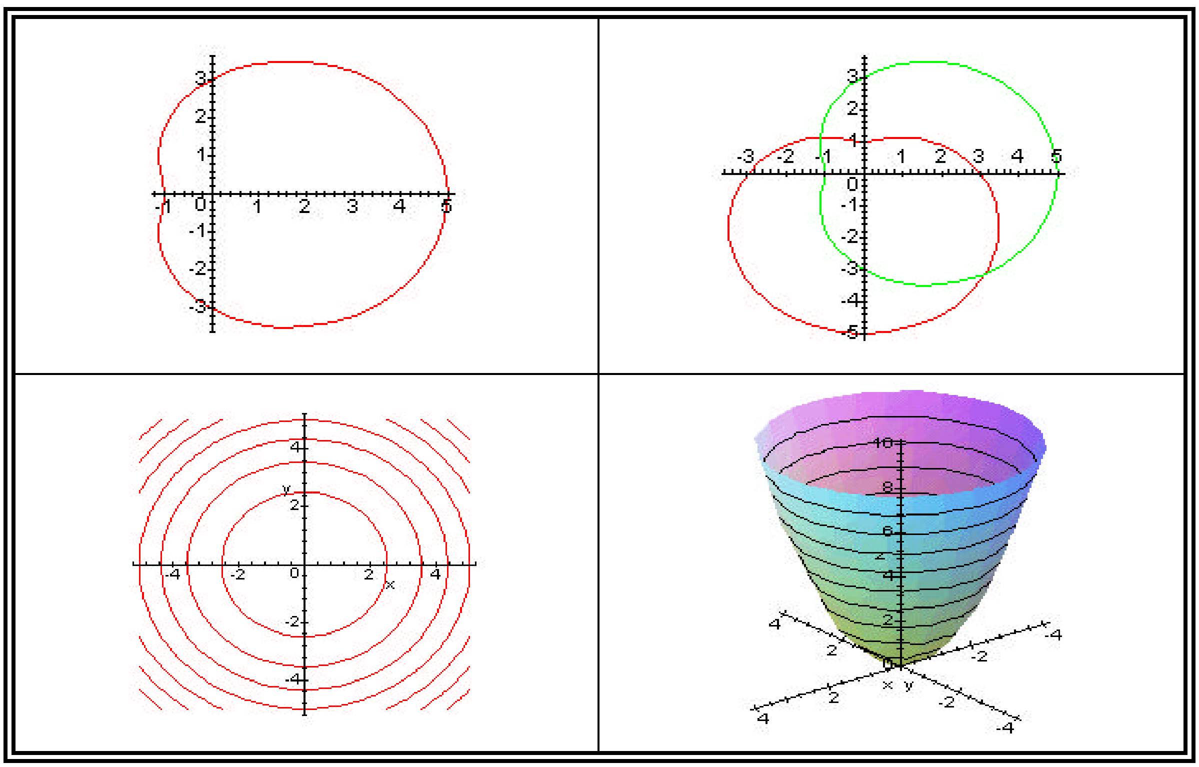
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Departamento de Matemática

LABORATÓRIO DE CÁLCULO B



Rita de Cássia S. Eger - Rosimary Pereira

Junho – 2001

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Das experiências em aulas de laboratório de informática nas disciplinas de matemática, vivenciadas pelas autoras e outros professores do departamento de matemática da UFSC resultou este trabalho com o objetivo de mostrar a utilização do software Maple V, release 5, em alguns conteúdos da disciplina MTM 5162- Cálculo B dos cursos de engenharias e em outras disciplinas com ementas equivalentes na UFSC.

São apresentados exemplos indicando os comandos necessários para verificação de resultados e visualização gráfica para *Técnicas de Integração; Integração Imprópria; Aplicações da Integral Definida: Volume de Sólidos de Revolução, Gráficos em Coordenadas Polares, Área em Coordenadas Polares; Funções de Várias Variáveis: Gráficos de Superfícies, Curvas de Nível e Plano Tangente; Máximos e Mínimos; Integrais Duplas e Integrais Triplas – Cálculo de Volumes.*

Espera-se que este trabalho sirva de fonte para alunos e professores que pensam em utilizar a informática no ensino das disciplinas de matemática.

ALGUNS OPERADORES ARITMÉTICOS, FUNÇÕES ELEMENTARES, CONSTANTES E PACOTES DO MAPLE V – release 5.

Apresentamos alguns operadores aritméticos, funções elementares, constantes e pacotes do Maple V necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Operadores aritméticos:

+	adição
-	subtração
/	divisão
*	multiplicação
^ ou **	potenciação

Funções elementares:

exponencial: exp(x)
módulo (valor absoluto): abs(x)
trigonométricas: sin(x), cos(x), tan(x), sec(x), cot(x), csc(x)
raíz quadrada: sqrt(x) ou x^(1/2)
logarítmo natural: ln(x)

Constantes

π:	Pi
∞:	infinity

Pacotes utilizados:

plots	para trabalhar com gráficos.
student	para trabalhar com os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.
linalg	para trabalhar com conceitos da Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Observações:

1 - Antes de uma série de exercícios sempre se deve carregar o(s) pacote(s) necessário(s) para a resolução dos mesmos, escrevendo
with(nome do pacote):

2 - O símbolo “ é usado para chamar o último resultado exibido pelo Maple.

I - TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Nesta unidade apresentamos os comandos e pacotes do Maple V para resolução de:

Integrais indefinidas
Integrais definidas
Integrais de funções trigonométricas
Integrais por substituição trigonométrica
Integrais por frações parciais
Integrais de funções racionais de seno e coseno

1.1 - Integrais indefinidas

>*with(student):*
>*f:=expressão que define a função;*
>*Int(f,x);* apresenta a integral indefinida a ser calculada.
>*int(f,x);* calcula a integral indefinida.
>*Int(f,x)=int(f,x);* apresenta a integral indefinida com a resposta.

Exemplo: Calcule a integral $\int (x^3+5)dx$

<u>Solução:</u>

>with(sutdent):
>Int(x^3+5,x)=int(x^3+5,x);

$$\int x^3+5\,dx=\frac{1}{4}x^4+5\,x$$

1.2 - Integrais definidas

>*with(student):*
>*f:=expressão que define a função;*
>*Int(f,x=a..b);* apresenta a integral definida a ser calculada.
>*Int(f,x=a..b);* calcula a integral definida.
>*Int(f,x=a..b)= int(f,x=a..b);* apresenta a integral definida com a resposta.

Exemplo: Calcule a integral $\int_0^{\pi} \mathrm{sen}x\,dx$

<u>Solução:</u>

>with(student):
>Int(sin(x),x=0..Pi)=int(sin(x),x=0..Pi);

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx=2$$

1.3 - Integrais de funções trigonométricas

Os comandos e o pacote utilizados nesta técnica são os apresentados no ítem 1.1 desta unidade.

Exemplos:

1) $\int tg^2 5x\, dx$

<u>Solução</u>:

```
>with(student):
>Int((tan(5*x))^2,x);
```

$$\int \tan(5\,x)^2\,dx$$

```
>int((tan(5*x))^2,x);
```

$$\frac{1}{5}\tan(5\,x)-\frac{1}{5}\arctan(\tan(5\,x))$$

```
>Int((tan(5*x))^2,x)=int((tan(5*x))^2,x);
```

$$\int \tan(5\,x)^2\,dx=\frac{1}{5}\tan(5\,x)-\frac{1}{5}\arctan(\tan(5\,x))$$

2) $\int cosec^3 x\, dx$

<u>Solução</u>:

```
>with(student):
>Int((csc(x))^3,x);
```

$$\int \csc(x)^3\,dx$$

```
>int((csc(x))^3,x);
```

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}+\frac{1}{2}\ln(\csc(x)-\cot(x))$$

```
>Int((csc(x))^3,x)=int((csc(x))^3,x);
```

$$\int \csc(x)^3\,dx=-\frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}+\frac{1}{2}\ln(\csc(x)-\cot(x))$$

1. 4 - Integrais por substituição trigonométrica

Os comandos e o pacote utilizados nesta técnica são os apresentados no ítem 1.1 desta unidade.

