Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

10ª lista de exercícios (16/10/2017 a 27/10/2017)

1. Sejam A e B conjuntos. Defina o que é uma função de A em B. Como são chamados os conjuntos A e B? Defina conjunto imagem.

2. Diga quais das tabelas abaixo representam uma função com domínio $A = \{-1, 0, 2, 4\}$ e contradomínio $B = \mathbb{N}$. Nos casos que são funções, determine o conjunto imagem.

(a)

-1	1
0	3
2	-1
4	0

(b)

-1	1
0	0
2	3
4	0

(c)

-1	1
0	3
2	3
4	0
0	0

(d)

-1	1
2	3
4	0

(e)

0	5
4	2
2	9
-1	2

(f)

4	5
1	2
2	9
-1	2
0	0

3. Diga quais dos conjuntos abaixo representam uma função com domínio $A = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ e contradomínio $B = \mathbb{Z}$. Nos casos que são funções, determine o conjunto imagem.

(a) $\{(-1, 2), (2, 3), (1, 2), (4, 0), (0, 4)\}$.

(b) $\{(-1, 2), (2, 3), (1, 2), (4, 0), (0, 4), (2, 0)\}$.

(c) $\{(-1, 2), (2, 3), (1, 2), (0, 4)\}$.

(d) $\{(-1, 2), (2, 3), (1, -2), (4, 0), (0, 4)\}$.

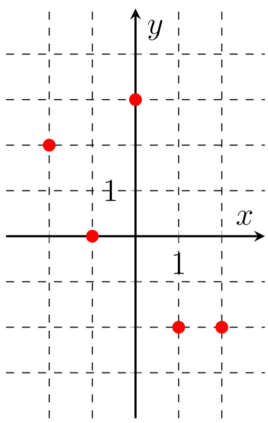
(e) $\{(-1, 2), (2, 3), (1, 2), (4, 2/3), (0, 4)\}$.

(f) $\{(-1, 2), (2, 3), (1, 2), (4, 2/3), (0, 4), (3, 3)\}$.

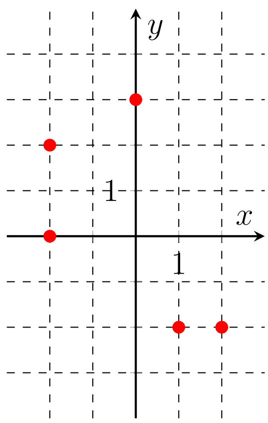
(g) $\{(x, x + 1) \mid x \in A\}$.

4. Diga quais dos gráficos abaixo representam uma função com domínio $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e contradomínio $B = \mathbb{Z}$. Nos casos que são funções, determine o conjunto imagem.

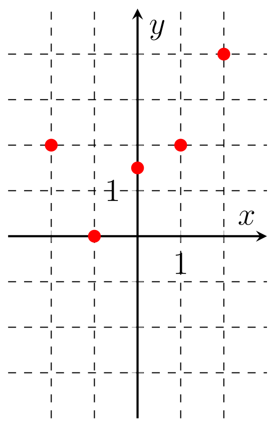
(a)



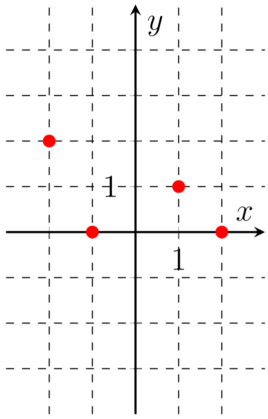
(b)



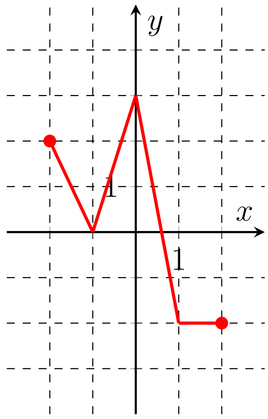
(c)



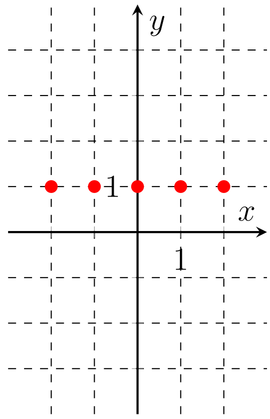
(d)



(e)

