AULA-9 (29/04/2006) SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:

O MÉTODO DE EULER E MÉTODOS DE ORDEM SUPERIOR (CONTINUAÇÃO)

RESUMO: *Conforme descrito anteriormente, o objetivo é resolver numericamente problemas de valor inicial (PVI) do tipo:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

Nesta aula mostraremos como construir soluções aproximadas para PVI's mais precisas do que aquelas obtidas pelo método de Euler, usando métodos baseados no teorema de Taylor.

Teoria:

Vale a pena lembrar que se $y(t)$ tem $m+1$ derivadas contínuas num intervalo $I = < a, b >$ e se t e $t+h$ pertencem ao intervalo I, então o Teorema de Taylor assegura que

$$y(t+h) = y(t) + hy(t) + \frac{h^2}{2!}y''(t) + \cdots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(m+1)}(\eta), \tag{2}$$

onde η é algum número entre t e $t+h$.

Métodos A idéia dos métodos numéricos baseados no teorema de Taylor é que se a solução do PVI, $y = y(t)$, tem $(n+1)$ derivadas contínuas, usando a malla $t_j = a + jh$ $j = 0, 1, \ldots, n$ com $h = (b-a)/n$, podemos escrever

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + hy'(t_j) + \frac{h^2}{2}y''(y_j) + \cdots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(t_j) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}y^{(m+1)}(\eta_j),$$

para algum número $\eta_j \in (t_j, t_{j+1})$. Agora, usando o fato de que $y'(t_j) = f(t_j, y(t_j))$ (veja Eq. (1)), obtemos

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + hf(t_j, y(t_j)) + \frac{h^2}{2}f'(t_j, y(t_j))) + \cdots + \frac{h^n}{m!}f^{(m-1)}(t_j) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m)}(\eta_j),$$

Para $m = 2$ temos então

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + hf(t_j, y(t_j)) + \frac{h^2}{2}f'(t_j, y(t_j)) + \frac{h^3}{(3)!}f^{(3)}(\eta_j).$$

Desprezando o resto e assumindo que as aproximações u_j satisfazem a igualdade resultante, obtemos o seguinte método.

Método de Taylor de Ordem 2 ($m = 2$)

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \quad \text{(condição inicial)} \\ \\ u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j) + \frac{h^2}{2}f'(t_j, u_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{3}$$

Outros métodos de ordem superior a $m = 2$ são obtidos de maneira semelhante.

Exercício

1. Considere o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 3 \\ y(0) = 1/2 \end{cases} \tag{4}$$

Implemente computacionalmente o método de ordem 2 com $n = 10, 20,$ e 50. Calcule o erro $|u_j - y(t_j)|$ usando o fato de que a solução do PVI é $y(t) = (t+1)^2 - e^t/2$. Compare os resultados com aqueles obtidos pelo método de Euler.

Fpolis, 29/04/2006

Fermín S. V. Bazán