Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

14ª lista de exercícios (20/11/2017 a 01/12/2017)

1. Resolva as equações abaixo.

(a) $\operatorname{sen} x = 0$.

(b) $\operatorname{sen} x = 1$.

(c) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$.

(d) $\operatorname{sen} x = 0,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(e) $\operatorname{sen} x = 1,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(f) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2},\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

2. A função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é bijetora (verifique através gráfico) e, portanto, possui inversa. Sua inversa $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ (às vezes também é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$). Por exemplo, $\operatorname{arcsen}(-1)$ é igual ao único número pertencente $[-\pi/2, \pi/2]$ cujo seno é igual a -1 e, portanto, $\operatorname{arcsen}(-1) = -\pi/2$. Como outros exemplos, temos $\operatorname{arcsen} 0 = 0$ e $\operatorname{arcsen}(1/2) = \pi/6$ (compare com as equações resolvidas no exercício anterior). Calcule o que se pede.

(a) $\operatorname{arcsen} 1$.

(b) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}/2)$.

(c) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{2}/2)$.

(d) $\operatorname{arcsen}(-1/2)$.

(e) $\operatorname{arcsen}(-\sqrt{2}/2)$.

(f) $\operatorname{arcsen}(-\sqrt{3}/2)$.

3. Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

4. Calcule o que se pede.

(a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-1/2))$.

(b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(1/2))$.

(c) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}/2))$.

(d) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(1/5))$.

(e) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$.

(f) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi/6))$.

(g) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(-\pi/2))$.

(h) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(4\pi/3))$.

(i) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(-7\pi))$.

(j) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(20\pi/17))$.

(k) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

5. Resolva as equações abaixo.

(a) $\cos x = 0$.

(b) $\cos x = 1$.

(c) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) $\cos x = 0,\ x \in [0, \pi]$.

(e) $\cos x = 1,\ x \in [0, \pi]$.

(f) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0, \pi]$.

6. A função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora (verifique!). Sua inversa $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arccos} x$ (às vezes também é denotada por $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$). Calcule o que se pede.

(a) $\arccos 1$. **(b)** $\arccos(\sqrt{3}/2)$. **(c)** $\arccos(\sqrt{2}/2)$.

(d) $\arccos(1/2)$. **(e)** $\arccos 0$. **(f)** $\arccos(-1/2)$.

(g) $\arccos(-\sqrt{2}/2)$. **(h)** $\arccos(-\sqrt{3}/2)$. **(i)** $\arccos(-1)$.

7. Faça o gráfico da função $f(x) = \arccos x$.

8. Calcule o que se pede.

(a) $\cos(\arccos(-1/2))$. **(b)** $\cos(\arccos(\sqrt{3}/2))$. **(c)** $\cos(\arccos(1/34))$.

(d) $\cos(\arccos x)$. **(e)** $\arccos(\cos(\pi/6))$. **(f)** $\arccos(\cos(-\pi/2))$.

(g) $\arccos(\cos(4\pi/3))$. **(h)** $\arccos(\cos(20\pi/17))$. **(i)** $\arccos(\cos x)$.

9. Resolva as equações abaixo.

(a) $\operatorname{tg} x = 0$. **(b)** $\operatorname{tg} x = 1$.

(c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. **(d)** $\operatorname{tg} x = 0,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(e) $\operatorname{tg} x = 1,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$. **(f)** $\operatorname{tg} x = \sqrt{3},\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

10. A função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é bijetora (verifique!). Sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ (às vezes também é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$). Calcule o que se pede.

(a) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$. **(b)** $\operatorname{arctg} 1$. **(c)** $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3)$.

(d) $\operatorname{arctg} 0$. **(e)** $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3)$. **(f)** $\operatorname{arctg}(-1)$.

(g) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

11. Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

12. Baseado no gráfico acima, qual é o valor aproximado de $\operatorname{arctg}(10000000)$?

13. Calcule o que se pede.

(a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$. **(b)** $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1))$. **(c)** $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-361))$.

(d) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$. **(e)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi/6))$. **(f)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-2\pi/3))$.

(g) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(4\pi/3))$. **(h)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(20\pi/17))$. **(i)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

14. Seja $x \in [-1, 1]$. Determine o valor de:

(a) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$; **(b)** $\operatorname{sen}(\arccos x)$.

15. A partir da fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, deduza as seguintes relações:

(a) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$; **(b)** $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$.

16. Observe os gráficos das funções trigonométricas e verifique quais são pares e quais são ímpares. A partir disso, reescreva as expressões abaixo, conforme item (a).

(a) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, isto é, a função seno é ímpar.