Exemplos:

1) $\int \sqrt{x^2+5}\, dx$

<u>Solução</u>:

>with(student):
>Int(sqrt(x^2+5),x);

$$\int \sqrt{x^2+5}\, dx$$

>int(sqrt(x^2+5),x);

$$\frac{1}{2} x \sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\, x\right)$$

>Int(sqrt(x^2+5),x)=int(sqrt(x^2+5),x);

$$\int \sqrt{x^2+5}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\, x\right)$$

2) $\int \frac{1}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\, dx$

<u>Solução</u>:

>with(student):
>Int((1/(5-4*x-x^2)^(3/2)),x);

$$\int \frac{1}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\, dx$$

>int((1/(5-4*x-x^2)^(3/2)),x);

$$-\frac{1}{18}\frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

>Int((1/(5-4*x-x^2)^(3/2)),x)=int((1/(5-4*x-x^2)^(3/2)),x);

$$\int \frac{1}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{18}\frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

1.5 - Integrais por frações parciais

Para a resolução de integrais por frações parciais são utilizados os seguintes comandos:

>*with(student):*
>*f:=expressão que define a função;*
>*convert(f,parfrac,x);* escreve a expressão que define a função como soma de frações parciais.
>*Int(f,x)=Int(“,x);* apresenta a integral da soma de frações parciais.
>*expand(rhs(“));* apresenta a soma das integrais das frações parciais do lado direito do item anterior (rhs(“)).
>*value(“);* calcula as integrais.
>*Int(f,x)=int(f,x);* apresenta a integral com a resposta.
Exemplos:

1) $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$

<u>Solução</u>:

>with(student):
>f:=(-2*x+4)/((x^2+1)*(x-1)^2);

$$f := \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{1+2x}{x^2+1}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int \frac{-2\,x+4}{(x^2+1)\,(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{1+2\,x}{x^2+1}\,dx$$

>expand(rhs("));

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

>value(");

$$-\frac{1}{x-1} - 2\ln(x-1) + \arctan(x) + \ln(x^2+1)$$

2) $\int \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

<u>Solução</u>:

>with(student):
>f:=(x^2-2*x)/((x-1)^2*(x+2));

$$f := \frac{x^2-2\,x}{(x-1)^2\,(x+2)}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{x-1} + \frac{8}{9}\frac{1}{x+2}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int \frac{x^2-2\,x}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx = \int -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{x-1} + \frac{8}{9}\frac{1}{x+2}\,dx$$

>expand(rhs("));

$$-\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{8}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

>value(");

$$\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{9}\ln(x-1) + \frac{8}{9}\ln(x+2)$$

>Int(f,x)=int(f,x);

3) $\int \frac{1}{9x^4+x^2}\,dx$

Solução:

>with(student):
>f:=(1/(9*x^4+x^2));

$$f := \frac{1}{9\,x^4+x^2}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{1}{x^2}-\frac{9}{9\,x^2+1}$$

>Int(f,x)=Int('',x);

$$\int \frac{1}{9\,x^4+x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}-\frac{9}{9\,x^2+1}\,dx$$

>Int(f,x)=int(f,x);

$$\int \frac{1}{9\,x^4+x^2}\,dx = -\frac{1}{x}-3\arctan(3\,x)$$

4) $\int \frac{9}{8x^3+1}\,dx$

Solução:

>with(student):
>f:=9/(8*x^3+1);

$$f := \frac{9}{8\,x^3+1}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{3}{1+2\,x}-6\,\frac{x-1}{4\,x^2-2\,x+1}$$

>Int(f,x=0..1)=Int('',x=0..1);

$$\int_0^1 \frac{9}{8x^3+1}\,dx = \int_0^1 \frac{3}{1+2x} - 6\,\frac{x-1}{4x^2-2x+1}\,dx$$

>expand(rhs("));

$$3\int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,dx - 6\int_0^1 \frac{x}{4x^2-2x+1}\,dx + 6\int_0^1 \frac{1}{4x^2-2x+1}\,dx$$

>value(");

$$\frac{3}{4}\ln(3) + \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\pi$$

>Int(f,x=0..1)=int(f,x=0..1);

$$\int_0^1 \frac{9}{8x^3+1}\,dx = \frac{3}{4}\ln(3) + \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\pi$$

5) $\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx$

Solução:

>with(student):
>f:=(2*x^2+3*x+2)/(x^3+4*x^2+6*x+4);

$$f := \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx = \int \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

>value(");

$$2\ln(x+2)-\arctan(1+x)=2\ln(x+2)-\arctan(1+x)$$

```
>Int(f,x)=int(f,x);
```

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx = 2\ln(x+2)-\arctan(1+x)$$

1.6 - Integrais de funções racionais de seno e coseno

Exemplos:

1) $\int \frac{1}{4senx-3cosx}\,dx$

<u>**Solução**</u>**:**

```
>with(student):
>f:=1/(4*sin(x)-3*cos(x));
```

$$f:=\frac{1}{4\sin(x)-3\cos(x)}$$

```
>Int(f,x);
```

$$\int \frac{1}{4\sin(x)-3\cos(x)}\,dx$$

```
>int(f,x);
```

$$-\frac{1}{5}\ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+3\right)+\frac{1}{5}\ln\left(3\tan\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right)$$

>Int(f,x)=int(f,x);

$$\int\frac{1}{4\sin(x)-3\cos(x)}\,dx=-\frac{1}{5}\ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+3\right)+\frac{1}{5}\ln\left(3\tan\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right)$$

2) $\int\frac{\text{senx}}{(\text{cosx}-1)\text{cosx}}\,\text{dx}$

<u>Solução</u>:

>with(student):
>f:=sin(x)/((cos(x)-1)*cos(x));

$$f:=\frac{\sin(x)}{(\cos(x)-1)\cos(x)}$$

>Int(f,x);

$$\int\frac{\sin(x)}{(\cos(x)-1)\cos(x)}\,dx$$

>int(f,x);

$$-\ln(\cos(x)-1)+\ln(\cos(x))$$

>Int(f,x)=int(f,x);

$$\int\frac{\sin(x)}{(\cos(x)-1)\cos(x)}\,dx=-\ln(\cos(x)-1)+\ln(\cos(x))$$

3) $\int\frac{1}{\text{senx}+\text{cosx}+1}\,\text{dx}$

<u>Solução</u>:

>with(student):
>f:=1/(sin(x)+cos(x)+1);

$$f:=\frac{1}{\sin(x)+\cos(x)+1}$$

>Int(f,x);

$$\int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x) + 1}\, dx$$

```
>int(f,x);
```

$$\ln\left(2\tan\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\right)$$

```
>Int(f,x)=int(f,x);
```

$$\int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x) + 1}\, dx = \ln\left(2\tan\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\right)$$

II - INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

A seguir apresentamos os comandos para o cálculo de limites necessários na resolução de integrais impróprias. Os comandos para o cálculo das integrais impróprias estão indicados no item 1.2 da unidade anterior.

Comandos para cálculo de limites

f:= expressão que define a função;
Limit(f,x=a); apresenta o limite a ser calculado.
limit(f,x=a); calcula o limite.

Exemplos:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

<u>Solução</u>:

>with(student):

Devemos lembrar que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\, dx$, se o limite existir.

