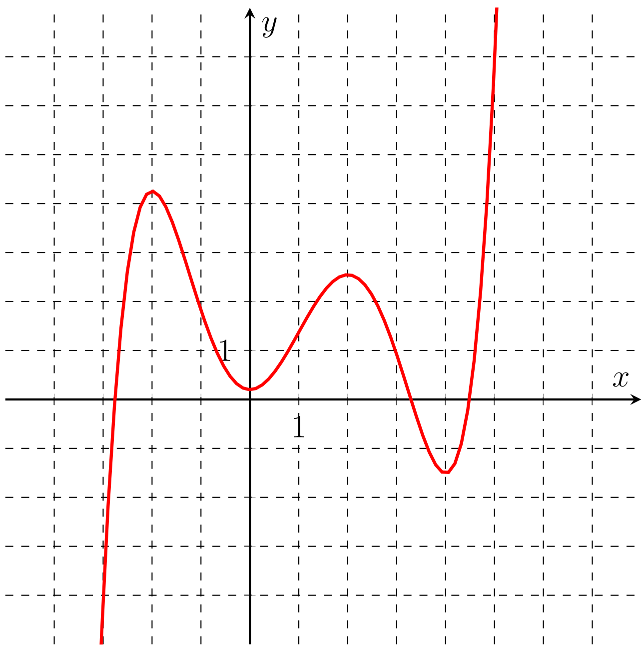
Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

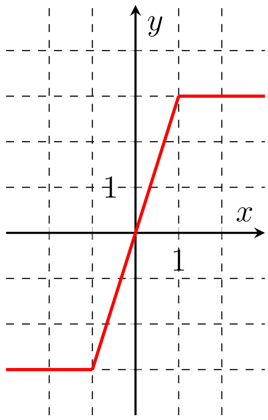
11ª lista de exercícios (30/10/2017 a 03/11/2017)

1. Sejam f uma função e I um intervalo contido no domínio de f. Dizemos que f é *crescente em* I se $f(x_2) > f(x_1)$ para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ com $x_2 > x_1$. Em outras palavras, o valor de $f(x)$ aumenta à medida que x aumenta. Similarmente, dizemos que f é *decrescente em* I se $f(x_2) < f(x_1)$ para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ com $x_2 > x_1$. Quando dizemos que f é crescente (sem mencionar intervalo), significa que f é crescente em todo o seu domínio (o mesmo se aplica para f decrescente). Por exemplo, considere a função cujo gráfico é dado pelo figura abaixo.

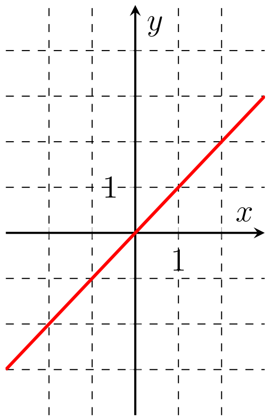


Note que a função é crescente em $(-\infty, -2]$, em $[0, 2]$ e em $[4, \infty)$ e é decrescente em $[-2, 0]$ e em $[2, 4]$. Nos itens abaixo, diga os intervalos de crescimento e decrescimento das funções.

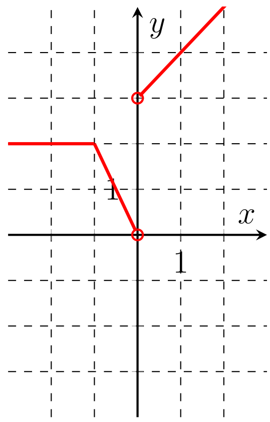
(a)



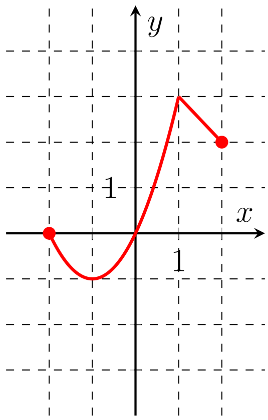
(b)



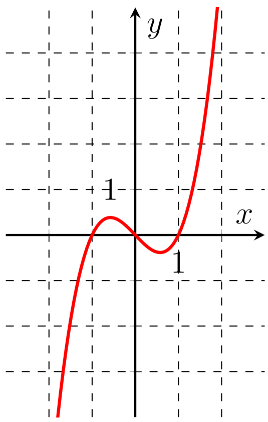
(c)



