Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

5ª lista complementar de exercícios (28/08/2017 a 06/09/2017)

1. Em cada item, encontre o mínimo múltiplo comum das expressões:

(a) $8a^2b\,;\ \ 10b^2c\,;\ \ 12ac^2;$

(b) $2x^2+2xy\,;\ \ x^3+2x^2y+xy^2\,;\ \ 3x^3-3xy^2.$

2. Simplifique as frações:

(a) $\dfrac{x^3+y^3}{x^3-x^2y+xy^2};$ **(b)** $\dfrac{5x^{n-1}y^n}{15x^ny^{n-2}};$ **(c)** $\dfrac{2a^2b(a-b)^2}{6a^2(a^2-b^2)};$ **(d)** $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}.$

3. Efetue as multiplicações e, se possível, simplifique o resultado:

(a) $\dfrac{2x^3-6x^2+4x}{3x^2-3}\cdot\dfrac{6x^2-6x-12}{12x^2+24x};$ **(b)** $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x}\cdot\dfrac{x^3-9x}{x^2-4x+4}.$

4. Escreva as expressões abaixo na forma de uma única fração:

(a) $\dfrac{x+2}{x^2+x}-\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}-\dfrac{1}{x};$ **(b)** $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)};$

(c) $\dfrac{x+3}{2x}-\dfrac{9x^2-4x^3}{6x^2}-\dfrac{2x-3}{3};$ **(d)** $x+\dfrac{xy}{x-y};$

(e) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1+x}+\dfrac{3}{1-x^2}.$

5. Simplifique as expressões abaixo sob a forma de uma única fração:

(a) $\left(\dfrac{3}{1-2x}-\dfrac{7}{1+2x}-\dfrac{5-22x}{4x^2-1}\right)\cdot\left(\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{5}{2x+4}\right);$

(b) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}\left(\dfrac{2a-b}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}\right)}{\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab}}.$

6. Efetue as divisões de polinômios (encontrando quociente e resto) e escreva as duas identidades associadas à divisão:

(a) $(x^3-9x^2+26x-24)\div(x^2-5x+6);$

(b) $(x^5-3x^4-2x^3+4x^2-3)\div(x^4-x^2-1);$

(c) $(x^3-3x+7)\div(2x-4);$

(d) $(25x^6-30x^3)\div(5x^2).$

7. Descobrir os divisores de um dado polinômio não é uma tarefa fácil. Existe um teorema que diz quando que um dado polinômio é ou não divisível por $x - a$ (e este teorema só vale quando o divisor é dessa forma). O teorema diz que um dado polinômio é divisível por $x - a$ exatamente quando o polinômio dado se anula ao substituir a letra x pelo número a. Por exemplo, o polinômio $x^2 - 5x + 6$ é divisível por $x - 3$ pois se trocarmos o x por 3, obtemos $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$. Por outro lado, $x^2 - 5x + 6$ não é divisível por $x - 1$, pois $1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2 \neq 0$. Utilize esse raciocínio para, sem fazer a divisão, dizer se as divisões abaixo são ou não exatas:

(a) $(x^2 - 4x + 4) \div (x - 1)$;
(b) $(x^2 - 4x + 4) \div (x - 2)$;
(c) $(x^2 - 4x + 4) \div x$;
(d) $(x^2 - 4x + 4) \div (x + 1)$;
(e) $(x^3 - 5x + 7) \div (x - 1)$;
(f) $(x^2 - 9) \div (x - 3)$;
(g) $(x^2 - 9) \div (x + 3)$;
(h) $(x^2 - 9) \div (x + 7)$.

8. A ideia da questão anterior pode nos ajudar a procurar os divisores de um polinômio (e, consequentemente, encontrar sua fatoração). Por exemplo, imaginemos que nosso objetivo seja fatorar o polinômio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$. Como já dissemos, encontrar seus divisores não é uma tarefa fácil. O teorema da questão anterior diz que descobriremos um divisor da forma $x - a$ quando encontrarmos algum número a que substituído no polinômio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ resulte no valor 0. Ainda assim, encontrar números que fazem o resultado da expressão $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ ser 0 continua não sendo uma tarefa fácil. Novamente, recorreremos a um teorema: se algum número em $\mathbb{Z}$ anula a expressão $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$, então esse número é um divisor do termo independente do polinômio (nesse caso, divisor de -24). Os divisores inteiros de -24 são: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12,$ 24 e -24. Neste caso, testaremos "apenas" essas possibilidades. Substituindo diretamente (ou usando Briot-Ruffini), verificamos que $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ dá resultado 0 quando x é substituído por 2. Com isso, descobrimos que $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ é divisível por $x - 2$. Efetuando a divisão, chegamos a $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x^2 - 7x + 12)$. Ainda podemos nos perguntar se $x^2 - 7x + 12$ também pode ser fatorado. Como agora o polinômio tem grau 2, temos o recurso da fórmula de Bhaskara. Por Bhaskara, concluímos que 3 e 4 são números que fazem $x^2 - 7x + 12$ ser 0. Isso diz que $x^2 - 7x + 12$ é divisível por $x - 3$ e por $x - 4$. De fato, é fácil verificar que $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$. Voltando à igualdade $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x^2 - 7x + 12)$, podemos substituir a fatoração de $x^2 - 7x + 12$ para concluir que $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$. E isso finaliza nossa fatoração. Aplique esse racionínio para fatorar os polinômios abaixo:

(a) $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$;
(b) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

Observação. O procedimento acima nem sempre funciona, pois os números que anulam um polinômio (esses números são chamados *raízes* do polinômio) podem não ser números inteiros. Nesses casos, o procedimento acima não conduzirá às raízes e nem à fatoração. Para polinômios de grau 2, a fórmula de Bhaskara é responsável por encontrar as raízes (nessa fórmula, não é necessário ficar "chutando" valores). Existem fórmulas similares à de Bhaskara para polinômios de graus 3 e 4, chamada de fórmulas de Cardano (ou Tartaglia-Cardano). Para polinômios de grau maior que 4, foi provado que **não existe** fórmula para determinar as raízes.

9. Utilize as respostas da questão anterior para simplificar as frações:

(a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}{x + 5}$;
(b) $\dfrac{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6}{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}$.

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

A. Z. Aranha e M. B. Rodrigues – *Exercícios de Matemática - vol. 1, Revisão de 1º grau.* Segunda edição, Editora Policarpo, São Paulo, 1998.