrições são regulares em todos os pontos a hipersuperfície é de dimensão $(n - m)$. Se todas as funções h_i são classe $\mathcal{C}^1$ então a hipersuperfície é suave.

Definição 1: Considere todas as curvas diferenciáveis em uma superfície S passando pelo ponto x^*. O plano tangente em x^* é definido como a coleção de derivadas em x^* para todas estas curvas diferenciáveis. O plano tangente é um subespaço do $\Re^n$.

Definição 2: Um ponto x^* satisfazendo a restrição $h(x^*) = 0$ é um ponto regular da restrição se os vetores gradientes $\nabla h_1(x^*)$, $\nabla h_1(x^*)$, $\cdots$, $\nabla h_m(x^*)$ são LI.

Em ponto regulares é possível caracterizar o plano tangente em termos dos gradientes das funções de restrições.

Teorema 1: Em um ponto regular x^* da superfície S definida por $h(x) = 0$, o plano tangente é igual a $M = \{y : \nabla h(x^*) y = 0\}$.

4.1.1 - Condições necessárias de 1^a ordem

Lema: Seja x^* um ponto regular das restrições $h(x) = 0$ e um ponto extremo local de f sujeito a estas restrições. Então todos $y \in \Re^n$ satisfazendo $\nabla h(x^*) y = 0$ também deve satisfazer $\nabla f(x^*) y = 0$.

Teorema 2: Seja x^* um ponto extremo de f sujeito ao conjunto de restrições $h(x) = 0$. Suponha que x^* é um ponto regular dessas restrições. Então existe um $\lambda \in \Re^m$ tal que $\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla h(x^*) = 0$

4.1.2 - Condições necessárias e suficientes de 2^a ordem

Teorema 3 (condições necessárias de 2^a ordem): Suponha que x^* é um mínimo local de f sujeito a $h(x) = 0$ e que x^* é um ponto regular destas restrições. Então existe um $\lambda \in \Re^m$ tal que $\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla h(x^*) = 0$. Se denotarmos $M = \{y : \nabla h(x^*) y = 0\}$ o plano tangente, então a matriz $L(x^*) = F(x^*) + \lambda^t H(x^*)$ é semidefinida positiva em M, ou seja, $y^t L(x^*) y \geq 0$, $\forall y \in M$.

Teorema 4 (condições suficientes de 2^a ordem): Suponha que existe um ponto x^* satisfazendo $h(x^*) = 0$ e um $\lambda \in \Re^m$ tal que $\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla h(x^*) = 0$. Suponha também que a matriz $L(x^*) = F(x^*) + \lambda^t H(x^*)$ é definida positiva em $M = \{y : \nabla h(x^*) y = 0\}$, ou seja, para $y \in M$, $y \neq 0$ vale $y^t L(x^*) y > 0$. Então x^* é um mínimo estrito local de f sujeito a $h(x) = 0$.