Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

12ª lista complementar de exercícios (06/11/2017 a 10/11/2017)

1. Considere $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}$. Utilize uma calculadora para determinar, aproximadamente, $f(0{,}7)$, $f(\sqrt{7}/2)$, $f(2/3)$ e $f(-1/2)$. Arredonde com três casas decimais.

2. Faça o gráfico das funções abaixo montando uma tabela de valores. Se necessário, use uma calculadora.

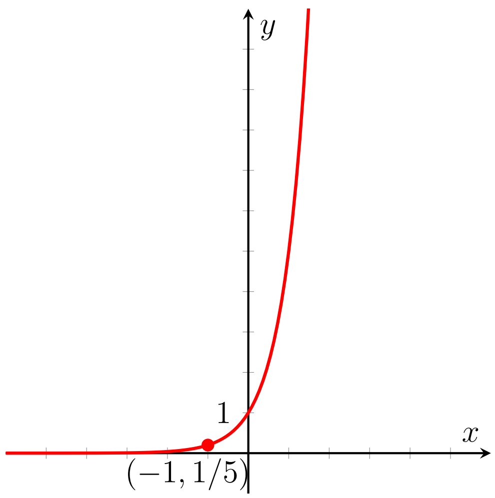
(a) $f(x) = 8^x$. **(b)** $g(x) = (1{,}1)^x$. **(c)** $h(x) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

3. Em cada item, faça o gráfico das funções em um mesmo plano.

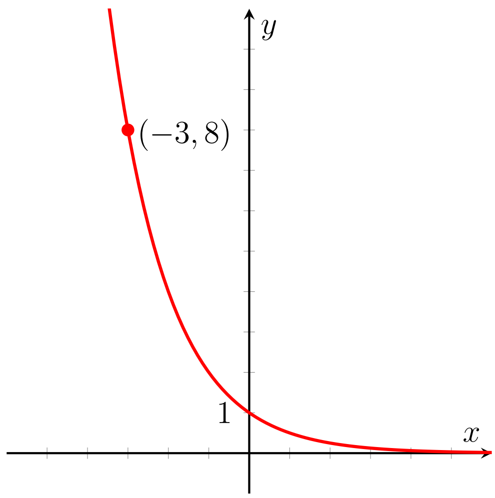
(a) $f(x) = 3^{-x}$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **(b)** $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$.

4. Encontre a função exponencial $f(x) = a^x$ cujo gráfico está representado.

(a)



(b)



5. Faça o gráfico das funções abaixo, partindo de gráficos conhecidos.

(a) $f(x) = 10^{x+3}$. **(b)** $f(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$. **(c)** $f(x) = 5^{-x} + 1$. **(d)** $f(x) = 1 - 3^{-x}$.

(e) $f(x) = 3 - 10^{x-1}$. **(f)** $f(x) = 2^{x-4} + 1$.

6. Compare o crescimento das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ avaliando-as em $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 30$.

7. Considere $f(x) = a^x$. Mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \left(\frac{a^h - 1}{h} \right).$$

8. Uma certa espécie de ratos foi introduzida em uma pequena ilha com uma população inicial de 320 ratos. Medições indicam que a população de ratos dobra a cada ano.

(a) Encontre uma função que modela o número de ratos após t anos.

(b) Encontre o número de ratos após 8 anos.

9. R\$ 100.000,00 foram aplicados em um fundo com rendimento de 8% ao ano. Determine o valor resgatado após 6 anos.

10. Generalize o problema anterior considerando C o capital aplicado, i a taxa de rendimento por período, n o número de períodos e M o montante resgatado após n períodos.

11. Qual é a taxa de rendimento anual equivalente a uma taxa de rendimento mensal de 0,7%?

12. Qual é a taxa de rendimento mensal equivalente a uma taxa de rendimento anual de 10%?

13. Aproximações para o número e podem ser calculadas a partir da expressão

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

para valores grandes de n. Encontre uma aproximação para e (com 5 casas decimais) calculando o valor da expressão anterior com $n = 1.000.000$.

14. Utilize o gráfico da função $f(x) = e^x$ para fazer os gráficos das funções abaixo.

(a) $f(x) = e^{x-2}$.

(b) $f(x) = e^{x-3} + 4$.

(c) $f(x) = e^{x+1} - 3$.

(d) $f(x) = -e^{x-1} - 2$.

15. Uma substância radioativa decai de tal forma que o número de quilogramas remanescentes após t dias é dado por

$$m(t) = 13e^{-0{,}015t}.$$

(a) Qual é a massa no instante inicial?

(b) Qual é a massa remanescente após 45 dias?

(c) Quanto de massa decaiu em 45 dias?

16. Sabemos que um objeto em queda livre tem sua velocidade dada por $v(t) = v_0 + gt$, em que v_0 é a velocidade inicial e g é a aceleração da gravidade. Porém, esse resultado é válido quando desprezamos a resistência do ar. Em uma situação mais fiel, onde a resistência do ar é considerada, a modelagem é bem diferente. Você verá em Cálculo 1 que quando a resistência do ar é modelada proporcional à velocidade do objeto, então uma expressão típica da formulação da velocidade de queda é dado por

$$v(t) = 25(1 - e^{-0{,}2t}),$$

em que t está medido em segundos e $v(t)$ em metros por segundo. Considerando esta equação, determine o que se pede.