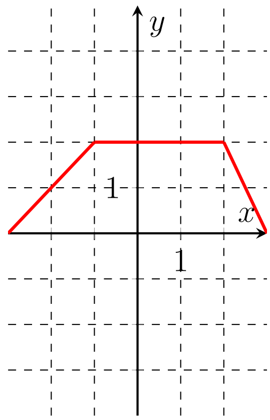
(d)



(e)

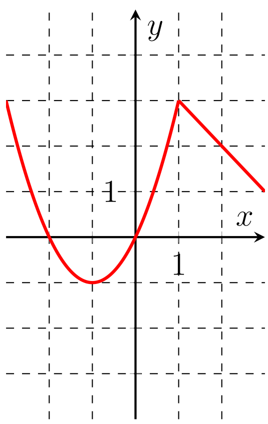


(f)

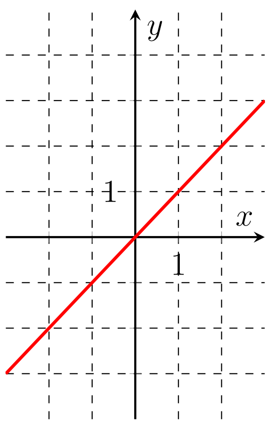


2. Considere a função f cujo gráfico está no enunciado do exercício anterior. Observe que, próximo ao ponto $(-2, f(-2))$, todos os outros valores de $f(x)$ são menores ou iguais a $f(-2)$. Nesse caso, dizemos que $f(-2)$ é um *máximo local* para f. Da mesma forma, $f(2)$ também é um máximo local. Com um raciocínio análogo, dizemos que $f(0)$ e $f(4)$ são *mínimos locais*. Outra forma de expressar é dizer que f possui máximos locais em -2 e 2 e mínimos locais em 0 e 4. Nos itens abaixo, determine os máximos e mínimos locais, assim como os valores de x nos quais são atingidos.

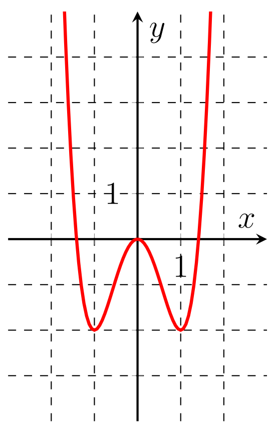
(a)



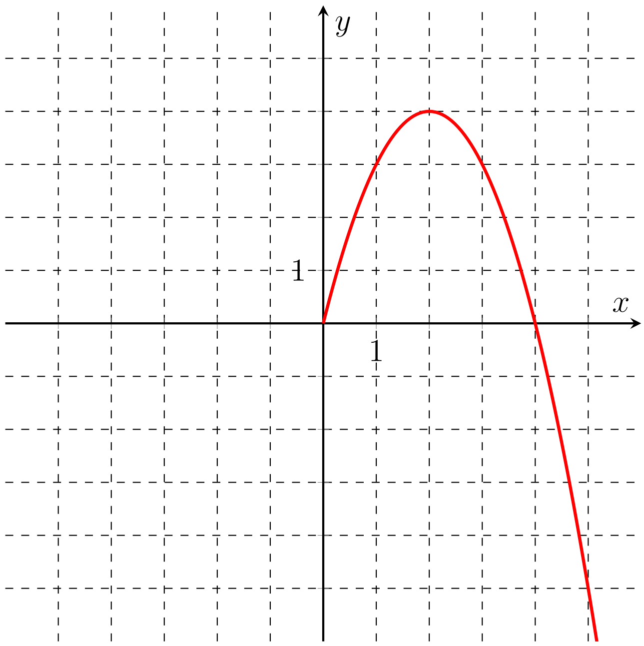
(b)



(c)



