Profa. Cristiane - 18/02/2006
Aula 2 - Condições de Otimalidade

2.1 - Mínimos locais e globais de uma função

Definição 1: Diz-se que x^* é uma solução minimizante do problema

$$(P) \qquad \underset{x}{Min} \quad f(x)$$
$$x \in \Omega$$

onde $\Omega \subset \Re^n$ e $f : \Omega \to \Re$. Se $x^* \in \Omega$ e $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall\, x \in \Omega$ então diz-se que o mínimo existe.

Teorema 2.1 (Teorema de Weiertstrass): Seja Ω um conjunto não-vazio, fechado e limitado e $f : \Omega \to \Re$ uma função contínua sobre Ω. Então o problema (P) possui um mínimo, isto é, existe uma solução minimizante para o problema.

Definição 2: Diz-se que um ponto $x^* \in \Omega$ é um mínimo local de f sobre Ω se existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall\, x \in \Omega \cap B(x^*) = \{x : \|x - x^*\| < \epsilon\}.$$

Um ponto $x^* \in \Omega$ é um mínimo global de f sobre Ω se $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall\, x \in \Omega$.

2.2 - Condições de otimalidade para problemas irrestritos

Teorema 1 (Caso real): Seja $f : \Re \to \Re$, $f \in \mathcal{C}^1$. Se x^* é um minimizador local de f em $\Re$, então $f^{'}(x^*) = 0$.

Teorema 2 (Caso real): Seja $f : \Re \to \Re$, $f \in \mathcal{C}^2$. Se x^* é um minimizador local de f em $\Re$, então $f^{'}(x^*) = 0$ e $f^{''}(x^*) \geq 0$.

Proposição 1 (Condições necessárias de 1^a ordem): Seja $f : \Re^n \to \Re$, $f \in \mathcal{C}^1$. Se x^* é um minimizador local de f em $\Re^n$, então $\nabla f(x^*) = 0$.

Proposição 2 (Condições necessárias de 2^a ordem): Seja $f : \Re^n \to \Re$, $f \in \mathcal{C}^2$. Se x^* é um minimizador local de f em $\Re^n$, então $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$

Proposição 3 (Condições suficientes de 2^a ordem): Seja $f : \Re^n \to \Re$, $f \in \mathcal{C}^2$. Se $x^* \in \Re^n$, $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*) > 0$, então x^* é um minimizador local estrito de f em $\Re^n$.

Exercício de Fixação:

Obtenha expressões para as derivadas primeiras e segundas da função de *Rosenbrock*

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Verifique que $\overline{x} = (1, 1)^t$ é um minimizador local. Mostre que $\nabla^2 f(\overline{x})$ é singular se e somente se $x_2 - x_1^2 = 0.005$.