Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

10ª lista complementar de exercícios (16/10/2017 a 27/10/2017)

1. Diga quais dos conjuntos abaixo representam uma função com domínio $A = \mathbb{N}$ e contradomínio $B = \mathbb{N}$. Nos casos que são funções, determine o conjunto imagem.

(a) $\{(t, t+1) \mid t \in \mathbb{N}\}$.

(b) $\{(x, x-1) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

(d) $\{(x, (x-1)^2) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

(e) $\{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16), \ldots\}$.

(f) $\{(x-1, x) \mid x \in \mathbb{N}^*\}$.

2. Em cada um dos itens abaixo, calcule o que se pede.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 2x$. Calcule $f(-2)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{3})$, $f(0,2)$.

(b) $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Calcule $f(2)$, $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-x)$, $f(a)$, $f(a-1)$, $f(-1)$.

(c) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$. Calcule $f(1)$, $f(-1)$, $f(x)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(10000)$.

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(x+1)$, $f(-x)$, $f(x^2)$.

(e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2|x-1|$. Calcule $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(x+1)$, $f(10)$.

(f) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Calcule $f(-3)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-2342552)$, $f(23498755)$.

3. Em cada um dos exemplos abaixo, escreva matematicamente a função representada pelo texto, conforme exemplo no item (a). Em todos os itens, utilize $\mathbb{R}$ como contradomínio.

(a) A função que a cada número real associa o seu quadrado.
Solução. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

(b) A função que a cada número inteiro associa o seu módulo mais 3.

(c) A função que a cada número natural associa a raiz quadrada do seu módulo.

(d) A função que, a cada número real, adiciona 3 e, em seguida, eleva ao quadrado.

(e) A função que, a cada número real, eleva ao quadrado e, em seguida, adiciona 3.

(f) A função que, a cada número real não negativo, extrai a raiz quadrada, adiciona 8 e multiplica por 1/3.

4. Faça o caminho inverso do exercício anterior, conforme exemplo do item (a).

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + x^2$.
Solução. A função que, a cada número real, eleva ao quadrado e adiciona 1.

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1 + x)^2$.

(c) $f : \{-1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{4}$.

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$.

5. Em cada um dos itens abaixo, diga quais estão ou não bem definidos (ver enunciado da questão 8 da lista de exercícios 10).

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{3x - 5} - 3$.

(b) $f : [5/3, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{3x - 5} - 3$.

(c) $f : [4, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{3x - 5} - 3$.

(d) $f : [5/3, \infty) \longrightarrow [-3, \infty)$ dada por $f(x) = \sqrt{3x - 5} - 3$.

(e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

6. Para cada um dos itens do exercício anterior que não estão bem definidos, corrija a definição (ver enunciado da questão 9 da lista de exercícios 10).

7. Em cada um dos itens abaixo, encontre o domínio das funções.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2} - 1}$.

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 2}$.

(c) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x + 3}}$.

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} - \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$.

(f) $f(x) = |x^2 - 3| + |x - 1|$.

(g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{|x - 2| - 3}$.

(h) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{-x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

(i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 1}{x^2 - 2x - 15}}$.

(j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x - 3)(x^2 + 2x - 8)}{x^2 + 4x + 3}}$.

(k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 1}{x^2 - 2x - 15}} - \sqrt{\dfrac{(x - 3)(x^2 + 2x - 8)}{x^2 + 4x + 3}}$.

Sugestão. Para os três últimos, relembre o exercício 9 da lista de exercícios 9.

8. Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$ funções. Dizemos que f e g são *iguais* se $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo x no domínio. Em outras palavras, duas funções são iguais quando possuem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de formação. Dizemos que f é uma *restrição* de g (ou que g é uma *extensão* de f) se $A \subset C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Em outras palavras, f é uma restrição de g se possui domínio contido no domínio de g e coincide com g em seu domínio. Dizemos que f é uma *correstrição* de g (ou que g é uma *coextensão* de f) se $A = C$, $B \subset D$ e $f(x) = g(x)$ para todo x no domínio. Em outras palavras, f é uma correstrição de g se possuem o mesmo domínio, coincidem em todo o domínio e o contradomínio de f está contido no contradomínio de g.