3. Seja f uma função com um domínio simétrico em relação à origem (por exemplo, um domínio da forma $[-a, a]$). Dizemos que f é uma função *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$. Se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$, dizemos que f é uma função *ímpar*. Por exemplo, $f(x) = x^4$ é uma função par pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$. A função $f(x) = x^3 - x$ é uma função ímpar pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$. A função $f(x) = x^2 + x$ não é nem par nem ímpar, pois $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ e essa expressão não é igual a $f(x) = x^2 + x$ para todo x. O gráfico das funções pares possui a propriedade de ser simétrico em relação ao eixo das ordenadas (isto é, a metade esquerda e a metade direita do gráfico são espelhadas). O gráfico das funções ímpares possui a propriedade de ser simétrico em relação à origem (isto é, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, então o ponto $(-x, -y)$ também pertence). Complete o gráfico da função em que uma parte do gráfico está desenhada abaixo, sabendo que:



(a) A função é par;

(b) A função é ímpar.

4. Determine quais funções são pares, quais são ímpares ou nem uma nem outra.

(a) $f(x) = x^4$.

(b) $f(x) = x^3$.

(c) $f(x) = x^2 + x$.

(d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.

(e) $f(x) = x^5 - x^3$.

(f) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$.

(g) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$.

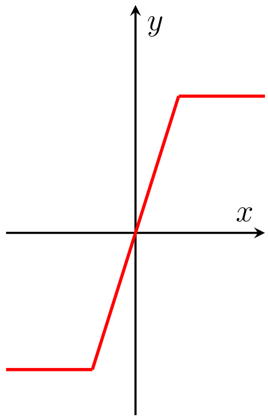
(h) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

5. Na hora de fazer o gráfico de uma função, qual é a vantagem de se saber previamente se uma função é par ou ímpar?

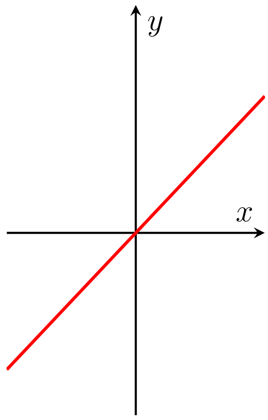
6. Faça o gráfico das funções $f(x) = x^n$ e $g(x) = \sqrt[n]{x}$, para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

7. Diga quais das funções abaixo são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, considerando $\mathbb{R}$ como contra-domínio para todas elas.

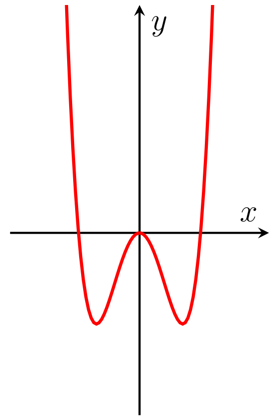
(a)



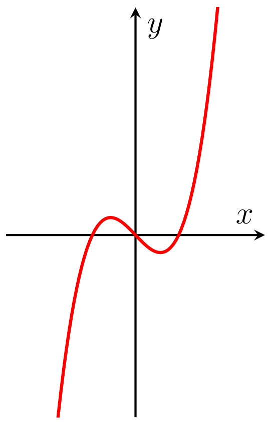
(b)



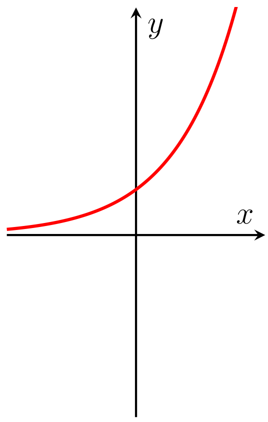
(c)



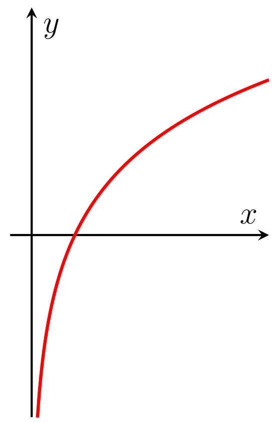
(d)



(e)



(f)



8. Determine quais das funções abaixo são injetoras. Se a resposta for positiva, determine o conjunto imagem e encontre a função inversa (para isso, considere o contradomínio igual à imagem).

(a) $f(x) = -2x + 4$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$.

(c) $f(x) = -\sqrt{x}$.

(d) $f(x) = |x|$.

(e) $f(x) = x^2 - 2x$.

