Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

13ª lista complementar de exercícios (13/11/2017 a 17/11/2017)

1. Resolva as equações abaixo.

(a) $2^x = 0$.
(b) $0{,}25^{2x-3} = 4^{3x-2}$.
(c) $2^x = 0{,}125$.
(d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2-1} = 32$.
(e) $3^x = \frac{1}{27}$.
(f) $10^{-x} = 4$.
(g) $e^{3x} = 12$.
(h) $3^{2x-1} = 5$.
(i) $3e^x = 10$.
(j) $4 + 3^{5x} = 8$.
(k) $2^{3x} = 34$.
(l) $2e^{12x} = 17$.
(m) $e^{1-4x} = 2$.
(n) $4(1 + 10^{5x}) = 9$.
(o) $5^{-x/100} = 2$.
(p) $e^{3-5x} = 16$.
(q) $8^{0{,}4x} = 5$.
(r) $3^{x/14} = 0{,}1$.
(s) $e^{2x+1} = 200$.
(t) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 75$.
(u) $10^{1-x} = 6^x$.
(v) $2^{3x+1} = 3^{x-2}$.
(w) $\frac{10}{1 + e^{-x}} = 2$.
(x) $100(1{,}04)^{2t} = 300$.
(y) $1{,}00625^{12t} = 2$.

2. Resolva as equações abaixo.

(a) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.
(b) $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$.
(c) $4x^3e^{-3x} - 3x^4e^{-3x} = 0$.
(d) $x^2e^x + xe^x - e^x = 0$.

3. Resolva as equações abaixo.

(a) $\log(3x + 5) = 2$.
(b) $\log_3(2 - x) = 3$.
(c) $4 - \log(3 - x) = 3$.
(d) $2\log x = \log 2 + \log(3x - 4)$.
(e) $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$.
(f) $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$.
(g) $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 3$.
(h) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$.
(i) $\log x + \log(x - 3) = 1$.
(j) $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$.
(k) $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{6}$.

4. Utilize os gráficos das funções envolvidas para determinar o número de soluções das equações abaixo.

(a) $\ln x = 3 - x$.
(b) $\log x = x^2 - 2$.
(c) $e^x = -x$.
(d) $2^{-x} = x - 1$.

5. Resolva as inequações abaixo.

(a) $4^{-x} > 0$.

(b) $2 < 10^x < 5$.

(c) $3 \leq \log_2 x \leq 4$.

(d) $\log(x-2) + \log(9-x) < 1$.

(e) $(3x^2 - 1)e^{-x} < 0$.

6. Encontre a inversa das funções abaixo.

(a) $f(x) = 3^{3+x}$.

(b) $f(x) = \ln(3x)$.

7. Encontre a inversa da função $f(x) = \cosh x$ para $x \geq 0$. A função inversa encontrada é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arccosh} x$.

8. Encontre a inversa da função $f(x) = \operatorname{senh} x$. A função inversa encontrada é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsenh} x$.

9. Suponha que você esteja dirigindo o seu carro em um dia muito frio (temperatura ambiente de $5° C$) e o motor do seu carro superaqueceu (chegou a $105° C$). Você estaciona e espera o motor esfriar. A equação que governa a temperatura T (em $° C$) do motor após t minutos parado é dada por

$$\ln\left(\frac{T-5}{100}\right) = -0{,}11t.$$

(a) Determine $T(t)$, isto é, escreva T em função de t.

(b) Utilize o item (a) para determinar a temperatura do motor após 20 minutos.

10. Um circuito elétrico é formado por uma bateria de $60\,V$, um resistor de $10\,\Omega$ e um indutor de $5\,H$ colocados em série. Usando cálculo e as leis físicas que governam o sistema, é possível mostrar que a corrente I (em A) t segundos após o circuito ser ligado é dada por

$$I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5}).$$

(a) Determine $t(I)$, isto é, escreva t em função de I.

(b) Após quantos segundos a corrente será de $2\,A$?

11. Sabendo que os pontos abaixo pertencem ao círculo unitário, determine a componente que está faltando.

(a) $P = \left(x, -\frac{1}{3}\right)$ e P pertence ao 3º quadrante.

(b) $P = (x, 1)$.

(c) $P = (-1, y)$.

(d) $P = \left(\frac{2}{5}, y\right)$ e P pertence ao 1º quadrante.

(e) $P = \left(x, -\frac{2}{7}\right)$ e P pertence ao 4º quadrante.

(f) $P = \left(-\frac{2}{3}, y\right)$ e P pertence ao 2º quadrante.

12. Determine o ponto terminal dos valores de t abaixo.

(a) $t = \dfrac{7\pi}{6}$.

(b) $t = \dfrac{5\pi}{3}$.

(c) $t = -\dfrac{3\pi}{4}$.

(d) $t = \dfrac{11\pi}{6}$.