>Int(1/x^2,x=1..b);

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx$$

>value(");

$$-\frac{1}{b} + 1$$

>Limit(-1/b+1,b=infinity)=limit(-1/b+1,b=infinity);

$$\lim_{b \to \infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1$$

Portanto $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$

2) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+16}\,dx$

Solução:

>with(student):

Devemos lembrar que $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+16}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+16}\,dx$, se o limite existir.

>Int(1/(x^2+16),x=a..0);

$$\int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+16}\,dx$$

>value(");

$$-\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{4}a\right)$$

>Limit(-1/4*arctan(1/4*a),a=-infinity);

$$\lim_{a\to(-\infty)} -\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{4}a\right)$$

>Limit(-1/4*arctan(1/4*a),a=-infinity)=limit(-1/4*arctan(1/4*a),a=-infinity);

$$\lim_{a\to(-\infty)} -\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{4}a\right) = \frac{1}{8}\pi$$

Portanto $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+16}\,dx = \frac{\pi}{8}$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

Solução:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

Para calcularmos a primeira integral, procedemos assim:

```
>with(student):
>Int(1/(x^2+2*x+2),x=a..0);
```

$$\int_{a}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

```
>value(");
```

$$\frac{1}{4}\pi - \arctan(1 + a)$$

```
>Limit(1/4*Pi-arctan(1+a),a=-infinity)=limit(1/4*Pi-arctan(1+a),a=-infinity);
```

$$\lim_{a \to (-\infty)} \frac{1}{4}\pi - \arctan(1 + a) = \frac{3}{4}\pi$$

Para calcularmos a segunda integral procedemos assim:

```
>Int(1/(x^2+2*x+2),x=0  b);
```

$$\int_{0}^{b} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

```
>value(“);
```

$$\arctan(1 + b) - \frac{1}{4}\pi$$

```
>Limit(arctan(1+b)-1/4*Pi,b=infinity)=limit(arctan(1+b)-1/4*Pi,b=infinity);
```

$$\lim_{b \to \infty} \arctan(1 + b) - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

```
>Int(1/(x^2+2*x+2),x=-infinity..0)+Int(1/(x^2+2*x+2),x=0..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

```
>value(“);
```

$$\pi$$

Assim $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \pi$

4) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\, dx$

Solução:

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx$$

pois a função não está definida em x = 0

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx = \lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^{a} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx + \lim_{b\to 0^+} \int_{b}^{3} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx$$

Resolvendo a primeira das integrais à direita, temos:

```
>with(student):
>Int(1/(x*sqrt(x+4)),x=-1..a);
```

$$\int_{-1}^{a} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx$$

```
>value:
```

$$-\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{a+4}\right) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

```
>Limit(-arctanh(1/2*(a+4)^(1/2))+arctanh(1/2*3^(1/2)),a=0,left)=
>limit(-arctanh(1/2*(a+4)^(1/2))+arctanh(1/2*3^(1/2)),a=0,left);
```

$$\lim_{a\to 0-} -\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{a+4}\right) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\infty$$

Como

```
>int(1/(x*sqrt(x+4)),x=-1..0);
```

$$-\infty$$

```
>Int(1/(x*sqrt(x+4)),x=-1..0)=int(1/(x*sqrt(x+4)),x=-1..0);
```

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx = -\infty$$

Como $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx$ é divergente, concluímos que a integral $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx$ é divergente.

III - APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

Nesta unidade trabalharemos com

Volume de sólido de revolução em torno do eixo x
Volume de sólido de revolução em torno do eixo y
Gráficos em coordenadas polares
Área em coordenadas polares

3.1 - Volume de sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, de uma região R.

Comandos

>with(student):
>with(plots):
>f:=x->expressão que define a função de x;
>plot(f(x),x=a..b); para visualizar a área que gera o volume.
*>V:=Pi*Int((f(x))^2,x=a..b);* integral que calcula o volume procurado.
>evalf("); apresenta o resultado na forma aproximada do resultado imediatamente anterior, aqui representado por ".
*>plot3d([r,f(r)*cos(t),f(r)*sin(t)],r=0..b,t=0..2*Pi,grid=[30,30]);* apresenta o volume do sólido rotacionado em torno do eixo x.

Exemplo:

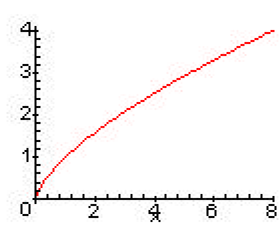
Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da área limitada por y = $x^{\frac{2}{3}}$ para x $\in$ [0, 8].

<u>Solução</u>:

>with(student):
>with(plots):
>f:=x->x^(2/3);

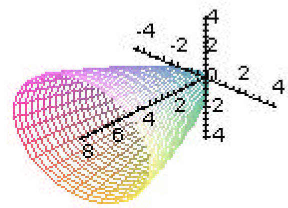
$$f := x \rightarrow x^{2/3}$$

>plot(f(x),x=0..8);



Para a visualização do volume procurado emitimos o comando:

>plot3d([r,f(r)*cos(t),f(r)*sin(t)],r=0..8,t=0..2*Pi,grid=[30,30]);



E para encontrarmos o valor deste volume, emitimos:

>V:=Pi*Int((f(x))^2,x=0..8);

$$V := \pi \int_0^8 x^{4/3}\, dx$$

>value(");

$$\frac{192}{7} \pi\, 8^{1/3}$$

>evalf("");

$$172.3387970$$

3.2 - - Volume de sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, de uma região R.

Comandos

>with(student):
>with(plots):
>f:=x->expressão que define a função de x;
>plot(f(x),x=a..b); para visualizar a área que gera o volume.
*>V:=Pi*Int((f(y))^2,y=c..d);* integral que calcula o volume procurado.
>evalf("); apresenta o resultado na forma aproximada do resultado imediatamente anterior, aqui representado por “.
*>plot3d([r*cos(t),f(r),r*sin(t)],r=0..b,t=0..2*Pi,grid=[30,30]);* apresenta o volume do sólido rotacionado em torno do eixo y.
*>plot3d([r*cos(t),r*sin(t),f(r)],r=0..b,t=0..2*Pi,grid=[30,30]);* apresenta o volume do sólido rotacionado em torno do eixo y, mas substituindo o eixo z, pelo eixo y.

Exemplos:

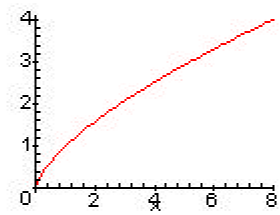
1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da área limitada por y = $x^{\frac{2}{3}}$, o eixo y e a reta y = 4, para x ∈ [0, 8].

<u>Solução</u>:

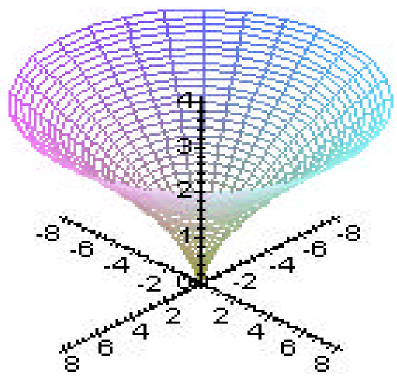
```
>with(student):
>with(plots):
>f:=x->x^(2/3);
```

$$f := x \to x^{2/3}$$

```
>plot(f(x),x=0..8);
```




```
> plot3d([r*cos(t),r*sin(t),f(r)],r=0..8,t=0..2*Pi,grid=[30,30]);
```



```
>V:=Pi*Int((y^(3/2))^2,y=0..4);
```

$$V := \pi \int_0^4 y^3 \, dy$$

```
>V:=Pi*int((y^(3/2))^2,y=0..4);
```

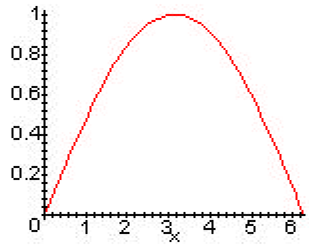
$$V := 64\,\pi$$

2) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da área limitada por $y = \text{sen}\frac{x}{2}$, para x ∈ [0, 2π].

