Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

11ª lista complementar de exercícios (30/10/2017 a 03/11/2017)

1. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das funções abaixo.

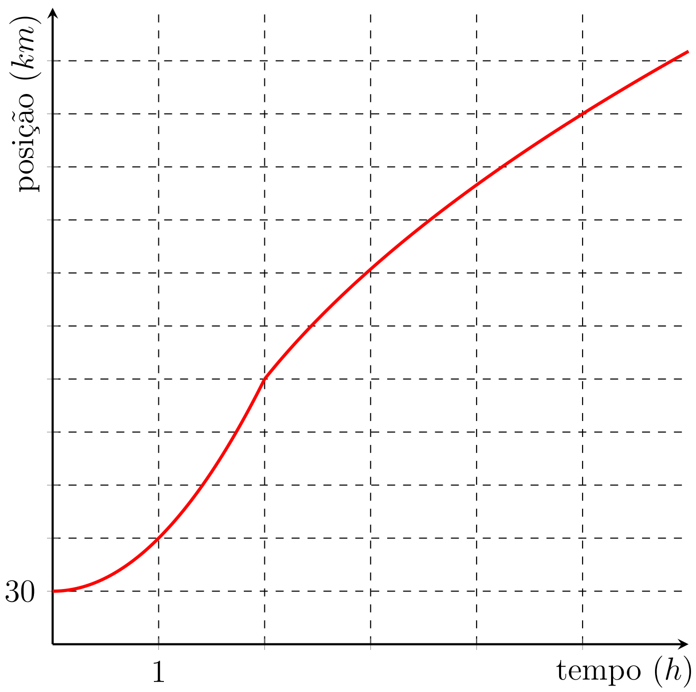
(a) $f(x) = 3x - 2$. **(b)** $f(x) = -x + 1$;. **(c)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$. **(d)** $f(x) = -x^2 + 4$.

Observação. Por enquanto não possuímos ferramentas suficientes para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função qualquer (sem ter à disposição o gráfico). No curso de Cálculo 1, aprenderemos novas ferramentas para isso.

2. Nos itens do exercício anterior, determine os máximos e mínimos locais, assim como os valores de x nos quais são atingidos.

Observação. Também não possuímos ferramentas suficientes para determinar os máximos e mínimos de uma função qualquer (sem ter à disposição o gráfico). Também aprenderemos ferramentas para isso no curso de Cálculo 1.

3. Suponha que você esteja dirigindo um carro em uma rodovia em que há placas indicando em qual quilômetro da rodovia você está. Com essas marcações, você montou uma tabela com sua posição em cada instante de tempo e obteve o gráfico abaixo.



Pelo gráfico, percebemos que a viagem iniciou no quilômetro 30 da rodovia, que após uma hora a posição é $60\,km$, após duas horas é $150\,km$ e que após 5 horas a posição é $300\,km$. Com essas informações, podemos concluir, por exemplo, que a velocidade média entre os instantes $2\,h$ e $5\,h$ é

$$v_m = \frac{300 - 150}{5 - 2} = 50\,km/h.$$

Para isso, o que fizemos foi calcular a diferença entre as posições (final e inicial) e dividir pelo tempo transcorrido (que é a diferença entre os tempos final e inicial). De denominarmos a função do gráfico acima por $s(t)$, podemos escrever que a velocidade média entre os instantes $2\,h$ e $5\,h$ é

$$\frac{s(5) - s(2)}{5 - 2}.$$

De forma mais geral, se o tempo final é b e o inicial é a, a velocidade média ficaria

$$\frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

A expressão acima não precisa mais estar ligada à velocidade média: podemos pensar que s é uma função e b e a são valores do seu domínio. Com isso em mente, faremos uma definição. Sejam f uma função e a e b números em seu domínio, com $b > a$. Definimos a *taxa de variação média* de f entre a e b como

$$\text{taxa de variação média} = \frac{\text{variação em } f}{\text{variação em } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A motivação para a nomenclatura "taxa de variação média" é inspirada no próprio significado da velocidade média. No exemplo anterior, a velocidade média igual a $50\,km/h$ significa que, em média, a posição aumentou $50\,km$ a cada hora, isto é, medimos o quanto a posição variou em média. Em outras palavras, a velocidade média mede a variação média da posição.

