AULA-2 (11/02/2006) INTERPOLAÇÂO POLINOMIAL

RESUMO: *Muito do trabalho a ser abordado no semestre envolve cálculos com polinômios. Nesta aula discutiremos resultados teóricos sobre interpolaçao polinomial bem como os práticos referentes ao trabalho computacional com polinômios.*

Resultados mais Importantes

Teorema 1 (Existência e Unicidade) *Se $x_0,\ x_1, \dots, x_n$ são $n+1$ números distintos e $f(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$ os valores de alguma função f, então existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n tal que*

$$p(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Obs. A prova é construtiva e baseada na definição dos polinômios de Lagrange:

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \tag{1}$$

p é chamado de polinômio interpolador de f. Computacionalmente, usaremos **POLYFIT, POLYVAL, etc** (aula anterior)

Teorema 2 (Estimativa de Erro) *Assuma que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ e que f é uma função com $n+1$ derivadas contínuas em $[a, b]$. Entao, para cada $x \in [a, b]$, existe um número $\gamma \in (a, b)$ que depende de x, tal que*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \tag{2}$$

onde $p(x)$ é o polinômio interpolador de f.

Observações

- $p(x)$ não necessariamente converge a $f(x)$ em $[a, b]$ aumentando o número de pontos de interpolação: *Polinômios interpoladores de grau elevado podem produzir grandes oscilações nos extremos do intervalo* (Fenômeno de Runge)

- Interpolação polinomial por partes com polinômios de grau moderado pode produzir melhores resultados. Exemplos típicos: interpolação linear por partes (uma reta para cada par $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$) e interpolação quadrática por partes (uma parábola para cada três pontos).

Exercícios

1. Seja $p(x)$ o polinômio interpolador de f nos pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Mostre que $p(x) = \frac{1}{2}x(x-1)f(x_0) + (1+x)(1-x)f(x_1) + \frac{1}{2}x(x+1)f(x_2)$. Agora, defina

   $$\widehat{p} = [p'(x_0), p'(x_1), p'(x_2)]^T, \quad \widehat{f} = [f(x_0), f(x_1), f(x_2)]^T.$$

   Encontre uma matriz D 3×3 tal que
   $$\widehat{p} = D\widehat{f}.$$

   Podemos aproximar $f'(x_k)$ por $p'(x_k)$? . Fundamente sua resposta

2. Modifique o programa *interp.m* (material anexo) (ou escreva seu próprio programa) para ilustrar o fenômeno de Runge usando a função $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in [-5, 5]$, com $n+1$ pontos igualmente espaçados, e com pontos de Chebyshev x_k definidos por $x_k = \cos((n-k)\pi/n)$, $k = 0, 1, \dots, n$, convenientemente transladados ao intervalo $[5, 5]$.

Fpolis, 11/02/2006

Fermín S. V. Bazán