```
>f:=x->sin(x/2);
```

$$f := x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

>plot(f(x),x=0..2*Pi);



>V:=Pi*Int((2*arcsin(y))^2,y=0..1);

$$V := \pi \int_0^1 4\arcsin(y)^2\, dy$$

>Pi*int((2*arcsin(y))^2,y=0..1);

$$\pi \int_0^1 4\arcsin(y)^2\, dy$$

evalf(");

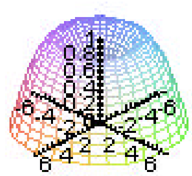
$$5.873535452$$

Observação:

Para a representação gráfica do volume procurado, temos duas opções que são apresentadas a seguir. A primeira apresenta o eixo dos z como sendo o eixo dos y, e a segunda apresenta o eixo dos y, como o eixo dos y. Logo podemos escolher uma das representações para o volume procurado.

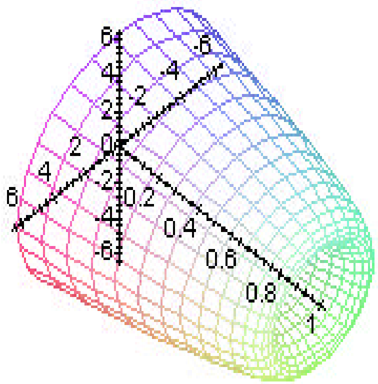
Primeira opção:

>with(plots):
>plot3d([r*cos(t),r*sin(t),f(r)],r=0..2*Pi,t=0..2*Pi,grid=[30,30]);



Segunda opção:

>plot3d([r*cos(t),f(r),r*sin(t)],r=0..2*Pi,t=0..2*Pi,grid=[30,30]);



3. 3 - Gráficos em coordenadas polares

Comandos

>with(plots):
*>r:=f(q);*insere na área de trabalho a expressão em função da variável θ.
>polarplot(f(q),theta=a..b); apresenta o gráfico dado por r=f(θ) para θ no intervalo de a até b, com as opções do comando plot.
>display({r_1, r_2}); apresenta os gráficos de r_1 e r_2 no mesmo sistema polar.

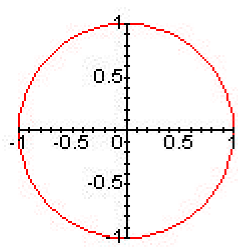
Exemplos:

1) Construir os gráficos de r = cos(nθ) para n = 0, 1, 2, 3.

<u>Solução</u>:

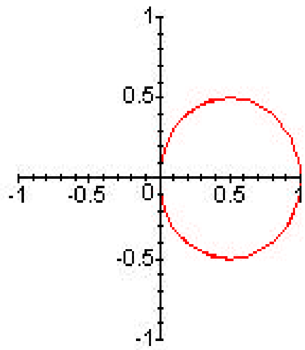
>with(plots):

Se n = 0:
>polarplot(cos(0*t),t=0..2*Pi,view=[-1..1,-1..1],scaling=constrained);



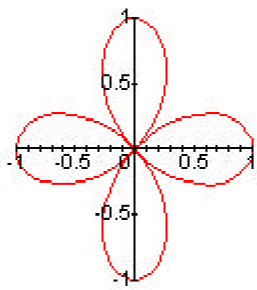
Se n = 1:

>polarplot(cos(1*t),t=0..2*Pi,view=[-1..1,-1..1],scaling=constrained);



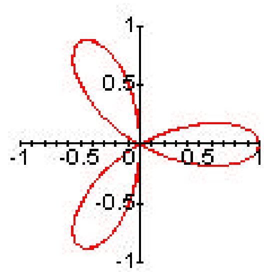
Se n = 2:

>polarplot(cos(2*t),t=0..2*Pi,view=[-1..1,-1..1],scaling=constrained);



Se n = 3:

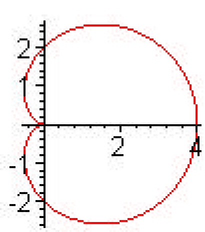
>polarplot(cos(3*t),t=0..2*Pi,view=[-1..1,-1..1],scaling=constrained);



2) Construir o gráfico de r = 2 + 2cosθ.

<u>Solução:</u>

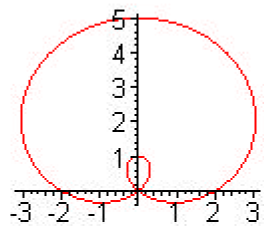
>with(plots):
>polarplot(2+2*cos(theta),theta=0..2*Pi);



3) Construir o gráfico de $r = 2 + 3\text{sen}\theta$.

Solução:

```
>with(plots):
>polarplot(2+3*sin(theta),theta=0..2*Pi);
```



Observação: As seguintes opções mostram os comandos necessários para animação em gráficos:

Primeira opção:

```
>with(plots):
>to_animate:=([seq(plot(cos(a*t),t=-Pi..Pi,coords=polar),a=0..5)]):
>display(to_animate,insequence=true);
```

Segunda opção:

```
>a:='a':r:=cos(a*t);
```

$$r := \cos(a\,t)$$

```
>for n from 0 to 5 do
>plot([subs(a=n,r),t,t=0..2*Pi],coords=polar,scaling=constrained):
>od;
```

3.4 - Área em coordenadas polares

Comandos

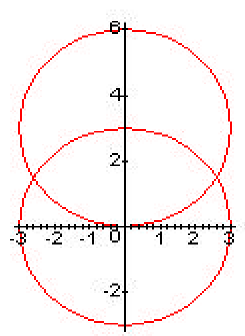
>with(plots):
>with(student):
>r:=f(q); insere na área de trabalho a expressão em função da variável θ.
>polarplot(f(q),theta=a..b); apresenta o gráfico dado por $r=f(\theta)$ para θ no intervalo de a até b, com as opções do comando plot.
>display({r_1, r_2}); apresenta os gráficos de r_1 e r_2 no mesmo sistema polar.
*>A:=1/2*Int(((f(q))^2),theta=a..b);* apresenta a integral que calcula a área de uma região em coordenadas polares.
*>A:=1/2*int(((f(q))^2),theta=a..b);* calcula a área de uma região em coordenadas polares.

Exemplo:

Usar o Maple para encontrar através de coordenadas polares, a área comum as curvas $r_1 = 6\text{sen}(\theta)$ e $r_2 = 3$. Represente as duas curvas no mesmo sistema polar.

<u>Solução</u>:

>with(sutdent):
>with(plots):
>r1:=polarplot(6*sin(theta),theta=0..Pi):
>r2:=polarplot(3,theta=0..2*Pi):
>display({r1,r2});



>r1:=6*sin(theta);

$$r1 := 6\sin(\theta)$$

>r2:=3;

$$r2 := 3$$

Para encontrar o ângulo de intersecção entre r_1 e r_2,usamos o comando solve:
>solve(r1=r2,theta);

$$\frac{1}{6}\pi$$

A área solicitada é $A = A_1 + A_2$.