Exemplos. A função $f : \{-1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é igual à função $g : \{-1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3$, pois possuem mesmo domínio, mesmo contradomínio e coincidem em todos os elementos do domínio (note que $x^3 = x$ se $x \in \{-1, 0, 1\}$). A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é uma extensão da função $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ é uma correstrição da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. A função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é uma restrição e coextensão da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $g(x) = x^2$. As funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ não são comparáveis sob nenhuma das classificações acima.

Em cada um dos itens abaixo, digas as relações entre as funções apresentadas (se houver).

(a) $f : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(y) = y^2$.

(b) $f : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$.

(c) $f : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$.

(d) $f : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$.

(e) $f : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$.

(f) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

(g) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt{x^2}$.

(h) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $g(x) = \sqrt{x^2}$.

(i) $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 - 3$ e $g : [4, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x^2 - 3$.

(j) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3$ e $g : \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{6x - 24}{2x - 8}$.

9. É possível que duas funções diferentes possuam exatamente o mesmo gráfico? Justifique.

10. Qual informação de uma função não é possível descobrir a partir do seu gráfico?

11. Faça o gráfico das funções abaixo, encontrando alguns dos pontos pertencentes ao gráfico e tentando deduzir o restante. O objetivo aqui é mostrar que existe uma forma de fazer o gráfico de qualquer função, basta encontrarmos diversos pontos pertencentes ao seu gráfico. Obviamente, esse método é entediante, mas é importante utilizá-lo uma vez na vida. Ao longo desse curso, aprenderemos técnicas para encontrar o gráfico de certas funções sem precisar recorrer ao método desse exercício. Futuramente, em Cálculo 1, você aprenderá mais técnicas para traçar o gráfico de funções.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 3$.

(b) $f(x) = 4x^2 - x^4$. *Observação.* Quando o domínio não é mencionado, a convenção utilizada é a do exercício 7.

(c) $f(x) = \sqrt{x}$.

(d) $f(x) = \sqrt{-x}$.

(e) $f(x) = |x + 1|$.

(f) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

12. Para cada uma das funções abaixo, calcule e simplifique (se possível) o quociente $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Considere $a, a+h \in \mathrm{Dom}(f)$ e $h \neq 0$. Observe o exemplo no item (a).

(a) $f(x) = 3x + 2$.
Solução. Note que $f(a) = 3a + 2$ e que $f(a+h) = 3(a+h) + 2$. Assim,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{3(a+h)+2-(3a+2)}{h} = \frac{3h}{h} = 3.$$

(b) $f(x) = x^2 + 1$. **(c)** $f(x) = 5$. **(d)** $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. **(e)** $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

(f) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. **(g)** $f(x) = \sqrt{x}$. **(h)** $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$. **(i)** $f(x) = x^3$.

13. Para as mesmas funções do exercício anterior, calcule e simplifique (se possível) o quociente $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Considere $x, a \in \mathrm{Dom}(f)$ e $x \neq a$. Observe o exemplo no item (a).

(a) $f(x) = 3x + 2$.
Solução. Note que $f(x) = 3x + 2$ e que $f(a) = 3a + 2$. Assim,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{3x+2-(3a+2)}{x-a} = \frac{3(x-a)}{x-a} = 3.$$

14. Faça o gráfico das funções abaixo (a partir daqui, você pode usar seus conhecimentos sobre as funções para fazer o gráfico).

(a) $f(x) = \sqrt{2}$. **(b)** $f(x) = 0$.

(c) $f : [-2, 0) \cup (1, 3) \cup \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$.

15. Faça o gráfico e encontre o conjunto imagem das funções abaixo.

(a) $f(x) = 2x - 1$. **(b)** $f(x) = x + 2$.

(c) $f(x) = -x + 1$. **(d)** $f(x) = \dfrac{4-3x}{2}$.

(e) $f : (-\infty, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$. **(f)** $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 2$.

(g) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$.

16. Para as funções do item anterior, determine os pontos do eixo das abscissas e do eixo das ordenadas que pertencem ao gráfico.

17. Encontre um equação para a reta que passa pelos pontos abaixo.

(a) $(3, -2)$ e $(2, -3)$. **(b)** $(1, 2)$ e $(2, 2)$.

