# Universidade Federal de Santa Catarina
# Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
# Departamento de Matemática

## MTM3100 - Pré-cálculo

### 14ª lista complementar de exercícios (20/11/2017 a 01/12/2017)

**1.** Seja $x \in [-1, 1]$. Determine o valor de:

**(a)** $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x)$;

**(b)** $\operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x)$;

**(c)** $\sec(\operatorname{arcsen} x)$;

**(d)** $\operatorname{cossec}(\operatorname{arcsen} x)$.

**2.** Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine o valor de:

**(a)** $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)$;

**(b)** $\cos(\operatorname{arctg} x)$.

**3.** Determine o valor de:

**(a)** $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(-1/3))$;

**(b)** $\cos(\operatorname{arctg} 2)$.

**4.** Reescreva as expressões abaixo usando apenas seno e cosseno e, em seguida, simplifique.

**(a)** $\operatorname{tg} x \operatorname{cossec} x$.

**(b)** $\dfrac{\sec x}{\operatorname{cossec} x}$.

**(c)** $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$.

**(d)** $\dfrac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x \operatorname{sen} x}$.

**(e)** $\dfrac{1 + \cos x}{1 + \sec x}$.

**(f)** $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sec(-x)}$.

**(g)** $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$.

**(h)** $\dfrac{1 + \operatorname{cossec} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$.

**(i)** $\operatorname{tg} x \cos x \operatorname{cossec} x$.

**5.** Verifique que as igualdades abaixo são identidades trigonométricas.

**(a)** $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cossec} x} = \sec x - \cos x$.

**(b)** $\operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{cotg} x = \operatorname{cossec} x$.

**(c)** $\operatorname{cossec} x(\operatorname{cossec} x + \operatorname{sen}(-x)) = \operatorname{cotg}^2 x$.

**(d)** $(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = 1$.

**(e)** $\sec x \operatorname{cossec} x(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) = \sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x$.

**(f)** $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$.

**(g)** $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \operatorname{sen} x \cos x$.

**(h)** $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

**6.** Durante este curso, você estudou diversas situações em que fazer uma mudança de variável simplificava o problema em questão. Este recurso é utilizado com frequência em matemática e muitas das substituições importantes envolvem funções trigonométricas. Nos itens abaixo, reescreva as expressões utilizando a expressão indicada. Siga o item (a) como modelo.

**(a)** $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad x = \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t < \pi/2$.

*Solução.* Inicialmente, observemos que, como $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, então $\cos^2 t = 1 - x^2$ e, portanto, $\cos t = \sqrt{1-x^2}$ (aqui escolhemos a raiz positiva pois $t$ está no primeiro quadrante, onde o cosseno é positivo). Esse passo preliminar foi para identificar como ficaria o denominador da expressão após a substituição. Por fim, a expressão reescrita após a substituição é

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

**(b)** $\sqrt{1+x^2}$, $\quad x = \operatorname{tg} t$, com $0 \leq t < \pi/2$.

**(c)** $\sqrt{x^2-1}$, $\quad x = \sec t$, com $0 \leq t < \pi/2$.

**(d)** $\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$, $\quad x = 2\operatorname{tg} t$, com $0 \leq t < \pi/2$.

**(e)** $\sqrt{9-x^2}$, $\quad x = 3\operatorname{sen} t$, com $0 \leq t < \pi/2$.

**7.** Você já percebeu que os gráficos das funções trigonométricas são dois a dois parecidos? Por exemplo, seno e cosseno possuem o mesmo formato, exceto por um deslocamento horizontal. O mesmo ocorre para tangente e cotangente, secante e cossecante. Observe os gráficos e deduza que:

**(a)** $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$;

**(b)** $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$;

**(c)** $\operatorname{tg}(\pi/2 - x) = \operatorname{cotg} x$;

**(d)** $\operatorname{cotg}(\pi/2 - x) = \operatorname{tg} x$;

**(e)** $\sec(\pi/2 - x) = \operatorname{cossec} x$;

**(f)** $\operatorname{cossec}(\pi/2 - x) = \sec x$;

**(g)** $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$;

**(h)** $\cos(x - \pi/2) = \operatorname{sen} x$.

**8.** Este exercício tem como objetivo deduzir a fórmula para o cosseno da soma de arcos:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Para isso, Denote por $P_0 = (1,0)$ a origem do círculo trigonométrico, por $P_1$ o ponto terminal de $a+b$, por $Q_1$ o ponto terminal de $b$ e por $Q_0$ o ponto terminal de $-a$ (faça um desenho para facilitar a compreensão).

**(a)** Utilize a definição do ponto terminal e conclua que $P_1 = (\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$, $Q_1 = (\cos b, \operatorname{sen} b)$ e $Q_0 = (\cos(-a), \operatorname{sen}(-a))$.

**(b)** Utilize as propriedades das funções seno e cosseno para verificar que $Q_0 = (\cos a, -\operatorname{sen} a)$.

**(c)** Observe que o arco que liga os pontos $P_0$ e $P_1$ possui o mesmo comprimento que o arco que liga $Q_0$ a $Q_1$ (os dois arcos medem $a+b$). Com isso, conclua que os segmentos de reta $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{Q_0Q_1}$ possuem o mesmo comprimento.

**(d)** Utilize a fórmula para a distância entre dois pontos e conclua que

$$\sqrt{(\cos(a+b)-1)^2 + (\operatorname{sen}(a+b)-0)^2} = \sqrt{(\cos b - \cos a)^2 + (\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a)^2}.$$

**(e)** Na igualdade acima, eleve os dois lados ao quadrado, desenvolva os quadrados e simplifique. Se tudo correr bem, no final você obterá

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

**(f)** A fórmula para o seno da soma de arcos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

pode ser deduzida a partir da fórmula para o cosseno e do exercício anterior. Você consegue?