```
>A1:=1/2*Int((6*sin(theta))^2,theta=0..Pi/6);
```

$$A1 := \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{6}\pi} 36\sin(\theta)^2\, d\theta$$

```
>A1:=1/2*int((6*sin(theta))^2,theta=0..Pi/6);
```

$$A1 := -\frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi$$

```
>A1:=1/2*Int((6*sin(theta))^2,theta=0..Pi/6)=1/2*int((6*sin(theta))^2,theta=0..Pi/6);
```

$$A1 := \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{6}\pi} 36\sin(\theta)^2\, d\theta = -\frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi$$

```
>A2:=1/2*Int((3^2),theta=Pi/6..Pi/2);
```

$$A2 := \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 9\, d\theta$$

```
>A2:=1/2*int((3^2),theta=Pi/6..Pi/2);
```

$$A2 := \frac{3}{2}\pi$$

```
>A2:=1/2*Int((3^2),theta=Pi/6..Pi/2)=1/2*int((3^2),theta=Pi/6..Pi/2);
```

$$A2 := \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 9\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

```
>A:=2*(1/2*int((6*sin(theta))^2,theta=0..Pi/6)+1/2*int((3^2),theta=Pi/6..Pi/2));
```

$$A := -\frac{9}{2}\sqrt{3} + 6\pi$$

```
>evalf(");
```

$$11.05532728$$

IV - FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Esta unidade mostra a utilização do Maple V em

Gráficos de superfícies e curvas de nível
Intersecção de superfície
Equação e gráfico de plano tangente a uma superfície
Máximos e mínimos de uma função de duas variáveis

4.1 – Gráficos de superfícies e curvas de nível

Comandos

>with(plots):
>f(x,y):=expressão; define a função de duas variáveis x e y.
>implicitplot3d(z = expressão,x=a..b,y=c..d,z=e..f); esboça gráficos de superfícies.
>plot3d(expressão,x=a..b,y=c..d,opções): esboça gráficos de superfícies.
>contourplot(f(x,y),x=a..b,y=c..d,opções); exibe as curvas de nível de f(x, y).
>contourplot3d(f(x,y), x=a..b,y=c..d,opções); exibe as curvas de contorno de f(x,y).

Exemplos: Traçar o gráfico das superfícies e curvas de nível dadas por

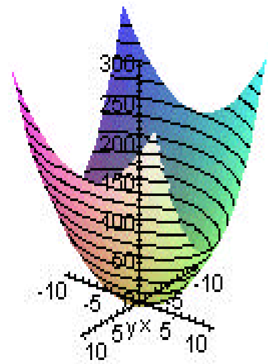
1 - $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

<u>Solução</u>:

with(plots):
>f(x,y):=2*x^2+y^2;

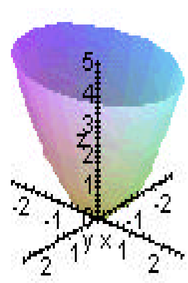
$$f(x, y) := 2\,x^2 + y^2$$

>plot3d(f(x,y),x=-10..10, y = -10..10);



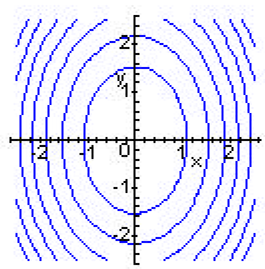
Ou pelo comando implicitplot:

>implicitplot3d(z=2*x^2+y^2,x=-2.5..2.5,y=-2.5..2.5,z=0..5);



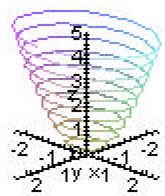
Para visualizar as curvas de nível:

>contourplot(f(x,y),x=-2.5..2.5,y=-2.5..2.5,color=blue);



Para visualizar as curvas de contorno de f(x, y) podemos usar o comando *contourplot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d,opções);* ou uma outra opção dada na barra de opções para gráficos em três dimensões.

```
>implicitplot3d(z=2*x^2+y^2,x=-2.5..2.5,y=-2.5..2.5,z=0..5);
```



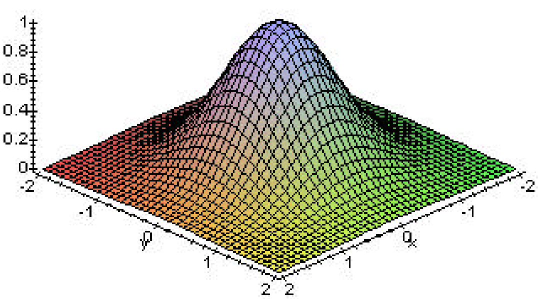
2) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

<u>Solução</u>:

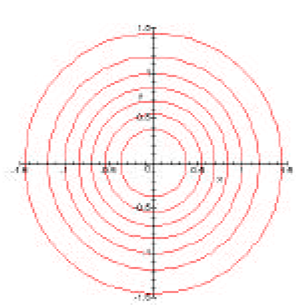
```
> f(x,y):=exp(-x^2-y^2);
```

$$f(x, y) := \mathbf{e}^{(-x^2 - y^2)}$$

```
>plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2,numpoints=1500);
```