(f) $f(x) = x^3 + 8$;

(g) $f(x) = x^4 + 5$.

(h) $f(x) = x^4 + 4$, com $0 \leq x \leq 2$.

9. Todas as funções abaixo são injetoras (verifique!). Encontre a inversa dessas funções (assumindo contradomínio igual ao conjunto imagem).

(a) $f(x) = 2x + 1$.

(b) $f(x) = 5 - 4x^3$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, com $x > 0$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

(e) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$.

(f) $f(x) = \dfrac{4x-2}{3x+1}$.

(g) $f(x) = \sqrt{2x+5}$.

(h) $f(x) = x^2 + x$, com $x \geq -1/2$.

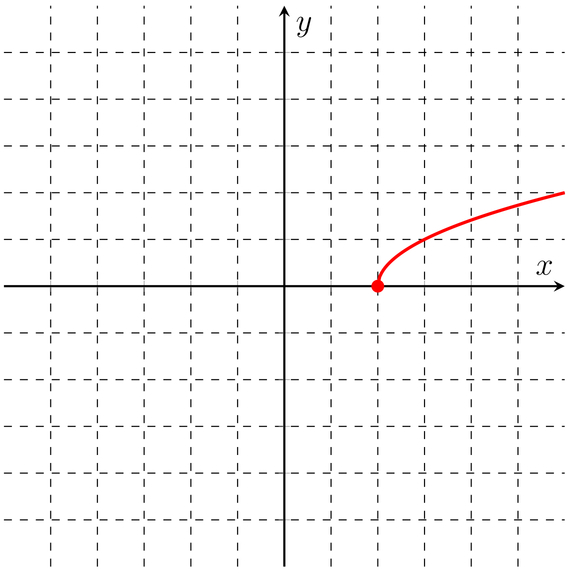
(i) $f(x) = 4 - x^2$, com $x \leq 0$.

(j) $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$.

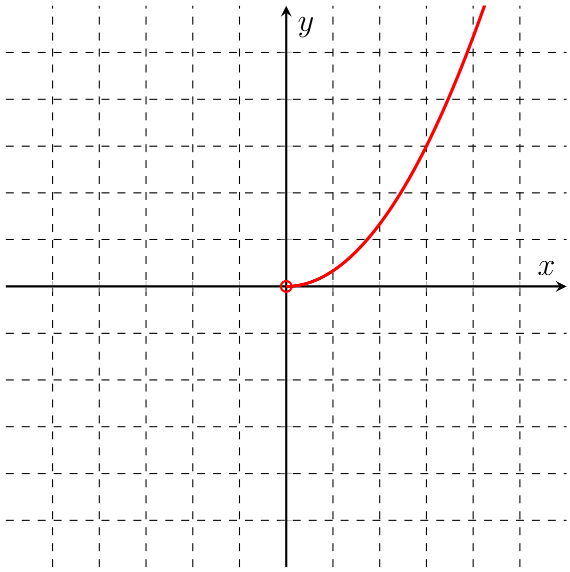
(k) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, com $0 \leq x \leq 3$.

10. Nos itens abaixo, faça o gráfico da inversa da função cujo gráfico está representado.

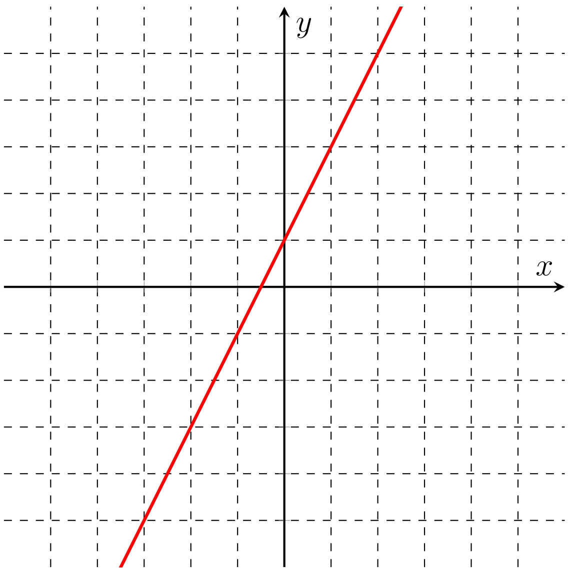
(a)