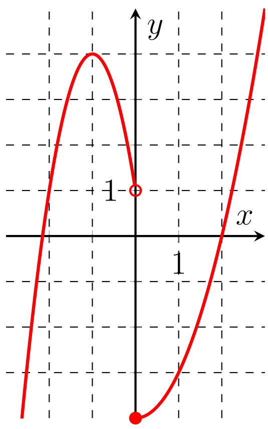


(f)

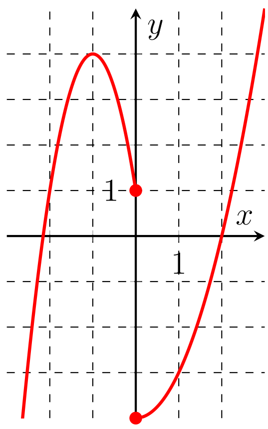


5. Diga quais dos gráficos abaixo representam alguma função. Nos casos que são funções, determine o domínio.

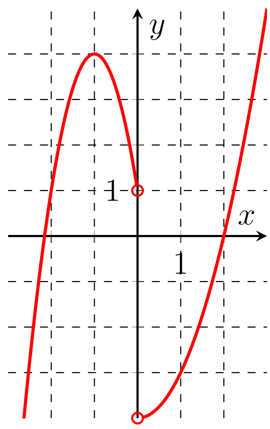
(a)



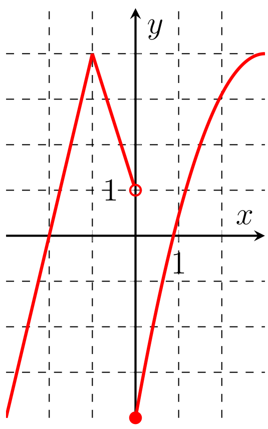
(b)



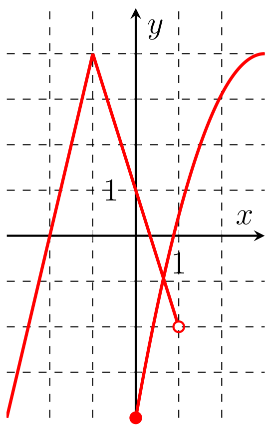
(c)



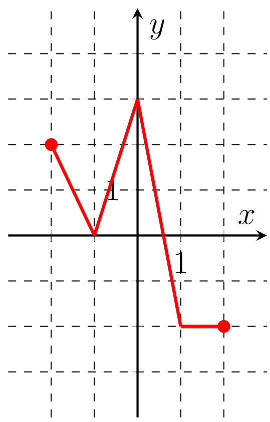
(d)



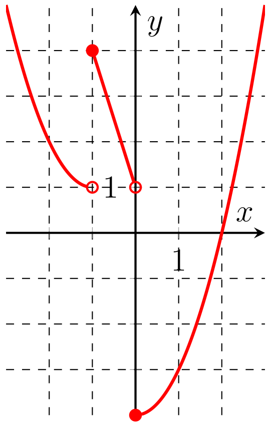
(e)



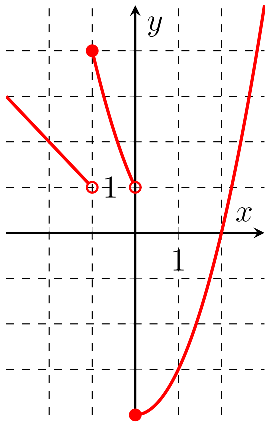
(f)



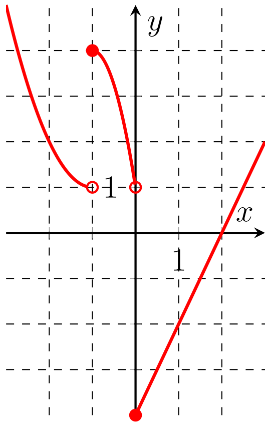
(g)



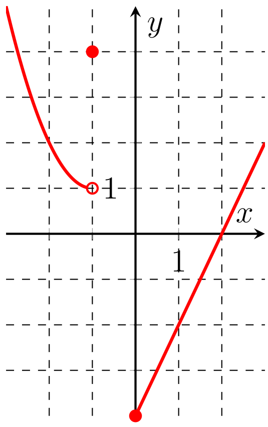
(h)



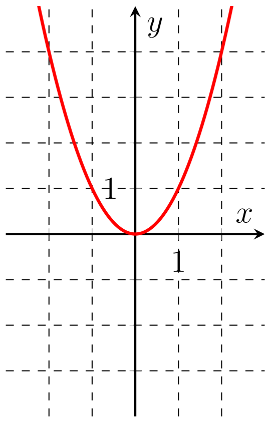
(i)