```
> contourplot(f(x,y),x=-5..5,y=-5..5,color=red,numpoints=3500);
```



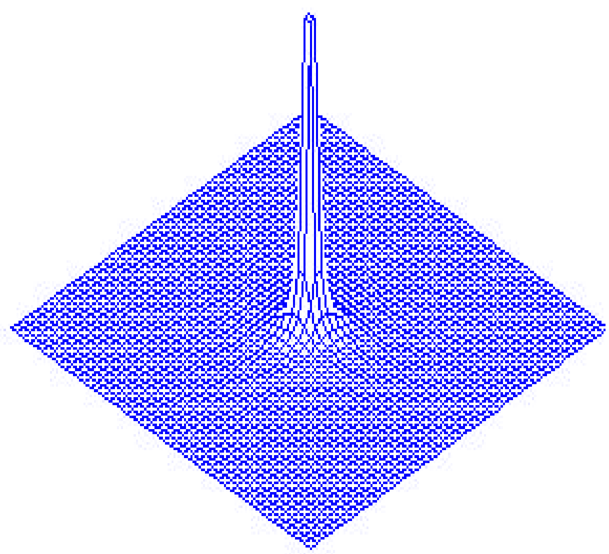
3) f(x,y)= $\frac{1}{x^2 + y^2}$

<u>Solução</u>:

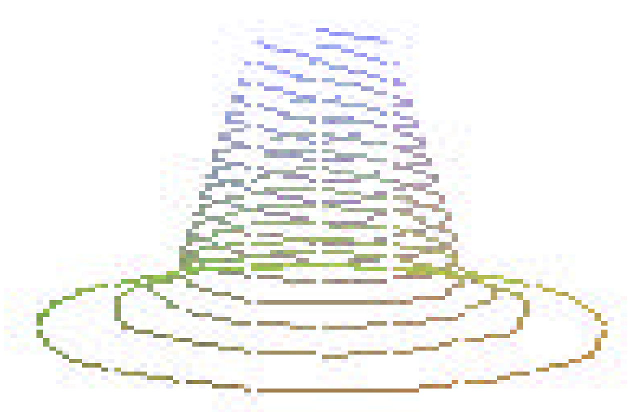
>with(plots):
>f(x,y):=1/(x^2+y^2);

$$f(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2}$$

>plot3d(f(x,y),x=-3..3,y=-3..3,color=blue,numpoints=500,grid=[50,50]);



>contourplot3d(f(x,y),x=-3..3,y=-3..3,grid=[30,30],numpoints=1500);



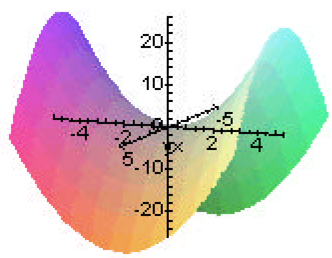
4) $f(x, y) = y^2 - x^2$

Solução:

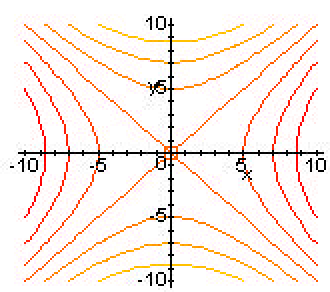
>with(plots):
>f(x,y):=y^2-x^2;

$$f(x, y) := y^2 - x^2$$

>plot3d(f(x,y),x=-5..5,y=-5..5,numpoints=2000);



>contourplot(f(x,y),x=-10..10,y=-10..10);



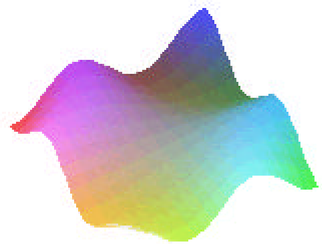
5) f(x, y) = senx seny

Solução:

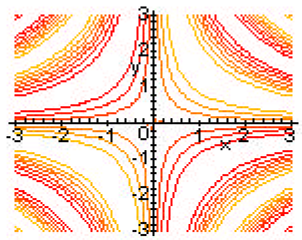
>with(student):
>f(x,y):=sin(x*y);

$$f(x, y) := \sin(x\,y)$$

>plot3d(f(x,y),x=-30..30,y=-30..30);



>contourplot(f(x,y),x=-3..3,y=-3..3,numpoints=1500);



4.2 – Intersecção de superfícies

Comandos para vizualização de duas superfícies num mesmo sistema de coordenadas

Primeira opção

>with(plots):
>a:=implicitplot3d(z=expressão,x= a..b,y=c..d,z=e..f,opções):
>b:= implicitplot3d(z=expressão,x= a..b,y=c..d,z=e..f,opções):
>display({a,b});

Segunda opção

>with(plots):
>implicitiplot3d({z1=expressão,z2=expressão}, x= a..b,y=c..d,z=e..f,opções);

Observação:

Podemos usar o comando plot3d no lugar do implicitplot3d.

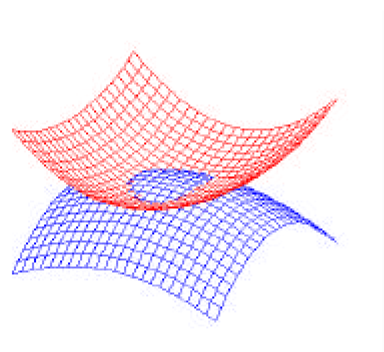
Exemplos:

Considere as seguintes superfícies:

1) $z = x^2+2y^2$ e $z = 12-2x^2-y^2$.

Solução: Usando a primeira opção.

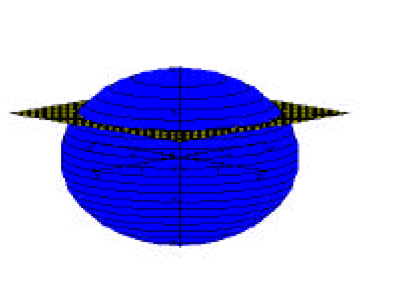
```
>with(plots):
>a:=plot3d(x^2+2*y^2,x=-5..5.,y=-5..5,color=red,numpoints=500):
>b:=plot3d(12-2*x^2-y^2,x=-5..5.,y=-5..5,color=blue,numpoints=500):
>display({a,b});
```



2) $z = x^2+y^2+z^2 = 4$ e $z = 1$.

Solução: Usando a primeira opção.

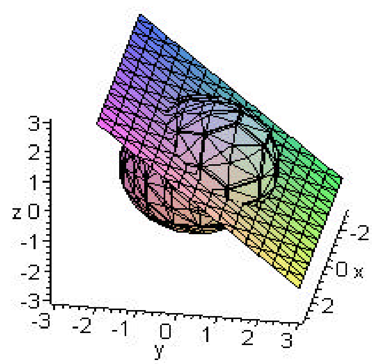
```
>with(plots):
>a:=implicitplot3d(x^2+y^2+z^2=4,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,color=blue):
>b:=plot3d(1,x=-2..2,y=-2..2,color=yellow,numpoints=500):
>display({a,b});
```



3) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $z + y = 1$.

<u>Solução:</u> Usando a segunda opção.

```
>with(plots):
>implicitplot3d({x^2+y^2+z^2=4, z+y=2},x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```

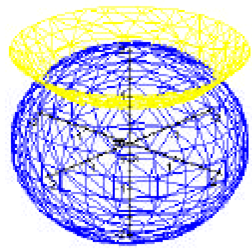


4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2+y^2+z^2 = 4$

<u>Solução:</u> Usando a primeira opção.

```
>with(plots):
>a:=implicitplot3d(x^2+y^2+z^2=4,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,color=blue):
>b:=implicitplot3d(z=sqrt(x^2+y^2),x=-2..2,y=-2..2,z=0..2,color=yellow):
```

>display({a,b});



4.3 – Plano Tangente

Comandos para determinação e visualização do plano tangente a uma superfície num ponto

Sejam $r_1 = A_1 + \lambda \vec{v}_1$ e $r_2 = A_2 + \lambda \vec{v}_2$ as equações das retas tangentes a superfície no ponto P_0 dado e P(x, y, z) um ponto qualquer do plano tangente.

>with(student):
>with(linalg):
>f(x,y):=expressão; define a função f de duas variáveis x e y.
>implicitplot3d(expressão,x=a..b,y=c..d,z=e..f,opções); esboçar gráficos dados implicitamente.
>pointplot3d([x,y,z],opções); exibe pontos em três dimensões.
>A:=matrix(3,3,[a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}]); define a matriz A de terceira ordem. Neste contexto as linhas desta matriz são as coordenadas as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.
>det(A)=0; determina a equação do plano tangente.
>isolate(“,z); expressa z em função das variáveis x e y.

Para vizualizar superfície, plano tangente, e ponto de tangência

>with(plots):
>a:=implicitplot3d(expressão,x=a..b,y=c..d,z=e..f,opções):
>b:=plot3d(expressão,x=a..b,y=c..d,opções):
>c:=pointplot3d([x,y,z],opções):
>display({a,b,c});

Exemplo:

Visualizar o gráfico da superfície dada por f(x, y) = $2x^2 + y^2$ e o plano tangente a esta superfície no ponto de coordenadas (2, 1, 9).

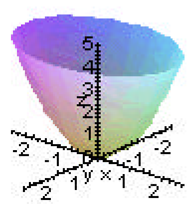
<u>Solução</u>:

>with(plots):
>with(student):
>with(linalg):

>f(x,y):=2*x^2+y^2;

$$f(x, y) := 2\,x^2 + y^2$$

>implicitplot3d(z=2*x^2+y^2,x=-2.5..2.5,y=-2.5..2.5,z=0..5);



As equações das retas tangentes à superfície no ponto P_0(2, 1, 19), são dadas por:

$$r_1 = \begin{cases} \dfrac{x-2}{} = \dfrac{z-9}{8} \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 = \begin{cases} \dfrac{y-1}{} = \dfrac{z-9}{2} \\ x = 2 \end{cases}, \text{ de onde}$$

temos $\vec{v}_1 = (1,\ 0,\ 8)$ e $\vec{v}_1 = (0,\ 1,\ 2)$.