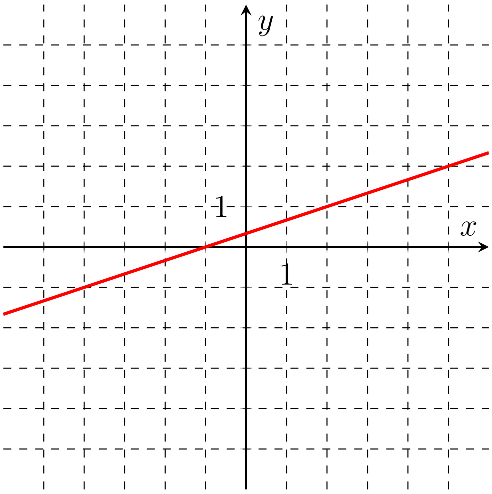
18. Seja f uma função afim, isto é, $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e que $f(1) = 1$. Determine $f(3)$.

19. Determine uma equação para a reta com coeficiente angular igual a $-\dfrac{1}{2}$ e que passa pelo ponto $(-3, 1)$.

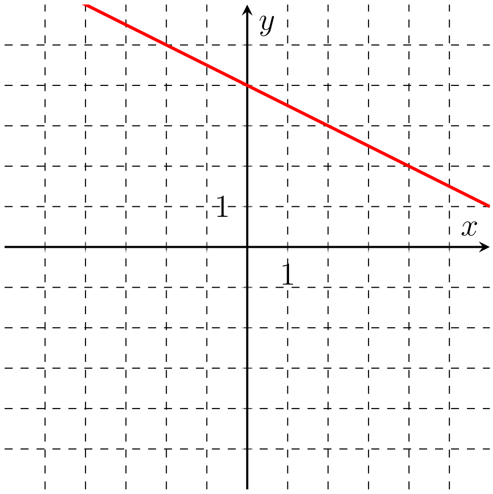
20. Determine uma equação para a que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e tem coeficiente linear igual a 4.

21. Encontre a regra de formação das funções representadas nos gráficos abaixo.

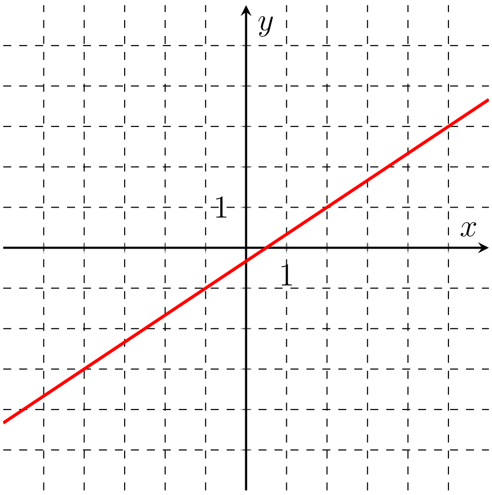
(a)



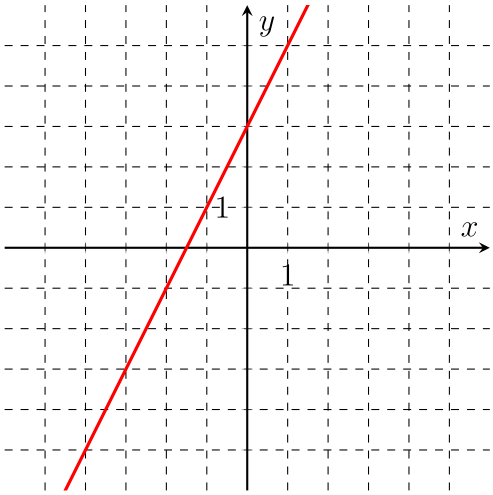
(b)



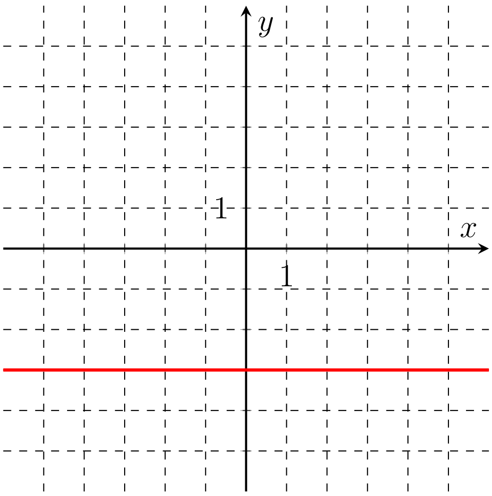
(c)