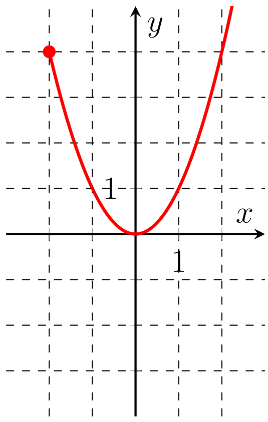
(j)



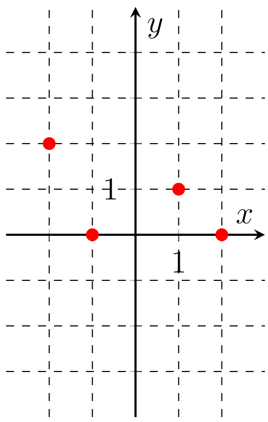
(k)



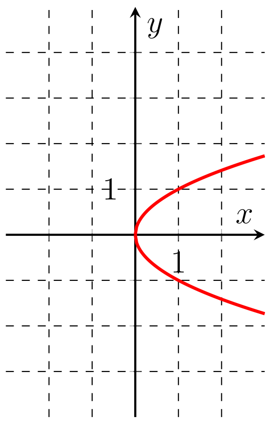
(l)



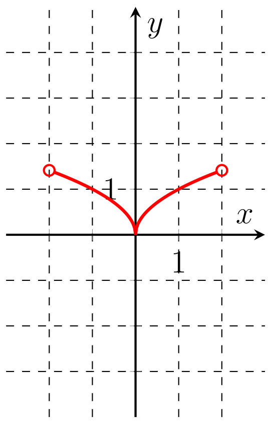
(m)



(n)

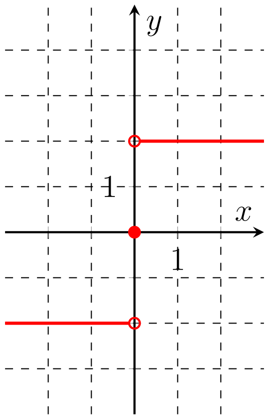


(o)

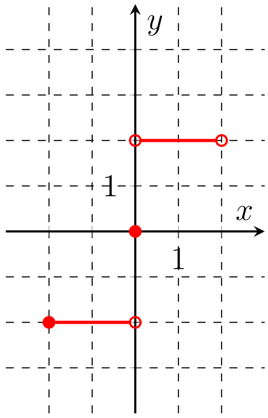


6. Os gráficos abaixo representam funções. Determine o domínio e a imagem de cada uma delas.

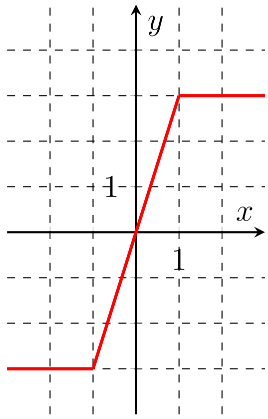
(a)



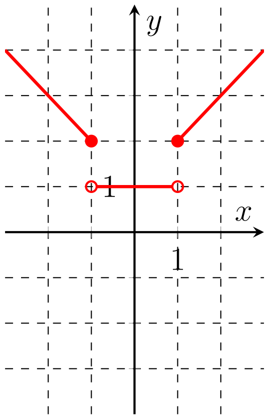
(b)



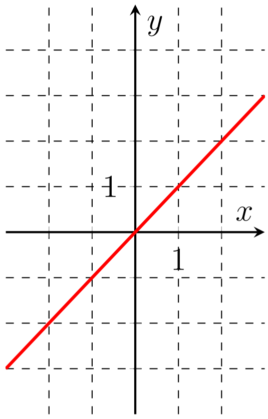
(c)



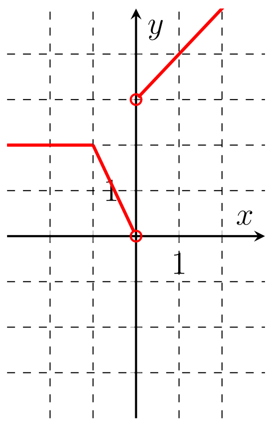
(d)



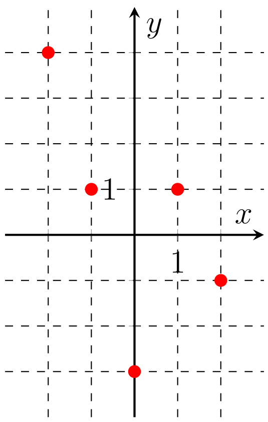
(e)



