



MTM3100 - Pré-cálculo

6ª lista complementar de exercícios (11/09/2017 a 15/09/2017)

- Em cada item, verifique se o valor fornecido é uma solução da equação $4x + 7 = 9x - 3$:
(a) $x = -2$; (b) $x = 2$; (c) $x = 0$; (d) $x = \sqrt{2}$; (e) $x = \pi$; (f) $x = 2^{50}$.
- Em cada item, verifique se o valor fornecido é uma solução da equação $\frac{x^{3/2}}{x-6} = x - 8$:
(a) $x = 4$; (b) $x = 8$; (c) $x = 3$; (d) $x = -1$.
- Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede, conforme exemplo no item (a):
(a) Soluções em \mathbb{R}^2 de $x - y = 0$;
 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.
(b) Soluções em \mathbb{R}^2 de $y = x^2$;
(c) Soluções em \mathbb{R}^2 de $y = x^2 + 1$;
(d) Soluções em \mathbb{R}^2 de $x^2 + y^2 = 1$.
- Desenhe, no plano cartesiano, os conjuntos soluções do exercício anterior.
- Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede.
(a) Soluções em \mathbb{R}^3 de $x + y + z = 1$;
(b) Soluções em \mathbb{R}^3 de $x + y = 1$.
- Utilize seus conhecimentos de Geometria Analítica para desenhar os conjuntos soluções do exercício anterior.
- Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede:
(a) Soluções reais do sistema de equações $\begin{cases} 2x^2 - 1 = x \\ 2x + 4 = 0; \end{cases}$
(b) Soluções reais do sistema de equações $\begin{cases} 2x^3 + 3x - 9 = \sqrt{2}x \\ |3x^2 - 2x| + \sqrt[3]{x^2 - 1} = |x| \\ x^x = \sqrt{7}; \end{cases}$
(c) Soluções reais do sistema de equações $\begin{cases} 3x - 6 = 3 \\ 4x - 2 = 2 \\ x - 3 = 0; \end{cases}$
(d) Soluções em \mathbb{R}^2 do sistema de equações $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 10. \end{cases}$

8. Explícite os conjuntos soluções dos itens (c), (d) do exercício anterior.

9. Nas fórmulas abaixo, resolva para a variável indicada:

(a) $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$ para x ; (b) $\frac{a + 1}{b} = \frac{a - 1}{b} + \frac{b + 1}{a}$ para a ;
(c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para r ; (d) $F = G \frac{mM}{r^2}$ para r ;
(e) $a^2 + b^2 = c^2$ para b ; (f) $A = P \left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$ para i .

10. Em cada uma das equações abaixo, determine o maior subconjunto de \mathbb{R} sobre o qual a equação faz sentido:

(a) $x^{5/2} - x^3 = 7$; (b) $\frac{\sqrt{-x}}{x + 1} = \frac{1}{x - 3}$;
(c) $\sqrt{-x} + \sqrt{x} = x^3$; (d) $|x^2 - 1| + \sqrt{|3x - 4|} - \sqrt{x - 3} = \frac{1}{\sqrt{7 - x}}$.

11. Em cada item, diga se a passagem efetuada é uma implicação ou uma equivalência (considerando \mathbb{R} como universo de solução):

(a) De $\sqrt[3]{x - 3} = x^2 - 6x + 7$ para $x - 3 = (x^2 - 6x + 7)^3$;
(b) De $x^2 - 3 = \frac{x + 1}{x - 1}$ para $|x^2 - 3| = \left|\frac{x + 1}{x - 1}\right|$;
(c) De $|x^3 - x + 4| = |x^2 - 6|$ para $x^3 - x + 4 = x^2 - 6$;
(d) De $|2x - 6| = 7$ para $2x - 6 = 7$ ou $2x - 6 = -7$.

12. Resolva as equações abaixo (todas são equivalentes a uma equação de primeiro grau):

(a) $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$; (b) $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y + 1}{4}$;
(c) $2x - \frac{x}{2} + \frac{x + 1}{4} = 6x$; (d) $\frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + 1$;
(e) $\frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{4}{5}$; (f) $\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3x + 3}$;
(g) $\frac{4}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{35}{x^2 - 1}$; (h) $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$.

13. Resolva as equações abaixo utilizando propriedades de fatoração (todas são equivalentes a uma equação de segundo grau):

(a) $2y^2 + 7y + 3 = 0$; (b) $3x^2 + 5x = 2$;
(c) $6x(x - 1) = 21 - x$; (d) $2x^2 = 8$;
(e) $3x^2 - 27 = 0$.