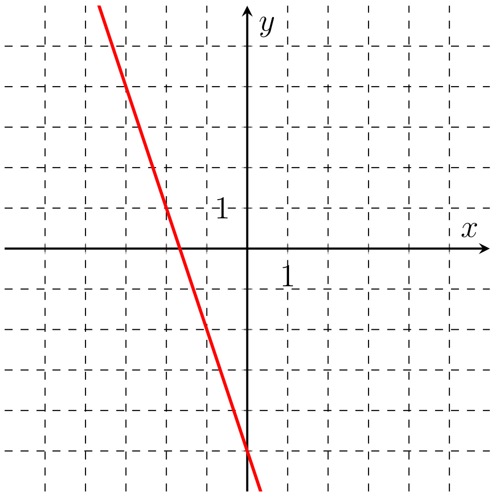
(d)



(e)



(f)



22. Faça o gráfico e encontre o conjunto imagem das funções abaixo. Identifique os pontos em que o gráfico intersecta os eixos coordenados e os pontos nos quais há uma mudança no comportamento do gráfico (por exemplo, um vértice de uma parábola).

(a) $f(x) = -x^2$.

(b) $f(x) = 2x^2$.

(c) $f(x) = -2x^2$.

(d) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$.

(e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 7$.

(f) $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

(g) $f : (-\infty, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$.

(h) $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$.

(i) $f : (-3, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 + 6x + 1$.

23. Determine a função quadrática f que satisfaz $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$.

24. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+3)x + m$ possua duas raízes reais distintas.

25. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+3)x + (m-1)$ não possua raízes reais.

26. Para cada uma das funções abaixo, determine o domínio, calcule $f(1)$ (se 1 pertencer ao domínio), faça o gráfico e determine o conjunto imagem.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq -1 \\ x^2, & \text{se } x > -1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < 2 \\ 3, & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0 \\ 9 - x^2, & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ x - 3, & \text{se } x > 3 \text{ e } x \neq 4 \\ -1, & \text{se } x = 4. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ x^2 - 4, & \text{se } 0 < x \leq 3. \end{cases}$

27. A toda equação, é possível associar um conjunto solução. No caso de a equação possuir duas variáveis, esse conjunto solução é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, o conjunto solução da equação $y - x = 0$ consiste de todos os pares ordenados em que a primeira entrada é igual à segunda. Este conjunto de pares pode ou não determinar uma função (como nos exercícios **??** e 1). Neste exemplo da equação $y - x = 0$, o conjunto solução determina uma função e, quando isso acontece, dizemos que y pode ser escrito como função de x. Nas equações abaixo, diga se a variável y pode ser escrita como função de x.

(a) $x^2 + 2y = 4$.

(b) $3x + 7y = 21$.

(c) $x = y^2$.

(d) $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

(e) $x + y^2 = 9$.

(f) $x^2 + y = 9$.

(g) $x^2y + y = 1$.

(h) $\sqrt{x} + y = 12$.

(i) $2|x| + y = 0$.

(j) $2x + |y| = 0$.

(k) $x = y^3$.

(l) $x = y^4$.

28. Logo após aprendermos os números, fomos apresentados às operações matemáticas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Com o passar do tempo, aprendemos novos objetos matemáticos, como matrizes, por exemplo. Após isso, ensinaram-nos a fazer operações com matrizes. De uma forma geral, toda vez que um novo objeto matemático é estudado, operações são definidas entre estes objetos. Acabamos de aprender funções, então seria natural fazer operações com funções também. Uma operação pode ser interpretada da seguinte forma: ela "recebe" dois objetos e dá como resposta um terceiro objeto. Por exemplo, a adição de números recebe dois números e o resultado é um novo número. Em matrizes, a adição recebe duas matrizes e o resultado é uma nova matriz. Com isso em mente, criaremos operações entre funções que, de modo geral, recebem duas funções e dão como resposta uma nova função. Neste exercício definiremos cinco operações com funções: adição, subtração, multiplicação, divisão e multiplicação por escalar. Explicaremos cada uma delas abaixo. Fixemos, nas explicações abaixo, as seguintes funções: $f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$, $g : \{0, 1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - 1$, $h(x) = x^2$ e $k(x) = 2x - 4$.