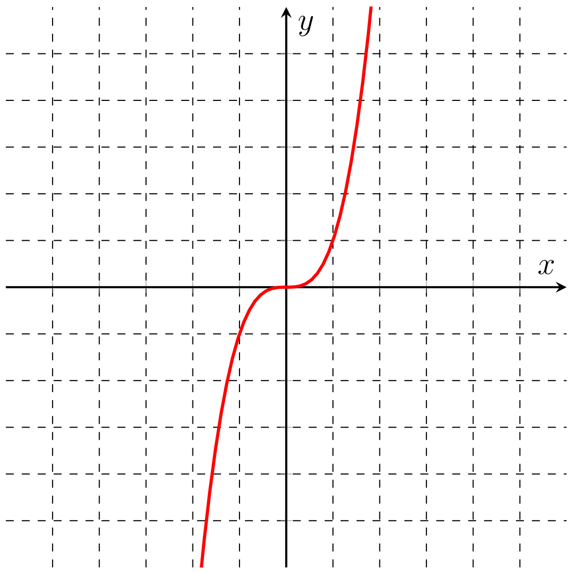
(b)



(c)



(d)



11. Qual a diferença entre $f^{-1}(x)$ e $f(x)^{-1}$?

12. Seja f uma função inversível (isto é, que possui inversa) e suponha que $f(1) = 3$ e que $f(3) = 7$. Determine $f^{-1}(3)$ e $f(3)^{-1}$.

13. Faça o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x) = |x|$. **(b)** $f(x) = |x| + 1$. **(c)** $f(x) = |x + 1|$.

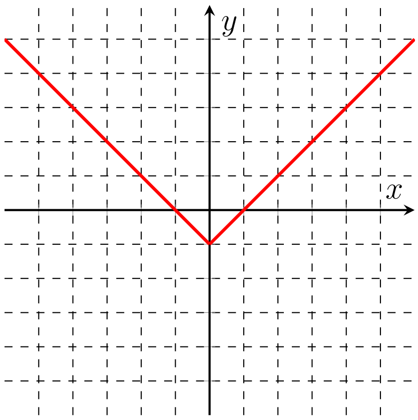
(d) $f(x) = |5x - 3|$. **(e)** $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$. **(f)** $f(x) = |x^2 + x + 1|$.

(g) $f(x) = |x|^2 - 6|x| + 5$. **(h)** $f(x) = |2x - 3| + |x + 2|$. **(i)** $f(x) = |x - 2| + |x - 5|$.

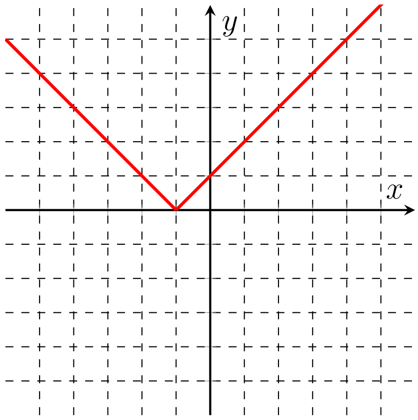
14. Associe as funções aos gráficos.

(a) $f(x) = |x + 1|$. **(b)** $g(x) = |x - 1|$. **(c)** $h(x) = |x| - 1$. **(d)** $k(x) = -|x|$.

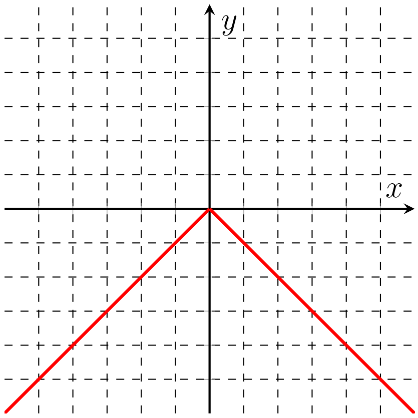
(I)



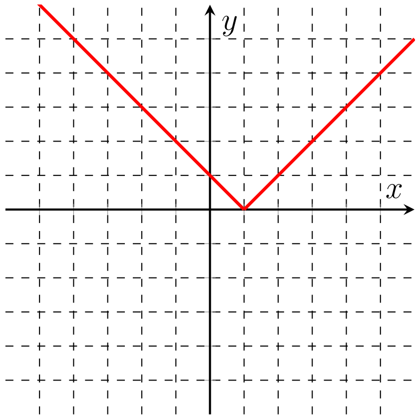
(II)



(III)



(IV)



15. Suponha que seja conhecido o gráfico de uma função f. Em cada item, descreva como obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f.