Encontre a taxa de variação média das funções abaixo entre os valores indicados.

(a) $f(x) = 3x - 2$, $a = 1$ e $b = 4$.

(b) $f(x) = 3x - 2$, a e b quaisquer.

(c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $a = 0$, $b = 3$.

(d) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $a = 0$, $b = 4$.

4. No item (c) da questão anterior, encontre a equação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Você notou alguma relação entre essa reta e a taxa de variação média calculada? Essa relação vale sempre?

5. Seja n um número natural positivo. Mostre que $f(x) = x^n$ é uma função par se n é par e que $f(x) = x^n$ é ímpar se n é ímpar. *Comentário.* Isso parece uma boa justificativa para a nomenclatura par e ímpar de funções, não parece?

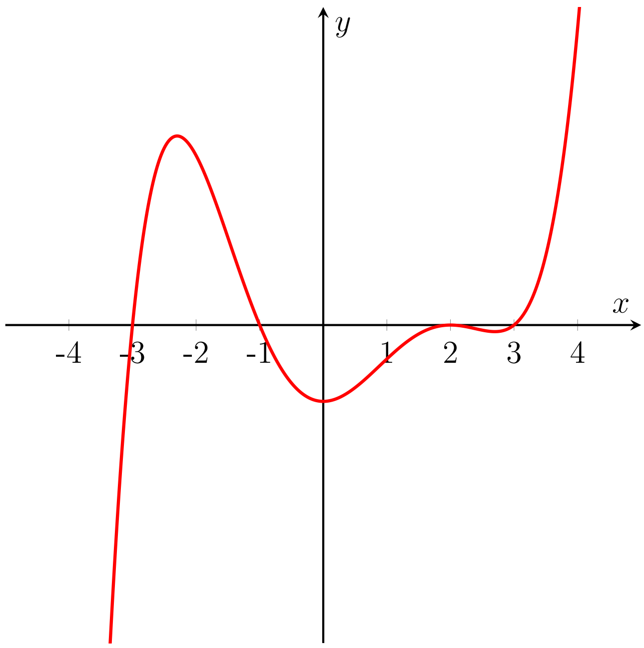
6. Sejam f e g duas funções pares. Mostre que $f + g$ é par e que $a \cdot f$ também é par para qualquer número real a. Mostre que um resultado análogo também é verdadeiro para funções ímpares. Utilize esse exercício e o anterior para concluir que toda função polinomial em que há apenas potências pares de x (e possivelmente um termo independente) é uma função par e que toda função polinomial em que há apenas potências ímpares de x é uma função ímpar.

7. Mostre que toda função pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar. Mostre também que essa escrita é única. O que esse exercício significa quando nos restringimos a funções polinomiais?

8. Sejam f e g funções. Mostre que se g é par, então $f \circ g$ também é par. Mostre que se f é par e g é ímpar, então $f \circ g$ é par. Mostre que se f e g são ímpares, então $f \circ g$ é ímpar.

9. Seja n um número natural positivo. Faça o gráfico das funções $f(x) = x^n$ e $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Você consegue encontrar algum padrão de formação nesses gráficos?

10. Neste exercício tentaremos aprender um pouco sobre o gráfico de funções polinomiais quaisquer (o exercício apenas dá uma ideia não muito precisa, em Cálculo 1 você terá mais recursos para isso). A ideia será ilustrada através de um exemplo. Considere a função $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - 18x^3 + 62x^2 - 72$. A primeira coisa a fazer aqui é encontrar as raízes (para isso, temos que usar divisão polinomial) e fatorar o polinômio. Nesse caso, já fiz a fatoração (faça você também!!) e descobri que $f(x) = 2(x+3)(x+1)(x-2)^2(x-3)$. Agora, vamos usar essa fatoração para estudar o sinal de $f(x)$. Fazendo análise de sinal, concluímos que $f(x)$ é negativo em $(-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (2, 3)$ e positiva em $(-3, -1) \cup (3, \infty)$. Agora, devemos pensar da seguinte forma: sabemos onde $f(x)$ vale 0, onde é positivo e onde é negativo. Basta "imaginar" um gráfico com esse comportamento (essa é a parte imprecisa do método, nem sempre a parte de imaginar funciona). Por exemplo, sabemos que $f(x) = 0$ em $x = -3$ e que f é negativa se $x < -3$, isso nos diz que (provavelmente) $f(x)$ cresce em $(-\infty, -3)$ até atingir o eixo x em -3. Em $(-3, -1)$, $f(x)$ é positiva, mas $f(-3) = f(-1) = 0$. Isso nos diz que (provavelmente) $f(x)$ cresce um pouco e depois decresce no intervalo $(-3, 1)$. Continuando análise, $f(x)$ (provavelmente) decresce um pouco e depois cresce $(-1, 2)$. O mesmo (provavelmente) ocorre em $(2, 3)$. Por fim, $f(x)$ (provavelmente) cresce em $(3, \infty)$. Com isso, o gráfico (provavelmente) tem o comportamento abaixo.

