AULA-12-13 (20/05/2006) SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: MÉTODOS DE PASSO MÚLTIPLO

RESUMO: *Uma dificuldade na solução numérica do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = \alpha \end{cases}, \tag{1}$$

através de métodos baseados no teorema de Taylor é o cálculo de derivadas $f'(t,y(t))$, $f''(t,y(t))$, etc. Mostraremos que o cálculo de derivadas pode ser contornado usando métodos baseados em interpolação polinomial.

Teoria: Os métodos são baseados na observação de que, integrando a EDO $y' = f(t,y)$ de t_k até t_{k+1}, obtem-se

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y(t))dt, \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{2}$$

Como não podemos integrar $f(t,y(t))$ porque $y(t)$ não é conhecido, a idéia dos métodos é integrar um polinômio interpolador $p(t)$ que passe pelos pontos :

$$(t_{k-m}, f_{k-m}),\ (t_{k-m+1}, f_{k-m+1}), \ldots, (t_{k-1}, f_{k-1})\ (t_k, f_k),$$

onde $f_k = f(t_k, u_k)$ e u_k são aproximações para $y(t_k)$ previamente obtidos.

• Se $m = 1$, $p_1(t)$ é a reta que interpola os pontos (t_{k-1}, f_{k-1}) e (t_k, f_k) descrita por

$$p(t) = f_k - \frac{(t-t_k)}{h}(f_{k-1} - f_k), \quad \text{com } h = t_{k+1} - t_k.$$

Usando este polinômio em (2) em lugar de $f(y,y(t))$, após integração obtemos:

Método de Adams-Bashforth de Passo 2:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta \quad \text{(condições iniciais)} \\ u_{j+1} = u_j + \dfrac{h}{2}[3f(t_j,u_j) + f(t_{j-1},u_{j-1})], \quad j = 1,\ldots,n-1. \end{cases} \tag{3}$$

• Se $m = 2$, $p_2(t)$ é a parábola que interpola os pontos (t_{k-2}, f_{k-2}), (t_{k-1}, f_{k-1}) e (t_k, f_k) descrita por

$$p_2(t) = p_1(t) + \frac{(t-t_k)(t-t_{k-1})}{2h^2}(f_k - 2f_{k-1} - f_{k-2}),$$

Usando este polinômio em (2) em lugar de $f(t,y(t))$, após integração, obtemos:

Método de Adams-Bashforth de Passo 3:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta,\ u_2 = \gamma \quad \text{(condições iniciais)} \\ u_{j+1} = u_j + \dfrac{h}{12}[23f(t_j,u_j) - 16f(t_{j-1},u_{j-1} + 5f(t_{j-2},u_{j-2})], \quad j = 2,\ldots,n-1. \end{cases} \tag{4}$$

Prova-se teoricamente que os métodos acima atingem uma precisão $O(h^2)$ e $0(h^3)$ respectivamente. Métodos de passo superior a três são obtidos de forma análoga.

Exercício

1. Considere o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 3 \\ y(0) = 1/2 \end{cases} \tag{5}$$

Implemente computacionalmente os métodos múltipasso acima com $n = 10, 20,$ e 50. Calcule o erro $|u_j - y(t_j)|$ usando o fato de que a solução do PVI é $y(t) = (t+1)^2 - e^t/2$. Compare os resultados com aqueles obtidos pelo métodos da série de Taylor e de Runge-Kutta.

Fpolis, 20/06/2006

Fermín S. V. Bazán