AULA-8 (08/04/2006) SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:

O MÉTODO DE EULER E MÉTODOS DE ORDEM SUPERIOR

RESUMO: *O objetivo é resolver problemas de valor inicial (PVI) do tipo:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \quad a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

Uma alternativa para PVI's que não não podem ser resolvidos analiticamente é o uso de métodos numéricos para construir soluções aproximadas. Nesta aula mostraremos como construir soluções aproximadas para PVI's usando métodos baseados no polinômio de Taylor.

Teoria:

Um ponto importante em relação ao PVI (1) é saber se o problema tem solução. O seguinte teorema oferece condições suficientes para existência e unicidade de solução.

Teorema Seja $D = \{(t,y)/a \leq t \leq b,\ y \in I\!R\}$ e $f : D \to I\!R$ uma função contínua em D. Se f satisfaz uma condição de Lipchitz na variável y, então o PVI (1) tem uma única solução $y = y(t)$ com $t \in [a,b]$.
Obs. $f(t,y)$ satisfaz uma condição de Lipschitz na variável y em D se existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall\ (t,y_1),\ (t,y_2) \in D.$$

Métodos Se $y = y(t)$ é a solução do PVI, a idéia dos métodos numéricos a serem estudados é construir aproximações discretas para $y(t)$ em pontos $t_j = a + jh\ j = 0,1,\ldots,n$ com $h = (b-a)/n$.

Método de Euler O método é baseado na premissa de que se a solução do PVI, $y = y(t)$, tem derivada segunda contínua, então o teorema de Taylor assegura que

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + hy'(t_j) + \frac{h^2}{2}y''(\eta_j)$$

para algum número $\eta_j \in (t_j, t_{j+1})$. Agora já que $y'(t_j) = f(t_j, y(t_j))$ (veja Eq. (1)), a igualdade acima pode ser escrita como

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + hf(t_j, y(t_j)) + \frac{h^2}{2}y''(\eta_j)$$

O método de Euler baseia-se no fato de que se $h \approx 0$ então o último termo no lado direito da equação acima não contribui significativamente na igualdade. Se introduzimos u_j para denotar uma aproximação para $y(t_j)$, o método de Euler sugere construir aproximações para $y(t_j)$ através de:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \quad \text{(condição inicial)} \\ \\ u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j), \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \end{cases} \tag{2}$$

Exercício

1. Considere o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 3 \\ y(0) = 1/2 \end{cases} \tag{3}$$

   a) Verifique que o PVI tem uma única solução. Sug. mostre que $f(t,y) = y - t^2 + 1$ satisfaz uma condição de Lipschitz. b) Implemente computacionalmente o método de Euler com $n = 10, 20$, e 50. Calcule o erro $|u_j - y(t_j)|$ usando o fato de que a solução do PVI é $y(t) = (t+1)^2 - e^t/2$.

Fpolis, 08/04/2006

Fermín S. V. Bazán