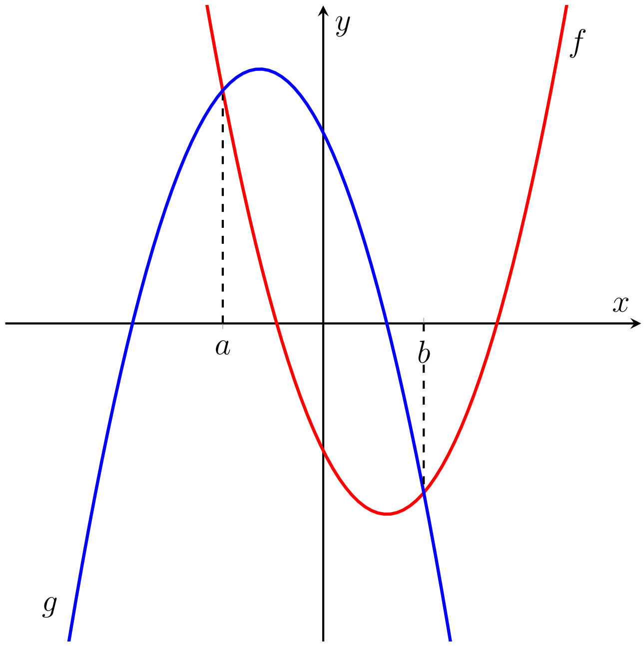


Utilize essa ideia para esboçar o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x) = (x-2)^2(x+2)(x-5)$.

(b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$.

11. Após aprendermos funções, podemos relacionar esse conteúdo com equações e inequações. Por exemplo, se chamarmos a expressão do lado esquerdo de uma equação por $f(x)$ e a do lado direito de $g(x)$, a equação se reduz a $f(x) = g(x)$. O mesmo argumento pode ser relacionado com inequações obtendo, por exemplo $f(x) > g(x)$. Essas equações e inequações possuem relações importantes com os gráficos das funções envolvidas. Sejam f e g funções cujos gráficos estão representados abaixo.



Descreva cada um dos conjuntos abaixo, conforme exemplo no item (a).

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\}$.
Solução. $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} = (a, b)$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$.

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}$.

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq g(x)\}$.

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq g(x)\}$.

12. Considere as mesmas funções f e g do exercício anterior. Pinte, no plano cartesiano, as regiões representadas pelos conjuntos abaixo.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < f(x)\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq f(x)\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$.

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) < y < g(y)\}$.

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) < y < f(y)\}$.

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ e } y > g(x)\}$.

(h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ e } y \leq f(x)\}$.

13. Refaça os dois exercícios anteriores (exceto os dois últimos itens do exercício anterior) para as funções $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = -x$.

14. Resolva, graficamente, as equações e inequações abaixo.

(a) $x^2 - 1 = 2x + 4$.

(b) $x^2 - 1 > 2x - 4$.

(c) $x^2 - 1 \leq 2x - 4$.

(d) $x^2 - 1 = -x^2 + 1$.

15. Considere $g(x) = 3x - 2$ e $h(x) = x^2 - 3x + 4$.

(a) Encontre uma função f tal que $g \circ f = h$.

(b) Encontre uma função f tal que $f \circ g = h$.

16. Como você resolveria o exercício anterior de forma genérica? Por exemplo, no item (a), dadas funções g e h, qual é a função f que satisfaz $g \circ f = h$?

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[1] G. Iezzi, C. Murakami – *Fundamentos de Matemática Elementar*. 7ª ed., Atual Editora, São Paulo, 2004.

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus*. 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.