Profa. Cristiane - 06/05/2006
Aula 11 - Métodos de Otimização Restrita (continuação)

4.2 - Minimização com restrições lineares de desigualdade

Problema geral:

$$\begin{array}{lll} (P1) & Min & f(x) \\ & s.a & h(x) = 0 \\ & & g(x) \leq 0 \quad x \in \Omega \subset \Re^n \end{array}$$

onde $f(\cdot) : \Re^n \to \Re$; $g(\cdot) : \Re^n \to \Re^p$ e $h(\cdot) : \Re^n \to \Re^m$, $m \leq n$. f, g e $h \in \mathcal{C}^2$ e lineares para g e h.

4.2.1 - Condições necessárias de 1^a ordem

Definição 1: Seja x^* um ponto satisfazendo as restrições

$$h(x^*) = 0 \quad \text{e} \quad g(x^*) \leq 0 \qquad (1)$$

e seja $\mathcal{J}$ o conjunto dos índices j para os quais $g_j(x^*) = 0$. Então x^* é um ponto regular para as restrições (1) se os vetores gradientes $\nabla h_i(x^*)$, $\nabla g_j(x^*)$, $1 \leq i \leq m$ e $j \in \mathcal{J}$ são LI.

Teorema 1 (condições de Kuh-Tucker): Seja x^* um ponto relativo para o problema (P1) e suponha que x^* é um ponto regular para as restrições. Então existe um vetor $\lambda \in \Re^m$ e um vetor $\mu \in \Re^p$ com $\mu \geq 0$ tal que

$$\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla h(x^*) + \mu^t \nabla g(x^*) = 0$$

$$\mu^t g(x^*) = 0$$

4.2.2 - Condições necessárias e suficientes de 2^a ordem

Teorema 2 (condições necessárias de 2^a ordem): Suponha as funções $f, g, h \in \mathcal{C}^2$ e que x^* é um ponto regular das restrições $h(x) = 0$ e $g(x) \leq 0$. Se x^* é um ponto mínimo relativo para o problema (P1), então existe um $\lambda \in \Re^m$ e um $\mu \in \Re^p$, $\mu \geq 0$ tal que as condições de Kuhn-Tucker são verdadeiras e tal que

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^t H(x^*) + \mu^t G(x^*)$$

é semi definida positiva no subespaço $M = \{y : \nabla h(x^*)y = 0, \nabla g_j(x^*)y = 0, \forall j \in \mathcal{J}\}$, onde
$\mathcal{J} = \{j : g_j(x^*) = 0, \mu_j > 0\}$.

Teorema 3 (condições suficientes de 2^a ordem): Seja $f, g, h \in \mathcal{C}^2$. As condições suficientes para que um ponto x^* satisfazendo $h(x) = 0$ e $g(x) \leq 0$ seja um ponto de mínimo relativo estrito para o problema (P1) é que exista $\lambda \in \Re^m$ e $\mu \in \Re^p$ tal que

$$\mu \geq 0$$

$$\mu^t g(x^*) = 0$$

$$\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla h(x^*) + \mu^t \nabla g(x^*) = 0$$

e a matriz hessiana

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^t H(x^*) + \mu^t G(x^*)$$

seja positiva definida no subespaço tangente das restrições ativas em x^*.