13. Demonstre que o ponto terminal de $t = \pi/4$ é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

14. A partir de um triângulo equilátero com lado medindo 1 e do Teorema de Pitágoras, deduza que que o ponto terminal de $t = \pi/6$ é $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e que o ponto terminal de $t = \pi/3$ é $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

15. Sabe-se que o terminal de t é $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Determine o terminal de:

(a) $\pi - t$; **(b)** $\pi + t$; **(c)** $-t$; **(d)** $2\pi + t$;

(e) $4\pi - t$; **(f)** $t - \pi$; **(g)** $\pi/2 + t$; **(h)** $t - \pi/2$.

16. Determine o número de referência dos valores de t abaixo.

(a) $t = \dfrac{3\pi}{4}$. **(b)** $t = -\dfrac{7\pi}{6}$. **(c)** $t = \dfrac{13\pi}{4}$. **(d)** $t = \dfrac{7\pi}{6}$.

(e) $t = \dfrac{17\pi}{4}$. **(f)** $t = \dfrac{31\pi}{6}$. **(g)** $t = \dfrac{16\pi}{3}$.

17. Determine o ponto terminal dos valores de $\bar{t}$ e t do exercício anterior.

18. Determine $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{cotg} t$, $\sec t$ e $\operatorname{cossec} t$ para os valores de t abaixo.

(a) $t = \dfrac{\pi}{3}$. **(b)** $t = \dfrac{2\pi}{3}$.

(c) $t = \dfrac{4\pi}{3}$. **(d)** $t = \dfrac{5\pi}{3}$.

(e) $t = -\dfrac{5\pi}{3}$. **(f)** $t = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

19. As funções $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{cotg} t$, $\sec t$ e $\operatorname{cossec} t$ podem ser definidas algébrica e geometricamente. Por exemplo, podemos definir $\operatorname{tg} t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$ ou como a ordenada do ponto de intersecção entre a reta vertical $x = 1$ e a reta que passa pela origem e pelo ponto terminal de t. Mostre que essas duas definições são equivalentes (para cada uma dessas quatro funções).

20. Sabendo que o ponto terminal de t está no terceiro quadrante, escreva $\operatorname{sen} t$, $\operatorname{tg} t$ e $\operatorname{cotg} t$ em função de $\cos t$.

21. Sabendo que o ponto terminal de t está no primeiro quadrante, escreva $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\operatorname{cotg} t$, $\sec t$ e $\operatorname{cossec} t$ em função de $\operatorname{tg} t$.

22. Utilize o círculo trigonométrico para verificar que $\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$, que $\cos(t + \pi) = -\cos t$, e $\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t$.

23. Faça o gráfico das funções abaixo, determinando o período, a amplitude e a fase.

(a) $f(x) = 2 \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. **(b)** $f(x) = 3 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(c) $f(x) = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. **(d)** $f(x) = 1 + \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(e) $f(x) = 3 \cos \pi \left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

24. Utilize um software matemático para fazer, no mesmo plano, o gráfico das três funções em cada item.

(a) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = -\sqrt{x}$.

(b) $f(x) = x \cos x$, $g(x) = x$ e $h(x) = -x$.

25. Toda vez que o coração bate, a pressão sanguínea aumenta e então decresce à medida que o coração relaxa entre as batidas. As pressões sanguíneas máxima e mínima são denominadas *pressão sistólica* e *diastólica*, respectivamente. A leitura da pressão é escrita na forma sistólica/diastólica. Por exemplo, a leitura 120/80 é considerada normal. A pressão sanguínea p de uma certa pessoa é modelada pela função

$$p(t) = 115 + 25\,\text{sen}(160\pi t),$$

em que t é medido em minutos e $p(t)$ em $mmHg$ (milímetros de mercúrio).

(a) Determine o período de p.

(b) Determine a leitura da pressão deste indivíduo.

(c) Determine o número de batidas por minuto do coração.

26. Faça o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x) = \text{tg}(2x + \pi)$.

(b) $f(x) = \text{cotg}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(c) $f(x) = 2\sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

(d) $f(x) = 2\,\text{cossec}\left(\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

27. Converta de graus para radianos.

(a) 1080°.

(b) 15°.

(c) -735°.

28. Converta de radianos para graus.

(a) $3\,\text{rad}$.

(b) $\dfrac{5\pi}{18}$ rad.

(c) $-\dfrac{13\pi}{12}$ rad.

29. Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo retângulo sendo a o comprimento da hipotenusa e seja θ a medida do ângulo oposto ao lado de comprimento c. Utilize semelhança de triângulos para mostrar que

$$\text{sen}\,\theta = \frac{c}{a} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{b}{a}.$$

A partir disso determine $\text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}\,\theta$, $\sec\theta$ e $\text{cossec}\,\theta$ em função dos lados do triângulo.

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.