(b) $\cos(-x)$. **(c)** $\operatorname{tg}(-x)$.

(d) $\operatorname{cotg}(-x)$. **(e)** $\sec(-x)$.

(f) $\operatorname{cossec}(-x)$.

17. Reescreva as expressões abaixo usando apenas seno e cosseno e, em seguida, simplifique. Observe o item (a) como modelo.

(a) $\cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$.

Solução. $\cos x + \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\operatorname{sen} x = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$.

(b) $\cos x \operatorname{tg} x$.

(c) $\operatorname{sen} x \sec x$.

(d) $\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x$.

(e) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x \cos x$.

(f) $\dfrac{\sec x - \cos x}{\operatorname{sen} x}$.

(g) $\dfrac{\operatorname{sen} x \sec x}{\operatorname{tg} x}$.

(h) $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$.

(i) $\dfrac{\sec x - \cos x}{\operatorname{tg} x}$.

(j) $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$.

(k) $\dfrac{2+\operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x} - 1$.

18. Verifique que as igualdades abaixo são identidades trigonométricas. *Observação.* Quando uma igualdade com incógnitas é fornecida, podemos perguntar sobre o conjunto solução da equação. Quando esse conjunto solução corresponde a todos os possíveis valores das incógnitas, dizemos que a igualdade fornecida é uma identidade. Por exemplo, a igualdade $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$ e, portanto, é uma identidade matemática. Por outro lado, a igualdade $\operatorname{sen} x = \cos x$ não é uma identidade pois, por exemplo, não é verdadeira para $x = 0$. Um dos caminhos para se verificar uma identidade é manipular um dos lados da igualdade até obter o outro (observe esse procedimento no item (a)). Para mostrar que uma igualdade não é uma identidade, basta encontrar substituições numéricas para as incógnitas para as quais a igualdade não é verdadeira.

(a) $\cos x(\sec x - \cos x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Solução. Vamos manipular o lado esquerdo da igualdade até chegar ao lado direito.

$$\cos x(\sec x - \cos x) = \cos x\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) = \cos x\left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\right) = 1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x.$$

(b) $\dfrac{\cos x}{\sec x \operatorname{sen} x} = \operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x$.

(c) $\dfrac{\operatorname{cotg} x \sec x}{\operatorname{cossec} x} = 1$.

(d) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2\operatorname{sen} x \cos x$.

(e) $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = (\sec x - \operatorname{tg} x)^2$.

(f) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$.

19. Utilize as fórmulas para soma de arcos para calcular:

(a) $\operatorname{sen} 75°$;

(b) $\cos 105°$;

(c) $\operatorname{tg} 15°$;

(d) $\operatorname{sen}(19\pi/12)$;

(e) $\cos(17\pi/12)$;

(f) $\operatorname{tg}(-\pi/12)$.

20. Utilize as fórmulas para soma de arcos para verificar as igualdades abaixo.

(a) $\operatorname{sen}(x - \pi/2) = -\cos x$.

(b) $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x$.

(c) $\cos(x + \pi/6) + \sin(x - \pi/3) = 0$.

(d) $\operatorname{tg}(x - \pi/4) = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$.

21. A partir das informações em cada item, calcule $\operatorname{sen}(2x)$, $\cos(2x)$ e $\operatorname{tg}(2x)$.

(a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{5}{13}$ e x pertence ao primeiro quadrante.

(b) $\operatorname{tg} x = -\dfrac{4}{3}$ e x pertence ao segundo quadrante.

(c) $\cos x = \dfrac{4}{5}$ e $\operatorname{cossec} x < 0$.

(d) $\operatorname{cossec} x = 4$ e $\operatorname{tg} x < 0$.

22. Utilize sa fórmulas para a metade do arco para calcular:

(a) $\operatorname{sen} 15°$; **(b)** $\cos 15°$; **(c)** $\operatorname{tg} 15°$;
(d) $\cos 165°$; **(e)** $\operatorname{sen} 22{,}5°$; **(f)** $\cos(\pi/8)$;
(g) $\operatorname{sen}(3\pi/8)$; **(h)** $\operatorname{tg}(5\pi/12)$.

23. A partir das informações em cada item, calcule $\operatorname{sen}(x/2)$, $\cos(x/2)$ e $\operatorname{tg}(x/2)$.

(a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{5}$ e x pertence ao primeiro quadrante.

(b) $\cos x = -\dfrac{4}{5}$ e x pertence ao terceiro quadrante.