(a) Qual é a velocidade inicial?

(b) Qual é a velocidade após $5\,s$ e após $10\,s$?

(c) Faça o gráfico de v em função de t.

(d) A velocidade máxima que um objeto em queda livre com resistência do ar pode atingir é denominada *velocidade terminal.* Utilize o gráfico do item anterior para determinar a velocidade terminal nessa situação. *Comentário.* Perceba a grande diferença entre este caso e o modelo sem resistência do ar: sem resistência, a velocidade aumenta linearmente, sem um limitante superior; com resistência, existe um limitante superior para a velocidade.

17. Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

18. Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x.$$

19. As outras funções hiperbólicas são definidas da seguinte forma:

- *Tangente hiperbólica.* $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$;
- *Cotangente hiperbólica.* $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$;
- *Secante hiperbólica.* $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$;
- *Cossecante hiperbólica.* $\operatorname{cossech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$.

Determine o domínio de cada uma dessas funções.

20. Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tgh}^2 x = 1.$$

21. Calcule o valor das expressões abaixo.

(a) $\log_5 5^4$. **(b)** $\log_4 64$. **(c)** $\log_3 9$. **(d)** $\log_9 81$.

(e) $\log_2 32$. **(f)** $\log_8 8^{17}$. **(g)** $\log_6 1$. **(h)** $\log_5 125$.

(i) $e^{\ln \pi}$. **(j)** $10^{\log 87}$. **(k)** $\log_8 0{,}25$. **(l)** $\log_4 \sqrt{2}$.

(m) $\log_4 \dfrac{1}{2}$. **(n)** $\log_4 8$.

22. Utilize as propriedades dos logaritmos para determinar o valor das expressões abaixo.

(a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$. **(b)** $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$.

(c) $\log_4 16^{100}$. **(d)** $\log_2 8^{33}$.

(e) $\log(\log 10^{10000})$. **(f)** $\ln(\ln e^{e^{200}})$.

23. Uilize as propriedades dos logaritmos para expandir as expressões abaixo.

(**a**) $\log 6^{10}$.
(**b**) $\ln \sqrt{z}$.
(**c**) $\log_6 \sqrt[4]{17}$.
(**d**) $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$.
(**e**) $\ln \sqrt{ab}$.
(**f**) $\log\left(\dfrac{x^3y^4}{z^6}\right)$.
(**g**) $\log\left(\dfrac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$.
(**h**) $\log_5 \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.
(**i**) $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$.
(**j**) $\ln \dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}$.
(**k**) $\log \sqrt[4]{x^2+y^2}$.
(**l**) $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\right)$.
(**m**) $\ln \sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$.
(**n**) $\ln\left(\dfrac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$.

24. Uilize as propriedades dos logaritmos para combinar as expressões abaixo.

(**a**) $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$.
(**b**) $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$.
(**c**) $\dfrac{1}{3}\log(x+2)^3 + \dfrac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2-x-6)^2]$.
(**d**) $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$.

25. Simplifique $(\log_2 5)(\log_5 7)$.

26. Faça o gráfico das funções abaixo, partindo de gráficos conhecidos.

(**a**) $f(x) = 2 + \log_3 x$.
(**b**) $f(x) = \log_3(x-1) - 2$.
(**c**) $f(x) = 1 - \log x$.
(**d**) $f(x) = 1 + \ln(-x)$.
(**e**) $f(x) = |\ln(x)|$.
(**f**) $f(x) = \ln|x|$.

27. Encontre o domínio das funções abaixo.

(**a**) $f(x) = \ln(x - x^2)$.
(**b**) $f(x) = \sqrt{x-2} - \log_5(10-x)$.
(**c**) $f(x) = \sqrt{\log(x^2-1)}$.
(**d**) $f(x) = \dfrac{\log_3(x^2-4x+3)}{\log_2(2x-8)-1}$.
(**e**) $f(x) = \log_2(\log x)$.
(**f**) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$.

28. Encontre a inversa da função $f(x) = \dfrac{2^x}{1+2^x}$. Qual o domínio da inversa?

29. O número 10^{100} é denominado *googol* e o número 10^{googol} é denominado *googolplex*. Calcule

(**a**) log(log(googol)).
(**b**) log(log(log(googolplex))).

30. Calcule $\log 1$, $\log 10$, $\log 100$, etc. e observe que o resultado é uma unidade a mais que o número de algarismos do número de entrada. Considere, agora, um número qualquer, por exemplo 32516. Como a função logaritmo é crescente, então $\log 10000 < \log 32516 < \log 100000$ e, portanto, $4 < \log 32516 < 5$. Seguindo este raciocínio, concluímos que se um número inteiro N possui n algarismos, então $n - 1 \leq \log N < n$. Utilize essa ideia para descobrir quantos algarismos possui o número 2^{200}.

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.