Adição de funções. A adição de funções é feita a partir das tabelas das funções envolvidas na operação. Por exemplo, vamos efetuar a soma entre as funções f e g. As tabelas correspondentes são:

função f	
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5

e

função g	
0	-1
1	0
2	1
3	2
4	3

.

A soma dessas funções é dada pela tabela

função $f+g$	
0	$-1+(-1)$
1	$1+0$
2	$3+1$
3	$5+2$

=

função $f+g$	
0	-2
1	1
2	4
3	7

.

A tabela foi construída usando apenas as linhas correspondentes aos elementos que estão na intersecção dos domínios de f e g e o lado direito nada mais é do que a soma das imagens de f e g. Note que os resultados dessa tabela obedecem à regra $f(x) + g(x) = 2x - 1 + x - 1 = 3x - 2$. Com isso, podemos dizer que a soma das funções f e g é a função $f + g : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f + g\,(x) = 3x - 2$ (aqui, $f + g$ é o nome da nova função criada e o que essa função faz em x é $f + g\,(x)$; às vezes utiliza-se $(f + g)(x)$ ou $[f + g](x)$). Como outro exemplo, façamos a soma $h + k$. Como ambas possuem domínio igual a $\mathbb{R}$, então o domínio da soma também será $\mathbb{R}$. Assim, $h + k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(h+k)(x) = x^2 + 2x - 4$. *Curiosidade.* Quando tentamos definir a adição de funções de forma abstrata, a definição fica $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Para quem lê isso, parece que não há nada de útil escrito. Porém, a expressão $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ está correta e possui a seguinte interpretação: o valor da função $f + g$ em x (que é o que está do lado esquerdo) é definido como a soma do valor de f em x com o valor de g em x (que é o lado direito).

Subtração de funções. A subtração é feita de forma análoga à adição, substituindo apenas a soma das regras pela diferença das regras das funções. Para as funções acima, $f - g : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 1 - (x - 1) = x$ e $h - k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(h - k)(x) = h(x) - k(x) = x^2 - (2x - 4) = x^2 - 2x + 4$.

Multiplicação de funções. Segue a mesma lógica acima. O nome dado à função obtida pela multiplicação de f e g é fg. Para as funções acima, $fg : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x - 1)(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1$ e $hk : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(hk)(x) = h(x)k(x) = x^2(2x - 4) = 2x^3 - 4x^2$.

Divisão de funções. Também segue a mesma lógica acima. Há, apenas, um cuidado adicional que devemos ter com a divisão de funções, pois não faz sentido dividir $f(x)$ por $g(x)$ quando $g(x) = 0$. Assim, serão excluídos do domínio de f/g os elementos x para os quais $g(x) = 0$. Para as funções acima, $f/g : \{0, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$ e $h/k : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(h/k)(x) = h(x)/k(x) = \dfrac{x^2}{2x - 4}$.

Multiplicação por escalar. Esta é uma operação que envolve um número e uma função (e não duas funções como nos casos anteriores). Por exemplo, a função $3f$ é a função que, quando avaliada em x, tem como resultado o valor $f(x)$ multiplicado por 3. Usando a função f acima, temos que $3f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(3f)(x) = 3f(x) = 3(2x - 1) = 6x - 3$. Como outro exemplo, $-2k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(-2k)(x) = -2k(x) = -2(2x - 4) = -4x + 8$. *Comentário.* A palavra *escalar* é um sinônimo para número em alguns contextos matemáticos. Quando estamos falando de funções (ou de matrizes), um escalar representa um número.

Agora que aprendemos essas cinco operações, vamos praticar um pouco! Para as funções f e g abaixo, determine as funções $f+g$, $f-g$, fg, f/g e $2f$ e encontre seus domínios.

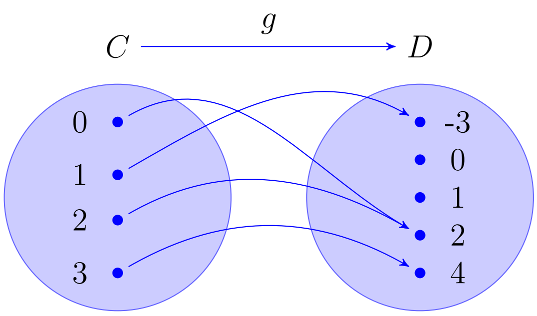
(a) $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$. **(b)** $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-4}$.