24. Reescreva os produtos como somas:

(a) $\operatorname{sen}(2x)\cos(3x)$; **(b)** $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(5x)$;
(c) $\cos(5x)\cos(3x)$; **(d)** $\operatorname{sen}(4x)\cos x$.

25. Reescreva as somas como produtos:

(a) $\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(3x)$; **(b)** $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(4x)$;
(c) $\cos(4x) - \cos(6x)$; **(d)** $\cos(9x) + \cos(2x)$.

26. Resolva as equações:

(a) $\sqrt{2}\operatorname{sen} x + 1 = 0$; **(b)** $4\cos x + 1 = 0$;
(c) $3\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$; **(d)** $9\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$;
(e) $(\operatorname{tg}^2 x - 3)(2\cos x + 1) = 0$; **(f)** $3\operatorname{sen}^2 x - 7\operatorname{sen} x + 2 = 0$;
(g) $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$; **(h)** $\operatorname{tg}^2 x - 2\sec x = 2$;
(i) $2\cos(3x) = 1$; **(j)** $\operatorname{tg}(x/4) + \sqrt{3} = 0$;
(k) $3\cos\left(3x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$; **(l)** $\operatorname{sen}(2x) + \cos x = 0$;
(m) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(3x) = 0$.

Sugestão. No último item, utilize a fórmula para transformar soma em produto.

27. Os sistemas de alimentação elétrica que chegam às nossas casas são sistemas de corrente alternada. Pode-se modelar a tensão pela função

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t),$$

em que t é medido em segundos, $E(t)$ é medido em volts, E_0 é o maior valor possível para a tensão e o período da função é $2\pi/\omega$. A tensão nominal em cada região ($110\,V$ ou $220\,V$) representa a média quadrática do valor máximo da tensão, que é calculada dividindo o valor máximo da tensão por $\sqrt{2}$. Já a frequência nominal em cada região ($50\,Hz$ ou $60\,Hz$) é o inverso do período. Qual é a função $E(t)$ em Florianópolis, onde a tensão e frequência nominais são $220\,V$ e $60\,Hz$, respectivamente?

28. Considere um sistema massa mola ideal (isto é, sem atrito). Denote por m a massa do sistema e por k a constante elástica da mola. A mola é esticada a uma distância a do seu ponto de repouso e, então, é solta. Usando Cálculo e as leis físicas, é possível mostrar que a posição x do objeto (considerando o ponto de repouso como origem) em função do tempo t é dada por

$$x(t) = a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

(a) Determine a equação em um sistema em que $m = 0{,}01\,kg$, $k = 3\,kg/s^2$ e $a = 0{,}05\,m$.

(b) Determine a frequência em termos de k e m.

(c) O que acontece com a frequência à medida que a massa aumenta?

(d) O que acontece com a frequência à medida que a rigidez da mola aumenta (isto é, k aumenta)?

29. Uma escada de comprimento $6\,m$ é apoiada a uma parede (perpendicular ao solo). Sabendo que a distância entre a base da escada e a parede é de $2\,m$, determine o ângulo de elevação da escada.

30. Dois diapasões idênticos são colocados para vibrar, um deles uma fração de tempo após o outro. Os sons produzidos por eles podem ser modelados por $f_1(t) = C\,\mathrm{sen}(\omega t)$ e $f_2(t) = C\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$. As duas ondas sofrem interferência uma da outra dando origem a uma única onda descrita por

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C\,\mathrm{sen}(\omega t) + C\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha).$$

(a) Utilize a fórmula para o seno da soma de arcos e mostre que $f(t)$ pode ser escrita na forma

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

em que A e B dependem apenas de C e α.

(b) ☠ Suponha que $C = 10$ e que $\alpha = \pi/3$. Determine constantes k e ϕ tais que $f(t) = k\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$.

31. Um retângulo $ABCD$ é inscrito em uma circunferência de raio $10\,cm$. Denote por θ o ângulo entre o lado $\overline{AB}$ e a diagonal $\overline{AC}$.

(a) Mostre que a área do retângulo é $A = 200\,\mathrm{sen}(2\theta)$.

(b) Mostre que dentre todos os retângulos inscritos na circunferência, a maior área possível é $200\,cm^2$.

32. Quando um projétil é lançado a uma velocidade v_0 formando um ângulo θ com a horizontal, seu alcance (isto é, a distância horizontal percorrida) é dada por

$$R(\theta) = \frac{v_0^2\,\mathrm{sen}(2\theta)}{g},$$

em que g é a aceleração da gravidade. Se $v_0 = 30\,m/s$, qual deve ser o ângulo θ para que o alcance seja de $79{,}5\,m$? Utilize $g = 9{,}8\,m/s^2$.

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.