14. Resolva as equações abaixo completando o quadrado (todas são equivalentes a uma equação de segundo grau):

(a) $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$; (b) $2x^2 + 8x + 1 = 0$;
(c) $3x^2 - 6x - 1 = 0$; (d) $4x^2 - x = 0$;
(e) $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$.

15. Resolva as equações abaixo utilizando a fórmula de Bhaskara (todas são equivalentes a uma equação de segundo grau):

(a) $x^2 - 6x + 1 = 0$;

(b) $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$;

(c) $4x^2 + 16x = 9$;

(d) $0 = x^2 - 4x + 1$;

(e) $w^2 = 3(w - 1)$;

(f) $3 + 5z + z^2 = 0$;

(g) $10y^2 - 16y + 5 = 0$;

(h) $25x^2 + 70x + 49 = 0$.

16. Apenas analisando o discriminante, diga quantas soluções (reais) cada equação abaixo possui:

(a) $x^2 + 2, 21x + 1, 21 = 0$;

(b) $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$;

(c) $x^2 + rx - s = 0$, sabendo que $s > 0$.

17. Resolva as equações abaixo:

(a) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2} = 0$;

(b) $\frac{x+5}{x-2} = \frac{5}{x+2} + \frac{28}{x^2-4}$;

(c) $\frac{x}{2x+7} - \frac{x+1}{x+3} = 1$.

18. Determine os valores de m para os quais a equação

$$mx^2 + (m+1)x + (m+1) = 0$$

possui uma única raiz real.

19. Sejam r_1 e r_2 as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$. É possível demonstrar que

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 + bx + c$$

(você consegue demonstrar??). Usando esse resultado, caracterize $S = r_1 + r_2$ e $P = r_1 r_2$ em termos de a , b e c .

20. Obtenha um resultado análogo ao exercício anterior para a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com raízes r_1 , r_2 e r_3 . Você consegue generalizar esse resultado para polinômios quaisquer? Essas relações são conhecidas como *relações de Girard*.

21. Obtenha uma equação de segundo grau cujas raízes são:

(a) 0,4 e 5;

(b) 1 e $-\sqrt{2}$;

(c) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$.

22. Resolva a equação $ax^2 + bx + c = 0$ pelo método do completamento do quadrado e, a partir disso, deduza a fórmula de Bhaskara.

23. O exercício acima sugere que as fórmulas matemáticas são obtidas quando resolvemos um problema (que aparece muitas vezes) em sua forma genérica (isto é, trocando os números por letras). Nesse exercício, construiremos nossa própria fórmula. Imagine que nosso objetivo seja resolver as equações $\frac{1}{x-4} = 7$, $\frac{3}{x+1} = 10$ e $\frac{-3}{x+3} = -3$. Note todas elas são parecidas, mudando apenas alguns números.

Em vez de resolver todas elas, uma a uma, resolva a forma geral $\frac{a}{x+b} = c$ e encontre uma “fórmula” para x . Após isso, substitua os valores de a , b e c de cada equação na fórmula obtida para encontrar as soluções.

24. Maria recebeu uma herança de R\$ 100.000,00 e investiu em duas aplicações. Uma das aplicações rende 6% e a outra 4,5% de juros ao ano. Se, após um ano, Maria teve um rendimento de R\$ 5.025,00 de juros, qual foi a quantia investida em cada aplicação?
25. Um fabricante de refrigerantes diz na embalagem de seu refrigerante de laranja que 5% do volume do produto é de suco natural de laranja. Porém, uma nova regulamentação federal indicou que todos os refrigerantes desse tipo devem conter, no mínimo, 10% de suco. Qual é a quantidade de suco natural que deve ser adicionada a 900 ml de refrigerante para que este passe a ter 10% de suco?
26. Uma mulher ganha 15% a mais que seu companheiro. Sabendo que os dois juntos ganham R\$ 69.875,00 por ano, qual é o salário anual da mulher?
27. Dois barcos de pesca partem ao mesmo tempo do mesmo local com velocidades constantes. Um deles viaja no sentido sul e o outro no sentido leste. O barco rumo ao leste está 3 km/h mais rápido que o outro barco. Sabe-se que após duas horas, a distância entre os barcos é de 30 km. Determine as velocidades dos dois barcos.
28. Um bambu de 5 m de comprimento é fixado ao solo na vertical e quebrado em uma dada altura de modo que a parte superior cai até tocar o solo formando um triângulo com o solo (os lados do triângulo são os dois pedaços do bambu e o solo). Sabendo que a distância no solo entre as duas partes é de 1,5 m, qual é o comprimento de cada parte?

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus*. 6^a ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.