(c) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{4}{x+1}$.

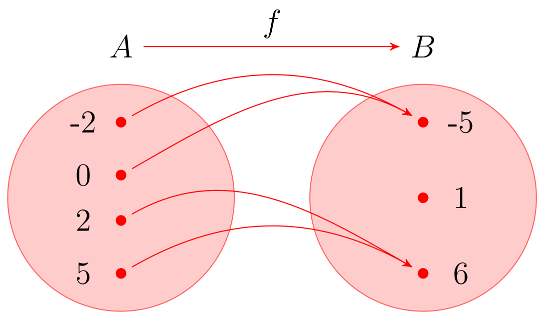
29. Considere as funções $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = 2 - x^2$. Calcule o que se pede:

(a) $g(f(-2))$; **(b)** $f(f(-1))$; **(c)** $g(g(2))$; **(d)** $f(2-x^2)$; **(e)** $g(f(x))$;
(f) $f(f(x))$; **(g)** $g(g(x))$.

30. Há mais uma operação entre funções que devemos aprender: a *composição* de funções. Esta operação é melhor compreendida quando representamos as funções envolvidas na forma de diagrama de Venn. Para exemplificar, considere as funções $g : C \longrightarrow D$ e $f : A \longrightarrow B$ dadas pelos diagramas

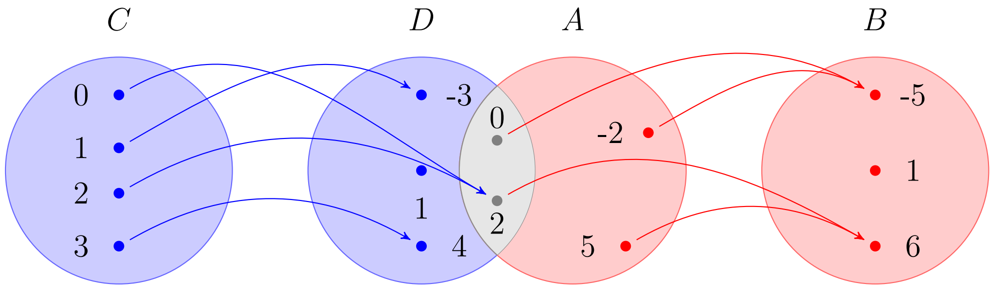


e



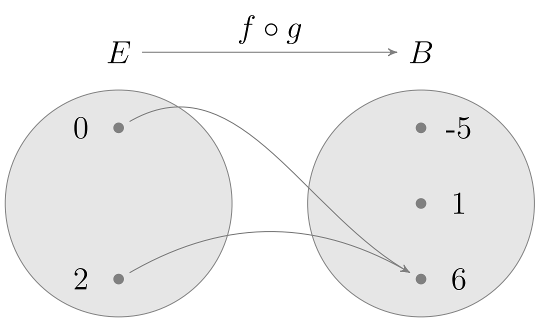
.

Podemos pensar que a função f oferece caminhos para partir de um elemento de A e chegar a um elemento de B, assim como g faz o mesmo para os conjuntos C e D. Nosso objetivo é encontrar caminhos que saem de C e terminam em B. Para isso, interpretaremos os conjuntos A e D como partes de um conjunto maior e mesclaremos os dois diagramas acima, obtendo



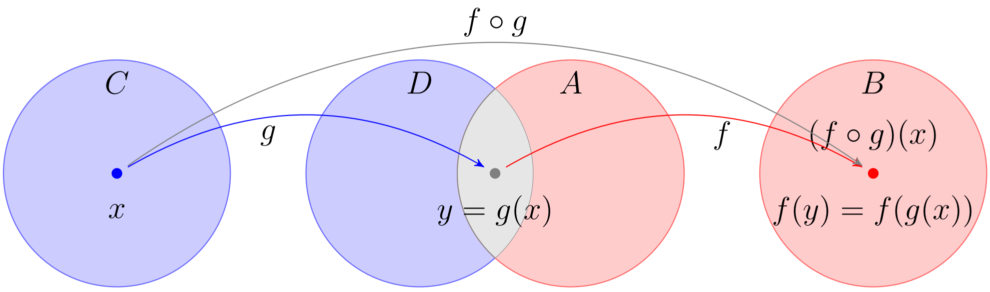
.