**(g)** A fórmula para a tangente da soma de arcos

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

é deduzida a partir das fórmulas obtidas para o seno e cosseno e usando que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Você consegue?

**9.** Calcule:

**(a)** $\operatorname{sen} 15°$; **(b)** $\cos 195°$; **(c)** $\operatorname{tg} 165°$;

**(d)** $\operatorname{sen}(-5\pi/12)$; **(e)** $\cos(11\pi/12)$; **(f)** $\operatorname{tg}(7\pi/12)$.

**10.** Escreva as expressões abaixo em termos de $x$ e $y$:

**(a)** $\cos(\operatorname{arcsen} x - \operatorname{arctg} y)$; **(b)** $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x + \arccos y)$.

**11.** Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen} h}{h}\left(\cos x - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{\cos h + 1}\right).$$

*Sugestão.* Utilize a fórmula para o seno da soma de arcos e observe que $(1 - \cos h)(1 + \cos h) = \operatorname{sen}^2 h$.

**12.** Seja $f(x) = \cos x$. Mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen} h}{h}\left(-\operatorname{sen} x - \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{\cos h + 1}\right).$$

**13.** A partir das fórmulas para a soma de arcos, deduza as fórmulas abaixo.

**(a)** $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. **(b)** $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

**(c)** $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$. **(d)** $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

**(e)** $\operatorname{tg}(2x) = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$. **(f)** $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

**(g)** $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$. **(h)** $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

**(i)** $\operatorname{sen}(x/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$, em que o sinal é escolhido de acordo com o quadrante ao qual $x/2$ pertence.

**(j)** $\cos(x/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$, em que o sinal é escolhido de acordo com o quadrante ao qual $x/2$ pertence.

**14.** Utilize os itens (g) e (h) do exercício anterior para reescrever as expressões abaixo usando apenas cossenos (e sem potências). Observe item (a).

**(a)** $\operatorname{sen}^4 x$.

*Solução.*

$$\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1+\cos(4x)}{8} = \frac{3}{8} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8}.$$

**(b)** $\cos^4 x$.

**(c)** $\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x$.

**15.** A partir das fórmulas para soma de arcos, outras relações podem ser deduzidas: as fórmulas para transformação de soma em produto e vice-versa. Estas fórmulas são úteis para resolver certos tipos de equações e também para resolver problemas nas disciplinas de Cálculo. O objetivo desse exercício é mostrar como obtê-las (lembre-se de que aprender o caminho para obter tais fórmulas dá a você o direito de não precisar decorá-las, pois toda vez que alguma delas for necessária, basta seguir as ideias da demonstração). Considere as fórmulas abaixo (já conhecidas):

(i) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$;

(ii) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

Faça o que se pede nos itens abaixo:

**(a)** A partir da fórmula (i), mostre que

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b.$$

**(b)** A partir da fórmula (ii), mostre que

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \cos a \cos b.$$

**(c)** Some as fórmulas (ii) e (a) e conclua que

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right].$$

Esta fórmula é usada quando temos um produto de um seno por um cosseno e precisamos reescrever como uma soma.

**(d)** Siga a mesma ideia do item anterior para mostrar as seguintes fórmulas:

$$\cos a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)\right];$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right];$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right].$$

**(e)** Agora faremos o procedimento inverso: desenvolver uma fórmula que transforme uma soma de senos ou cossenos em um produto. Para isso, considere a fórmula do item (c) e crie novas variáveis: $x = a + b$ e $y = a - b$. Em seguida, reescreva toda a equação nas letras $x$ e $y$ para obter

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

**(f)** Siga a mesma ideia do item anterior para mostrar as seguintes fórmulas:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right);$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right);$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

**16.** Resolva as inequações:

**(a)** $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$;

**(b)** $\cos x \leq 0$.

**17.** A maior parte dos sistemas oscilatórios pode ser modelada por funções trigonométricas. Alguns destes sistemas possuem caráter oscilatório mas também possuem variação na sua amplitude. Por exemplo devido à resistência do ar e outros atritos, um pêndulo diminui sua amplitude de movimento a cada ciclo. Neste caso, classificamos o sistema como *harmônico amortecido*. Em termos matemáticos, tais sistemas são modelados por funções da forma $f(t) = ke^{-ct}\operatorname{sen}(\omega t)$ ou $f(t) = ke^{-ct}\cos(\omega t)$, em que $k$, $c > 0$ e $\omega$ são constantes e $c$ é denominada *constante de amortecimento*.
Uma corda de um violão é puxada $0{,}5\,cm$ a partir da sua posição de repouso e, então, é solta, iniciando sua vibração. Sabe-se que a corda produziu a nota musical sol (frequência aproximada de $200\,Hz$) e que sua constante de amortecimento é $1{,}4\,s^{-1}$ (segundos elevado a $-1$). Determine uma função que descreva o movimento do ponto a partir do qual a corda foi puxada.

**18.** Uma corda de uma guitarra é puxada em um ponto $P$ a uma distância de $3\,cm$ a partir da sua posição de repouso e, então, é solta, iniciando sua vibração. Sabe-se que a corda vibrou a uma frequência de $165\,Hz$ e que, após dois segundos, a amplitude máxima do ponto $P$ foi de $0{,}6\,cm$.

**(a)** Determine a constante de amortecimento.

**(b)** Determine uma equação que descreva a posição do ponto $P$ a partir da sua posição de repouso. Especifique as unidades de medida utilizadas.

☠☠☠ Você sabia que ☠☠☠

- $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ e que
- $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$?

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.