Para determinação do plano tangente à superfície em P_0(2, 1, 19), devemos resolver a equação dada por $\pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-9 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, para isto emitimos:

```
>A:=matrix(3,3,[x-2,y-1,z-9,1,0,8,0,1,2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} x-2 & y-1 & z-9 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>det(A)=0;
```

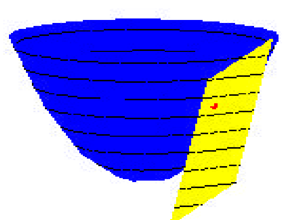
$$-8\,x + 9 - 2\,y + z = 0$$

```
>isolate(",z);
```

$$z = 8\,x - 9 + 2\,y$$

Esta é a equação do plano tangente procurado.
Para visualização gráfica da superfície e do plano tangente no ponto $P_0(2, 1, 9)$, usamos os comandos:

```
>a:=implicitplot3d(z=2*x^2+y^2,x=-3.5..3.5,y=-5..5,z=0..15,color=blue):
>b:=plot3d(8*x+2*y-9,x=0.5..2.5,y=0.5..2.5,color=yellow):
>c:=pointplot3d([2,1,9],symbol=circle,color=red):
>display({a,b,c});
```



4.4 – Máximos e mínimos de uma função de duas variáveis

Comandos para determinar os pontos críticos de uma função de duas variáveis

>*with(student):*
>*f(x,y):=expressão que define a função de duas variáveis;*
>*hf:=hessian(f(x,y),[x,y]);* matriz hessiana.
>*det(hf);* determinante de Hf.
>*diff(f(x,y),x);* encontra a derivada parcial de primeira ordem de f em relação a variável x.
>*diff(f(x,y),y);* encontra a derivada parcial de primeira ordem de f em relação a variável y.
>*diff(f(x,y),x,x);* encontra a derivada parcial de segunda ordem de f em relação a variável x.
>*solve({fx=0,fy=0});* resolve o sistema cujas equações são fx=0 e fy=0 e determina os pontos críticos de f.
fx e fy são as derivadas parciais de f em relação as variáveis x e y, respectivamente.
>*subs(x=a,y=b,g);* apresenta o valor numérico de g substituindo x por a e y por b.

Observação:

Com essas informações, aplica-se o teste da segunda derivada para classificar os pontos críticos.

Exemplo: Determinar pontos de máximos e mínimos da seguinte função:

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 4}$$

Solução:

>with(student):
>with(linalg):
>f:=x/(x^2+y^2+4):
>fx:=diff(f,x);fy:=diff(f,y);

$$fx := \frac{1}{x^2+y^2+4} - 2\frac{x^2}{(x^2+y^2+4)^2}$$

$$fy := -2\frac{x\,y}{(x^2+y^2+4)^2}$$

>solve({fx=0,fy=0});

$$\{y=0, x=2\}, \{y=0, x=-2\}$$

Portanto, os pontos críticos de f são : (2,0) e (-2,0).

>hf:=hessian(f,[x,y]);

$$hf := \begin{bmatrix} -6\frac{x}{(x^2+y^2+4)^2} + 8\frac{x^3}{(x^2+y^2+4)^3} & -2\frac{y}{(x^2+y^2+4)^2} + 8\frac{x^2\,y}{(x^2+y^2+4)^3} \\ -2\frac{y}{(x^2+y^2+4)^2} + 8\frac{x^2\,y}{(x^2+y^2+4)^3} & 8\frac{x\,y^2}{(x^2+y^2+4)^3} - 2\frac{x}{(x^2+y^2+4)^2} \end{bmatrix}$$

>H1:=subs(x=2,y=0,op(hf));

$$H1 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{16} \end{bmatrix}$$

>det(H1);

1/256

Como d(H1) = 1/256 > 0 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$(2,0) = -1/16 < 0, (2,0) é um ponto de máximo de f.

>H2:=subs(x=-2,y=0,op(hf));

$$H2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

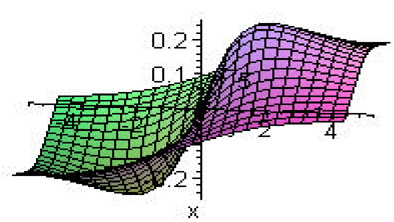
>det(H2);

1/256

Como d(H2) = 1/256 > 0 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$(-2,0) = 1/16 > 0 , (-2,0) é um ponto de mínimo de f.

Gráfico da superfície

>with(plots):
>plot3d(f,x=-5..5,y=-5..5);



V – INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA

São apresentados a seguir os comandos e pacotes para o cálculo de

Integrais duplas em coordenadas cartesianas
Integrais duplas em coordenadas polares
Integrais triplas em coordenadas cartesianas
Integrais triplas em coordenadas cilíndricas
Integrais triplas em coordenadas esféricas

5.1 - Integrais duplas em coordenadas cartesianas

Comandos

```
>with(student):
```

>Int(Int(f(x,y),x=x_1..x_2),y=y_1..y_2); representa a integral $\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_2}^{x_2} f(x, y)dxdy$.

>int(int(f(x,y),x=x_1..x_2),y=y_1..y_2); calcula a integral $\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_2}^{x_2} f(x, y)dxdy$.

Exemplo:

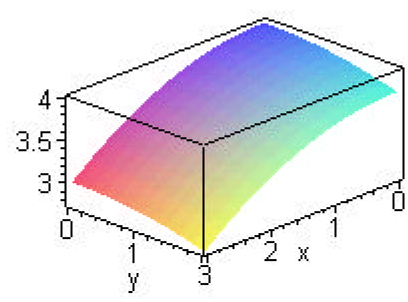
Calcular a integral de $f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ sobre a região **R** limitada pelos planos coordenados e pelos planos x = 3 e y = 2.

<u>Solução</u>:

```
with(student):
with(plots):
> f:=4-(1/9)*x^2-(1/16)*y^2;
```

$$f := 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$$

```
>plot3d(f,x=0..3,y=0..2);
```




```
> Int(Int(f,x=0..3),y=0..2)=int(int(f,x=0..3),y=0..2);
```

$\int^{2}\int^{3}$ 1 2 1 2 43

5.2 - Integrais duplas em coordenadas polares

Para a resolução de integrais duplas em coordenadas polares, devemos escrever $f = f(r,\theta)$, sendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\theta$ e considerar o Jacobiano = r.

Comandos

>with(student):
>f:= expressão que define a função em coordenadas polares;
*>Int(Int(r*f,r=r₁..r₂, θ=θ₁..θ₂);* representa a integral $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} r\, f\, dr\, d\theta$

*>int(int(r*f,r=r₁..r₂, θ=θ₁..θ₂);* calcula a integral $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} r\, f\, dr\, d\theta$

Exemplo:

Encontrar o volume do sólido acima do plano xy, limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano $z + y = 3$.

<u>Solução</u>:

Equação do cilindro em coordenadas polares: $r = 2$
Equação do plano em coordenadas polares: $z = 3 - r\,\mathrm{sen}(\theta)$

Gráfico do sólido

```
>with(plots):
>a:=cylinderplot(2,theta=0..2*Pi,z=0..6,color=green):
>b:=plot3d(3-y,x=-3..3,y=-3..3,color=pink):
>display({a,b});
```

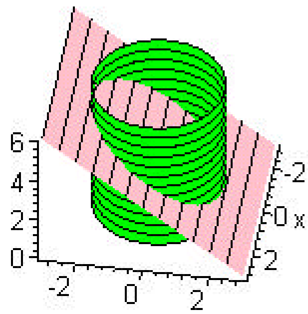
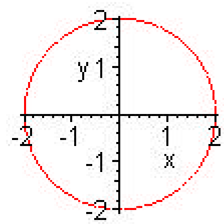


Gráfico da projeção do sólido (região de integração) no plano xy.

```
>implicitplot(x^2+y^2=4,x=-3..3,y=-3..3);
```



Cálculo do volume:

```
>V:=Int(Int(r*(3r*sin(theta)),r=0..2),theta=0..2*Pi)=int(int(r*(3r*sin(theta)),
r=0..2),theta=0..2*Pi);
```

$$V := \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\,(3 - r\sin(\theta))\, dr\, d\theta = 12\,\pi$$

5.3 - Integrais triplas em coordenadas cartesianas

Comandos

>*with(student):*

>*Int(Int(Int(f,x=x₁..x₂),y=y₁..y₂),z=z₁.z₂);* representa a integral $\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f\, dxdydz$

>*int(int(int(f,x=x₁..x₂),y=y₁..y₂),z=z₁.z₂);* calcula a integral $\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f\, dxdydz$

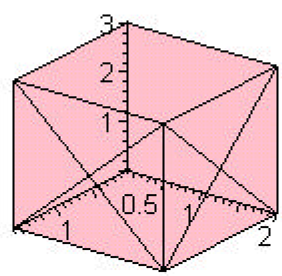
Exemplo:

Calcule a integral tripla de $f(x,y,z) = x^2y\cos(xz)$ sobre a região S do espaço limitada pelos planos y=2, x=π/2, z=3 e pelos planos coordenados.