(a) $g(x) = f(x) - 5$. **(b)** $g(x) = f(x-5)$. **(c)** $g(x) = f(x+7)$. **(d)** $g(x) = f(x) + 7$.

(e) $g(x) = -f(x)$. **(f)** $g(x) = f(-x)$. **(g)** $g(x) = -2f(x)$. **(h)** $g(x) = -\dfrac{1}{2}f(x)$.

(i) $g(x) = -f(x) + 5$. **(j)** $g(x) = 3f(x) - 5$. **(k)** $g(x) = f(x-4) + \dfrac{3}{4}$. **(l)** $g(x) = f(x+4) - \dfrac{3}{4}$.

(m) $g(x) = 2f(x+1) - 3$. **(n)** $g(x) = 3 - 2f(x)$. **(o)** $g(x) = f(4x)$. **(p)** $g(x) = f(\frac{1}{4}x)$.

(q) $g(x) = 2f(\frac{1}{2}x)$. **(r)** $g(x) = f(|x|)$. **(s)** $g(x) = |f(x)|$. **(t)** $g(x) = |f(|x|)|$.

16. Nos itens abaixo, explique como obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f.

(a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 2$. **(b)** $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x+2)^2$.

(c) $f(x) = |x|$ e $g(x) = |x+2| - 2$. **(d)** $f(x) = |x|$ e $g(x) = |x-2| + 2$.

(e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = -\sqrt{x} + 1$. **(f)** $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{-x} + 1$.

17. Use o gráfico da função $f(x) = x^2$ para desenhar o gráfico das funções abaixo.

(a) $g(x) = x^2 + 1$. **(b)** $g(x) = (x-1)^2$.

(c) $g(x) = -x^2$ **(d)** $g(x) = (x-1)^2 + 3$.

18. Use o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ para desenhar o gráfico das funções abaixo.

(a) $g(x) = \sqrt{x-2}$. **(b)** $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

(c) $g(x) = \sqrt{x+2} + 2$. **(d)** $g(x) = -\sqrt{x} + 1$.

19. Faça o gráfico das funções abaixo relacionando o gráfico procurado com um gráfico já conhecido.

(a) $f(x) = x^2 - 1$. **(b)** $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$. **(c)** $f(x) = (x-5)^2$. **(d)** $f(x) = \sqrt{x+4}$.

(e) $f(x) = -x^3$. **(f)** $f(x) = -|x|$. **(g)** $f(x) = \sqrt[4]{-x}$. **(h)** $f(x) = \sqrt[3]{-x}$.

(i) $f(x) = \sqrt{x+4} - 3$. **(j)** $f(x) = 3 - \frac{1}{2}(x-1)^2$. **(k)** $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$.

20. Em cada item, uma função f é dada e uma sequência de operações é realizada sobre seu gráfico. Determine a regra de formação da função cujo gráfico é obtido após as operações.

(a) $f(x) = x^2$; o gráfico é transladado 3 unidades para cima.

(b) $f(x) = x^3$; o gráfico é transladado 1 unidade para baixo.

(c) $f(x) = \sqrt{x}$; o gráfico é transladado 2 unidades para a esquerda.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; o gráfico é transladado 1 unidade para a direita.

(e) $f(x) = |x|$; o gráfico é transladado 3 unidades para a direita e 1 para cima.

(f) $f(x) = \sqrt[4]{x}$; o gráfico é refletido em relação ao eixo y e transladado 1 unidade para cima.

(g) $f(x) = x^2$; o gráfico é transladado 2 unidades para a esquerda e refletido em relação ao eixo x.