Note que há, exatamente, dois caminhos possíveis partindo de C e chegando a B: um deles parte de 0 e chega a 6 (passando por 2) e o outro parte de 2 e chega a 6 (passando por 2). Estes dois caminhos compõem uma nova função, denotada por $f \circ g$ e denominada composição de f com g. O diagrama de Venn desta função é



.

Observe que o domínio de $f \circ g$ é um novo conjunto $E = \{0, 2\}$ e o contradomínio é o mesmo da função f. Além disso, note também que $(f \circ g)(0) = 6$ e que $(f \circ g)(2) = 6$. Nosso objetivo agora é descobrir tudo sobre a função $f \circ g$ usando apenas as informações sobre f e g. Para isso, vamos analisar uma versão genérica do exemplo acima, ilustrada no diagrama



.

O caminho direto de C para B é feito pela função $f \circ g$, isto é, um elemento x é mandado em $(f \circ g)(x)$. Este mesmo caminho pode ser feito partindo de x, aplicando g e, em sequência, aplicando f. Nesse processo, concluímos que x é mandado em $f(g(x))$. Como os dois caminhos terminam no mesmo elemento, concluímos que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Dessa forma, deduzimos a regra de formação da função $f \circ g$: o valor da função $f \circ g$ em x é igual ao valor de f em $g(x)$. Por fim, resta determinar para quais valores de x faz sentido calcular $(f \circ g)(x)$. Notemos que ao aplicar g em x, o valor obtido $g(x)$ deve estar no domínio de f para que faça sentido calcular f neste valor. Assim, o domínio de $f \circ g$ é formado pelos elementos do domínio de g cujas imagens estão do domínio de f (compare com o exemplo anterior para se convencer disso).

Vamos aplicar esse raciocínio a um exemplo. Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 2$. A regra de formação da função $f \circ g$ é dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \sqrt{x-2}$. Falta determinar o domínio de $f \circ g$. Para isso, devemos descobrir quais são os elementos em $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ cujas imagens estão em $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+$. Isso equivale a encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \in \mathbb{R}_+$, isto é, os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $x - 2 \geq 0$. Isso nos diz que $x \in [2, \infty)$ e, portanto, $\text{Dom}(f \circ g) = [2, \infty)$.

Façamos um outro exemplo. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ e calculemos a função $f \circ g$. A regra de formação é dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$. Para determinar o domínio, devemos encontrar $x \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Isso nos diz que $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}_+$. Como resposta final para o exercício, podemos escrever $f \circ g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $(f \circ g)(x) = x$.

Hora de praticar! Nos itens abaixo, determine as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$ e seus domínios.

(a) $f(x) = 6x - 5$ e $g(x) = \dfrac{x}{2}$.

(b) $f(x) = x^3 + 2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

(c) $f(x) = |x|$ e $g(x) = 2x + 3$.

(d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} + 1}$ e $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

31. Nos itens abaixo, determine a regra de formação da função $f \circ g \circ h$ (não é necessário encontrar o domínio).

(a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x - 1$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = x^2 + 2$.

(c) $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x - 5$ e $h(x) = \sqrt{x}$.

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ e $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

32. Expresse as funções abaixo como $f \circ g \circ h$.

(a) $F(x) = \sqrt[3]{(x-4)^4+3}$.

(b) $F(x) = (4 + \sqrt[3]{x+1})^9$.

(c) $F(x) = \dfrac{2}{(3-x+x^3)^6}$.

33. Encontre uma função I tal que $g \circ I = g$ para qualquer outra função g (considere g uma função com domínio e contradomínio subconjuntos de $\mathbb{R}$).

34. Encontre uma função I tal que $I \circ g = g$ para qualquer outra função g (considere g uma função com domínio e contradomínio subconjuntos de $\mathbb{R}$).

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[1] G. Iezzi, C. Murakami – *Fundamentos de Matemática Elementar.* 7ª ed., Atual Editora, São Paulo, 2004.

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.