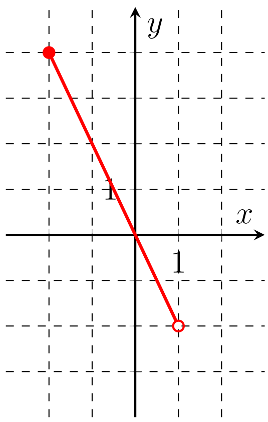
(f)



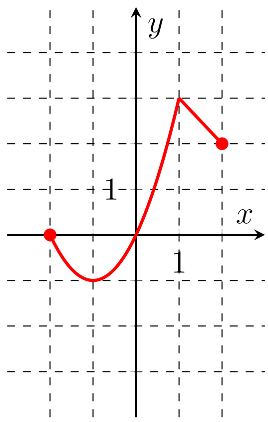
(g)



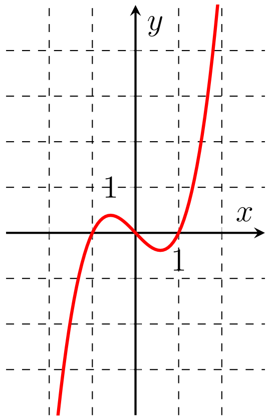
(h)



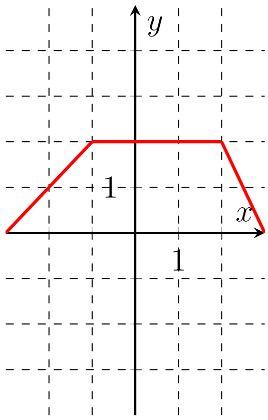
(i)



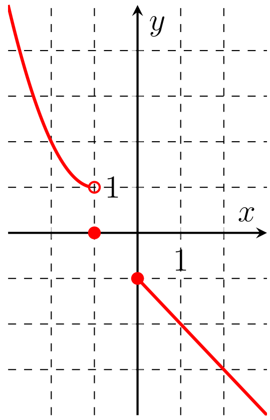
(j)



(k)



(l)



7. Em cada um dos itens abaixo, calcule o que se pede.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 6$. Calcule $f(-3)$, $f(3)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(10)$.

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. Calcule $f(1)$, $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\square)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a + b)$.

8. Ao criar uma função (ou definir uma função, usando o linguajar matemático), devemos especificar o domínio, o contradomínio e a regra de formação (ou regra de associação) da função. Por exemplo, $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x+1$ tem domínio $\mathbb{R}_+$, contradomínio $\mathbb{R}$ e regra de formação $f(x) = x+1$. Porém, nem sempre essas três informações fornecem uma função. Por exemplo, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{x}$ não é uma função, pois a regra não pode ser aplicada a todos os elementos do domínio. Neste caso, dizemos que g não está *bem definida* (caso fosse uma função, diríamos que g está bem definida). Em cada um dos itens abaixo, diga quais estão ou não bem definidos.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.

(c) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x-1}$.

(e) $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x-1}$.

(f) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x)$ é o número cujo quadrado é x.

9. Sempre que uma função não está bem definida (conforme exercício anterior), podemos fazer certas alterações para a tornar bem definida. Há, basicamente, três formas fazer isso: (A) restringir o domínio, (B) aumentar o contradomínio ou (C) modificar a regra de formação. Para cada um dos itens do exercício anterior que não estão bem definidos, corrija a definição utilizando um dos três métodos acima, conforme exemplo no item (a).

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.

Solução. A expressão acima não está bem definida pois quando a regra é aplicada para todos os números do domínio, alguns dos resultados obtidos não estão no contradomínio. Vamos corrigir esse problema usando os métodos acima.

Método (A). Os elementos do domínio cujas imagens não estão no contradomínio são os números menores que -1 e os maiores que 1. Descartando estes elementos do domínio, a função fica bem definida. Nesse caso, a forma corrigida pode ser $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.

Método (B). Notemos que a ausência dos números negativos no contradomínio é que gera o problema na definição. Assim, podemos corrigir colocando-os no contradomínio. Nesse caso, a forma corrigida pode ser $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.