Solução

Gráfico da região S

```
>with(plots):
>a:=polygonplot3d([[Pi/2,0,0],[Pi/2,2,0],[0,2,0],[0,0,0]],color=pink):
>b:=polygonplot3d([[Pi/2,0,0],[Pi/2,2,0],[Pi/2,0,3],[Pi/2,2,3]],color=pink):
>c:=polygonplot3d([[Pi/2,2,0],[Pi/2,2,3],[0,2,0],[0,2,3]],color=pink):
>d:=polygonplot3d([[0,0,0],[0,2,0],[0,2,3],[0,0,3]],color=pink):
>e:=polygonplot3d([[Pi/2,0,3],[Pi/2,2,3],[0,2,3],[0,0,3]],color=pink):
>f:=polygonplot3d([[0,0,3],[0,0,0],[Pi/2,0,0],[Pi/2,0,3]],color=pink):
>display({a,b,c,d,e,f});
```



Região S

$$S = \begin{cases} 0 \le x \le p/2 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$$

Cálculo da integral

>with(student):

>Int(Int(Int(x^2*y*cos(x*z),x=0..Pi/2),y=0..2),z=0..3)=int(int(int(x^2*y*cos(x*z),x=0..Pi/2),y=0..2),z=0..3);

$$\int_0^3 \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2 \, y \cos(x\,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{-2}{9}$$

5.4 - Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Para a resolução de integrais triplas em coordenadas cilíndricas devemos escrever f = f(r,θ,z), sendo x = r cosθ, y = r senθ e z=z, e considerar o Jacobiano = r

Comandos

*>Int(Int(Int(r*f,z=z1..z2),r=r1..r2),q= q1.. q2);* representa a integral $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} r\, f\, dz dr d\theta$

*>int(int(int(r*f, q=q1.. q2),r=r1..r2),z=z1.z2);* calcula a integral $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} r\, f\, dz dr d\theta$

Exemplo:

Calcular o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano z = 0.

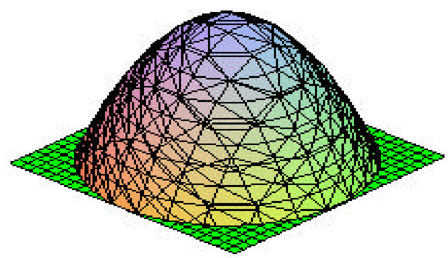
<u>Solução:</u>

Para calcular o volume através de integral tripla, devemos lembrar que $V = \iiint_S 1 dV$

Gráfico do sólido

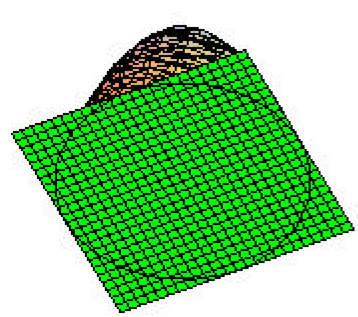
>with(plots):
>a:=implicitplot3d(z=1-x^2-y^2,x=-1..1,y=-1..1,z=0..1):
>b:=plot3d(0,x=-1..1,y=-1..1,color=green):

>display({a,b});

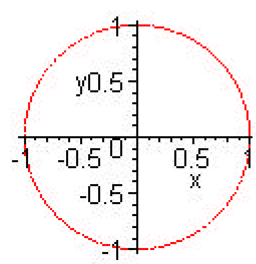


Equação da curva de intersecção do parabolóide com o plano : $x^2+y^2 = 1$

Gráfico da curva de intersecção



>implicitplot(x^2+y^2=1,x=-1..1,y=-1..1);



Região de integração

$$S' = : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Cálculo do volume

```
>with(student):
>V:=Int(Int(Int(r,r=0..1),theta=0..2*Pi),z=0..1)=int(int(int(r,r=0..1),theta=0..2*Pi),z=0..1);
```

$$V := \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz = \pi$$

5.5 - Integrais triplas em coordenadas esféricas

Para a resolução de integrais triplas em coordenadas esféricas devemos escrever $f = f(\rho,\theta,\phi)$, sendo $x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ e $z = \rho \cos\phi$, e considerar o.Jacobiano = $\rho^2 \operatorname{sen}\phi$

Comandos

>with(student):
*>Int(Int(Int(f*r^2*sin(f),* $\rho=\rho_1 .. \rho_2$*),* $\phi=\phi_1 .. \phi_2$*),*$\theta=\theta_1 . \theta_2$*);* representa a integral

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f. \ \rho^2 \operatorname{sen}\phi \ \ d\rho \ \ d\phi \ \ d\theta$$

*>int(int(int(f*r^2*sin(f),* $\rho=\rho_1 .. \rho_2$*),* $\phi=\phi_1 .. \phi_2$*),* $\theta=\theta .. \theta_2$*);* calcula a integral

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f. \ \rho^2 \operatorname{sen}\phi \ \ d\rho \ \ d\phi \ \ d\theta$$

Exemplo:

Calcular $\iiint_S z dV$ onde S é a região limitada acima pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 16$ e abaixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

<u>Solução:</u>

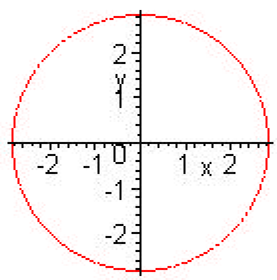
Gráficos das superfícies

```
>with(plots):
>a:=implicitplot3d(z=sqrt(16-x^2-y^2),x=-4..4,y=-4..4,z=0..4,color=pink):
>b:=implicitplot3d(z=sqrt(x^2+y^2),x=-4..4,y=-4..4,z=0..4,color=green):
>display({a,b});
```

Equação da curva de intersecção do cone com a esfera: $x^2 + y^2 = 8$

Gráfico da curva de intersecção

```
>implicitplot(x^2+y^2=8,x=-sqrt(8)..sqrt(8),y=-sqrt(8)..sqrt(8));
```



Região de integração

$$S' = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi/4 \\ 0 \le \rho \le 4 \end{cases}$$

Cálculo do volume

```
>V:=Int(Int(Int(rho*cos(phi)*rho^2*sin(phi),rho=0..4),phi=0..Pi/4),theta=0..2*Pi)=int
(int(int(rho*cos(phi)*rho^2*sin(phi),rho=0..4),phi=0..Pi/4),theta=0..2*Pi);
```

$$V := \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{1}{4}\pi}\int_{0}^{4} \rho^{3}\cos(\phi)\sin(\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 32\pi$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABELL, Marta L. - The Maple V Handbook. ISBN - 0-12-041542-9, AP Professional.

ABELL, Marta L, Braselton, James P. – Maple V by example. AP Professional.

LEITHOLD, Louis. - O Cálculo com Geometria Analítica. Volumes 1 e 2, Harbra.

SIMMOS, G.F. - O Cálculo com Geometria Analítica. Volumes 1 e 2, MC Graw-Hill.