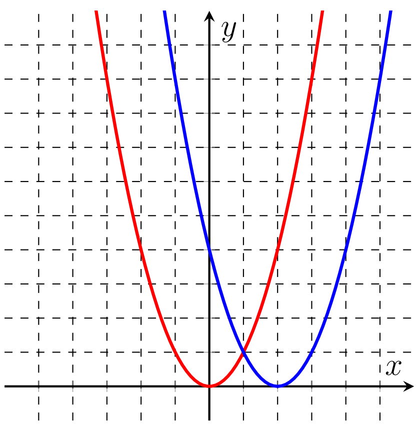
(h) $f(x) = x^2$; o gráfico é esticado verticalmente por um fator 2, transladado 2 unidades e para baixo e 3 para a direita.

(i) $f(x) = |x|$; o gráfico é encolhido verticalmente por um fator $\frac{1}{2}$, transladado uma unidade para a esquerda e 3 para cima.

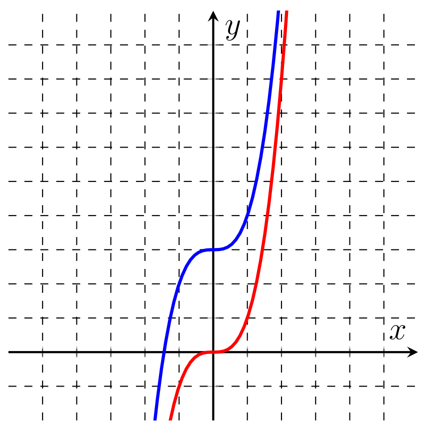
(j) $f(x) = 2x - 3$; o gráfico é refletido em relação à reta $y = x$.

21. Nos itens abaixo, o gráfico da função f está em vermelho e o da função g em azul. Encontre a regra de formação de g a partir de f.

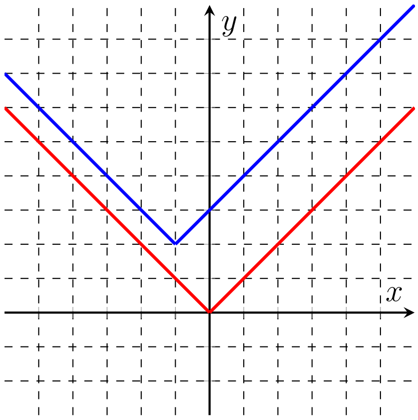
(a) $f(x) = x^2$.



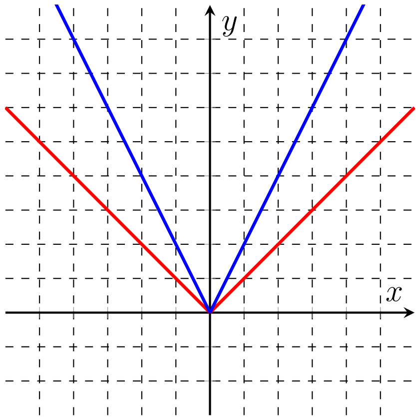
(b) $f(x) = x^3$.



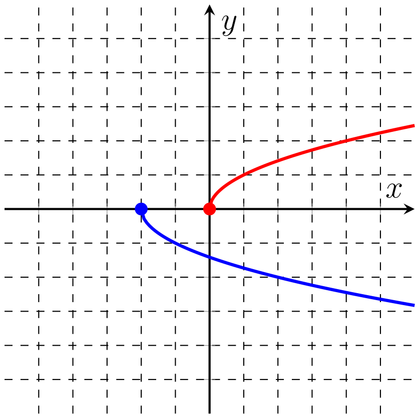
(c) $f(x) = |x|$.



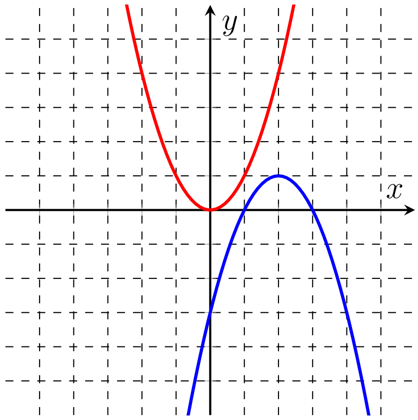
(d) $f(x) = |x|$.



(e) $f(x) = \sqrt{x}$.



(f) $f(x) = x^2$.



Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.