Método (C). Já sabemos que o problema está no fato que os números menores que -1 e os maiores que 1 possuem imagens que não estão no contradomínio. Assim, podemos redefinir a função nesses números para que suas imagens pertençam ao contradomínio. Por exemplo, uma possível correção seria $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < -1 \\ 1 - x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Observemos que a regra de formação de f foi preservada nos elementos em que a imagem pertence ao contradomínio $\mathbb{R}_+$ (que são os elementos do intervalo $[-1, 1]$). Nos outros elementos, fizemos uma escolha arbitrária para a regra de formação de f (tomando o cuidado para que a escolha fizesse com que as imagens pertencessem a contradomínio $\mathbb{R}_+$). Notemos que há várias maneiras de corrigir a função dessa forma.

10. Normalmente, o caminho para se definir uma função é escolher o domínio, o contradomínio e, por fim, a regra de formação. Porém, em certas situações, a regra de formação é escolhida inicialmente. Nesse caso, fica a pergunta de que escolhas podemos fazer para o domínio e o contradomínio de forma que se obtenha uma função bem definida. Por exemplo, para a regra de formação $f(x) = \sqrt{x}$ podemos escolher $\mathbb{R}_+$ como domínio e $\mathbb{R}$ como contradomínio. Obviamente, há infinitas escolhas que funcionam nesse caso. Convencionou-se, nos cursos de Cálculo que, quando uma regra de formação é fornecida (sem domínio e contradomínio), o domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ de forma que a regra de formação possa ser calculada dentro do conjunto dos números reais e que o resultado também seja um número real. Por exemplo, o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a expressão $f(x) = \sqrt{x}$ pode ser calculada usando número reais é $\mathbb{R}_+$. Com isso, dizemos que o domínio da função $f(x) = \sqrt{x}$ é $\mathbb{R}_+$. Em cada um dos itens abaixo, encontre o domínio das funções, conforme exemplos nos itens (a) e (b).

Observação. Não há uma convenção absoluta para o contradomínio quando este não é especificado. As duas convenções mais usadas são usar $\mathbb{R}$ ou usar o conjunto imagem como contradomínio.

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-9} - \sqrt{4-2x} + 3.$

Solução. Observemos que a expressão acima só poderá ser calculada nos números reais se o denominador $x^2 - 9$ for diferente de 0 e o número $4 - 2x$ que está dentro da raiz for maior ou igual a 0. Assim, o domínio é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 9 \neq 0 \\ 4 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

Como o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\} \\ x \leq 2, \end{cases}$$

então o conjunto solução é $S = (-\infty, -3) \cup (-3, 2]$. Portanto, o domínio é $(-\infty, -3) \cup (-3, 2]$.

Observação. Costuma-se escrever $\mathrm{D}(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 2]$ ou $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 2]$.

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

Solução. Uma abordagem errada nesse exercício seria, antes de encontrar o domínio, simplificar a fração e dizer que a expressão é igual a $f(x) = 1$, fazendo com que o domínio seja $\mathbb{R}$. Devemos analisar a expressão original sem qualquer simplificação. Neste caso, o denominador deve ser diferente de 0 e o que está dentro de cada raiz deve ser maior ou igual a 0. Com isso, descobrimos que $\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty)$.

(c) $f(x) = 3x + 2.$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}.$

(e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}.$

(f) $f(x) = \sqrt{x-1}.$

(g) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}.$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}.$

11. Faça o gráfico das funções abaixo, encontrando alguns dos pontos pertencentes ao gráfico e tentando deduzir o restante. O objetivo aqui é mostrar que existe uma forma de fazer o gráfico de qualquer função, basta encontrarmos diversos pontos pertencentes ao seu gráfico. Obviamente, esse método é entediante, mas é importante utilizá-lo uma vez na vida. Ao longo desse curso, aprenderemos técnicas para encontrar o gráfico de certas funções sem precisar recorrer ao método desse exercício. Futuramente, em Cálculo 1, você aprenderá mais técnicas para traçar o gráfico de funções.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 4$.

(b) $f : [-2, 3) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 4$.

(c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1$.

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4$.

12. Faça o gráfico das funções abaixo (a partir daqui, você pode usar seus conhecimentos sobre as funções para fazer o gráfico).

(a) $f(x) = 2.$

(b) $f(x) = -3.$

13. Faça o gráfico e encontre o conjunto imagem das funções abaixo.

(a) $f(x) = 3x + 2$

(b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2}.$

(c) $f(x) = -3x - 4.$

(d) $f(x) = -2x + 3.$

14. Para as funções do item anterior, determine os pontos do eixo das abscissas e do eixo das ordenadas que pertencem ao gráfico.

