



Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática



**Plano de Ensino**

Semestre 2018-1

**I. Identificação da Disciplina**

| <i>Código</i> | <i>Nome da Disciplina</i> | <i>Horas-aula Semanais</i> |                    | <i>Horas-aula Semestrais</i> |
|---------------|---------------------------|----------------------------|--------------------|------------------------------|
| MTM5865       | Cálculo Variacional       | <i>Teóricas: 6</i>         | <i>Práticas: 0</i> | 108                          |

**II. Professor(es) Ministrante(s)**

Fabio Silva Botelho.

**III. Pré-requisito(s)**

| <i>Código</i> | <i>Nome da Disciplina</i> |
|---------------|---------------------------|
| MTM5863       | B-Cálculo III             |

**IV. Curso(s) para o(s) qual(is) a Disciplina é Oferecida**

Matemática - Bacharelado.

**V. Ementa**

Princípio de Fermat. Princípio de Maupertuis. Equação de Euler-Lagrange. Exemplos de aplicações do princípio variacional. Formulações Lagrangeana e Hamiltoniana da Mecânica Clássica. Problemas variacionais com vínculos. Formulação variacional de meios contínuos e Teoria Clássica de Campos. Formulação variacional de problemas de auto-valores. Princípio variacional e Mecânica Quântica.

**VI. Objetivos**

Propiciar ao aluno condições de:

- Dominar e aplicar os conceitos relativos ao cálculo com funcionais em espaços de funções.
- Trabalhar os problemas variacionais clássicos.
- Aplicar as técnicas variacionais em equações diferenciais parciais e em problemas de autovalores.
- Conhecer modernas aplicações de técnicas variacionais.

**VII. Conteúdo Programático**

Unidade 1. Introdução a Problemas Variacionais Clássicos.

- 1.1. Motivação e origens históricas.
- 1.2. O problema da catenária.
- 1.3. O problema da Braquistócrona.
- 1.4. O princípio de Hamilton.
- 1.5. O problema da Geodésica.
- 1.6. O problema de superfícies mínimas.

Unidade 2. A Primeira Variação.

- 2.1. Funcionais. Problemas variacionais simples.
- 2.1. Espaços de funções.
- 2.2. A variação de um funcional. Uma condição necessária para um extremo.
- 2.3. O problema variacional mais simples. Equação de Euler-Lagrange.
- 2.4. Extensão a várias variáveis.
- 2.4. Um problema simples com pontos extremos variáveis.
- 2.5. A derivada variacional.
- 2.6. A invariância da equação de Euler-Lagrange.

Unidade 3. A Primeira Variação: Generalizações.

- 3.1. O Problema de Extremidades fixas para  $n$  funções incógnitas.
- 3.2. Problemas variacionais em forma paramétrica.
- 3.3. Funcionais dependentes de derivadas de ordem mais alta.
- 3.4. Problemas variacionais com condições auxiliares.
  - 3.4.1. O problema isoperimétrico.
  - 3.4.2. Problemas variacionais com uma quantidade finita de condições auxiliares.

Unidade 4. A Variação Geral de um Funcional.

- 4.1. Fórmula básica.
- 4.2. Variação de funcionais com extremidades sobre curvas ou superfícies.
- 4.3. As condições de Weierstrass-Erdmann.

Unidade 5. A Forma Canônica das Equações de Euler-Lagrange e Transformações Canônicas.

- 5.1. A forma canônica das equações de Euler-Lagrange.
- 5.2. Integrais primeiras das equações de Euler-Lagrange.
- 5.3. A transformação de Legendre.
- 5.4. Transformações canônicas.
- 5.5. O teorema de Noether.
- 5.6. O princípio da mínima ação.
- 5.7. Leis de conservação.
- 5.8. A equação de Hamilton-Jacobi.
- 5.9. O teorema de Jacobi.

Unidade 6. A Segunda Variação. Condições Suficientes para um Extremo Fraco.

- 6.1. Funcionais quadráticos. A segunda variação de um funcional.
- 6.2-. A fórmula para a segunda variação. Condição de Legendre.
- 6.3. Análise de um funcional quadrático.
- 6.4. A condição necessária de Jacobi.
- 6.5. Condição suficiente para um extremo fraco.
- 6.6. Generalização para  $n$  funções incógnitas.
- 6.7. Conexão entre a condição de Jacobi e a teoria das formas quadráticas.

Unidade 7. Campos. Condições Suficientes para um Extremo Forte.

- 7.1. Condições de contorno consistentes. Definição geral de um campo.
- 7.2. O campo de um funcional.
- 7.3. A integral invariante de Hilbert.
- 7.4. A função  $E$  de Weierstrass. Condições suficientes para um extremo forte.

Unidade 8. Problemas Variacionais com Integrais Múltiplas.

- 8.1. Variação de um funcional definido sobre uma região fixa.
- 8.2. Dedução variacional das equações do movimento de sistemas mecânicos contínuos.
- 8.3. Variação de um funcional definido sobre uma região variável.
- 8.4. Aplicações a teoria de campos.

Unidade 9- Métodos Variacionais Diretos.

- 9.1. Sequências minimizantes.
- 9.2. Método de Ritz e método de diferenças finitas.
- 9.3. O problema de Sturm-Liouville.

### **VIII. Metodologia de Ensino / Desenvolvimento do Programa**

Serão ministradas aulas expositivas e dialogadas, com resolução de exercícios em sala de aula.

### **IX. Metodologia de Avaliação**

O aluno será avaliado através de 3 ou 4 avaliações parciais, com pesos previamente determinados pelo professor ministrante, que serão realizadas ao longo do semestre letivo. Será calculada a média das notas obtidas nas avaliações (utilizando os pesos determinados) e será considerado aprovado o aluno que tiver, além de frequência suficiente, média maior ou igual a 6,0.

### **X. Avaliação Final**

De acordo com o parágrafo 2º do artigo 70 da Resolução 17/Cun/97, o aluno com frequência suficiente e média das avaliações do semestre de 3,0 a 5,5 terá direito a uma nova avaliação, no final do semestre, abordando todo o conteúdo programático. A nota final desse aluno será calculada através da média aritmética entre a média das avaliações anteriores e a nota da nova avaliação.

### **XI. Cronograma Teórico**

*Data ou Período*

*Atividade*

Será estabelecido pelo professor.

**XII. Cronograma Prático**

| <i>Data ou Período</i> | <i>Atividade</i> |
|------------------------|------------------|
| Não se aplica.         |                  |

**XIII. Bibliografia Básica**

1. Dacorogna, B.: Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer (2008).
2. Gelfand, I.M. , Fomin S.V.: Calculus of Variations, Prentice Hall (1963).
3. Goldstine, H.H.: A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th century, Springer Verlag (1980).
4. Lanczos, C.: The Variational Principles of Mechanics, Univ. of Toronto Press (1970).
5. Leitão, A.C.G.: Cálculo Variacional e Controle Ótimo, 23º CBM, IMPA (2001).
6. Leitmann, G.: The Calculus of Variations and Optimal Control. An Introduction, Plenum Press (1981).
7. Sagan, H: Introduction to the Calculus of Variation, Dover, 1992.
8. Troutman, J.L.: Variational Calculus and Optimal Control, 2nd Ed. Springer Verlag (1996).
9. Van Brunt, B. : The Calculus of Variations, Springer-Verlag (2010).

**XIII. Bibliografia Complementar**

Não estabelecida.

Florianópolis, 5 de fevereiro de 2018.

---

Prof. Fabio Silva Botelho  
Coordenador da Disciplina