15. Encontre um equação para a reta que passa pelos pontos abaixo.

(a) $(2,3)$ e $(3,5)$. **(b)** $(1,-1)$ e $(-1,2)$.

16. Determine uma equação para a reta que passa pelo ponto $(-2,4)$ e tem coeficiente angular igual a -3.

17. Faça o gráfico e encontre o conjunto imagem das funções abaixo. Identifique os pontos em que o gráfico intersecta os eixos coordenados e os pontos nos quais há uma mudança no comportamento do gráfico (por exemplo, um vértice de uma parábola).

(a) $f(x) = x^2$. **(b)** $f(x) = x^2 - 2x$.
(c) $f(x) = -2x^2 - 4x$. **(d)** $f(x) = -3x^2 - 3$.
(e) $f(x) = x^2 - 2x + 4$. **(f)** $f(x) = x^2 + x + 1$.

18. Determine a função quadrática f que satisfaz $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$.

19. Determine a função quadrática f com raízes -2 e 3 e que satisfaz $f(1) = -6$.

20. Para cada uma das funções abaixo, determine o domínio, calcule $f(1)$ (se 1 pertencer ao domínio), faça o gráfico e determine o conjunto imagem.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x+1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < -1 \\ x, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

21. Para as funções f e g abaixo, determine as funções $f+g$, $f-g$, fg, f/g e $2f$ e encontre seus domínios.

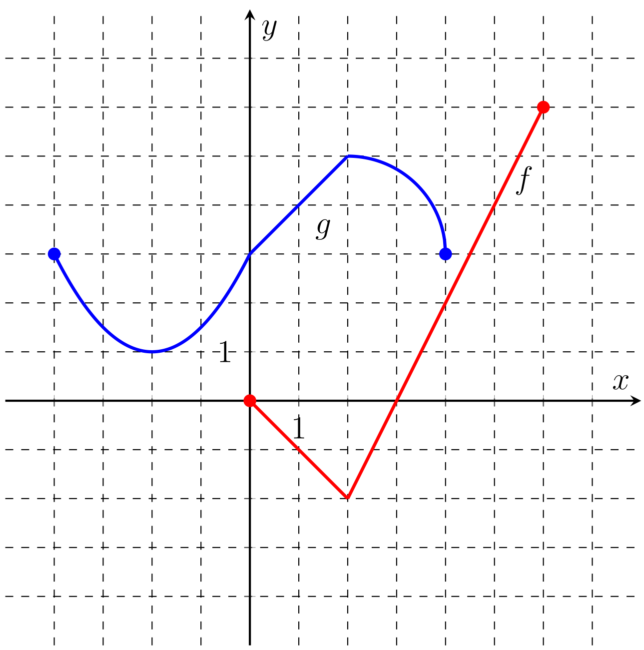
(a) $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x^2$. **(b)** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$.

(c) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ e $g(x) = \dfrac{4}{x+4}$.

22. Considere as funções $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = 2 - x^2$. Calcule o que se pede:

(a) $f(2)$; **(b)** $f(g(0))$; **(c)** $g(f(0))$; **(d)** $f(f(4))$; **(e)** $g(g(3))$;
(f) $f(g(-2))$; **(g)** $f(x+1)$; **(h)** $f(g(x))$.

23. Considere as funções f e g cujos gráficos estão representados abaixo. Calcule o que se pede (se fizer sentido):



(a) $f(g(2))$; **(b)** $g(f(0))$; **(c)** $g(f(4))$; **(d)** $f(g(0))$;

(e) $g(g(-2))$; **(f)** $f(f(4))$; **(g)** $g(f(-1))$; **(h)** $g(f(6))$.

24. Nos itens abaixo, determine as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$ e seus domínios.

(a) $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 4x - 1$.

(b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.

(c) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x - 3}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $g(x) = 2x - 1$.

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

25. Expresse as funções abaixo como $f \circ g$, conforme exemplo no item (a).

(a) $F(x) = (x - 9)^5$.
Solução. Defina $f(x) = x^5$ e $g(x) = x - 9$. Assim,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 9) = (x - 9)^5 = F(x),$$

isto é, $F = f \circ g$.

(b) $F(x) = \sqrt{x + 1}$.

(c) $F(x) = |x^3 - x + 3|$.

(d) $F(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[1] G. Iezzi, C. Murakami – *Fundamentos de Matemática Elementar.* 7ª ed., Atual Editora, São Paulo, 2004.

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.