



Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática



Plano de ensino  
Semestre 2020.1

I. Identificação da disciplina

Código	Nome da disciplina	Horas-aula semanais		Horas-aula semestrais
MTM3432	Análise II	Teóricas: 4	Práticas: 0	72

II. Professor(es) ministrante(s)

Danilo Royer (danilo.royer@ufsc.br)

III. Pré-requisito(s)

MTM3431 – Análise I

IV. Curso(s) para o(s) qual(is) a disciplina é oferecida

Matemática – Bacharelado, Matemática – Licenciatura

V. Ementa

Integral de Riemann de funções de várias variáveis. Medida de Lebesgue. Teoremas de convergência para integrais de Lebesgue. Espaços  $L^p$ .

VI. Objetivos

Concluindo a disciplina MTM3432 – Análise II, o aluno deverá ser capaz de:

- Trabalhar com as Integrais de Riemann e Lebesgue no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ;
- Dominar os conceitos e técnicas empregadas na resolução de problemas sobre o conteúdo programático;
- Conhecer as principais propriedades dos espaços de funções integráveis a Lebesgue sobre um aberto do  $\mathbb{R}^n$ .

VII. Conteúdo programático

Unidade 1. Integral de Riemann.

- 1.1. Somas inferiores e superiores. Propriedades. Funções integráveis em domínios do  $\mathbb{R}^n$ . Condição de integrabilidade de Riemann. Condição de Darboux.
- 1.2. Conjuntos de medida nula em  $\mathbb{R}^n$ .
- 1.3. O Teorema de Lebesgue. Caracterização de funções integráveis a Riemann. Consequências. Relação medida da fronteira versus integrabilidade
- 1.4. Propriedades da integral de Riemann.
- 1.5. Teorema fundamental do Cálculo, mudança de variável e integração por partes.
- 1.6. Derivação sob o sinal de integração.
- 1.7. Integrais impróprias.

Unidade 2. Integral de Lebesgue

- 2.1. Medida exterior de Lebesgue no  $\mathbb{R}^n$ .
- 2.2. Conjuntos mensuráveis e funções mensuráveis. Propriedades.
- 2.3. Medidas. A medida de Lebesgue no  $\mathbb{R}^n$ .
- 2.4. Conjuntos de medida nula. Conjunto de Cantor.
- 2.5. Conjunto Generalizado de Cantor.
- 2.6. Conjuntos borelianos.
- 2.7. Existência de conjuntos não mensuráveis. Teorema de Vitali. Existência de funções não mensuráveis.
- 2.8. Outras caracterizações de conjuntos mensuráveis. Teorema de Carathéodory.
- 2.9. Funções simples. Integral de Lebesgue de funções simples.
- 2.10. Integral de Lebesgue de funções mensuráveis positivas.
- 2.11. Teorema de Egoroff. Lema de Fitou. Teorema da convergência monótona.
- 2.12. Integral de Lebesgue de funções mensuráveis.
- 2.13. Propriedades da integral de Lebesgue.
- 2.14. Teorema da convergência dominada de Lebesgue.
- 2.15. Comparação entre integrais de Lebesgue e Riemann.

2.16. Teorema de Fubini.

2.17. Espaço  $L^p$ .

### VIII. Metodologia de ensino e desenvolvimento do programa

Serão disponibilizadas vídeo-aulas do conteúdo, além de videoconferências semanais (uma videoconferência (síncrona) por semana, no horário da aula) para sanar dúvidas, resolver exercícios, ou ainda expor conteúdo, em menor quantidade. Além disso, serão aplicadas listas de exercícios (menores) semanais, sobre o conteúdo relativo aquela semana. Além disso será aplicado mais 3 listas de exercícios maiores. As vídeo-aulas serão disponibilizadas na semana anterior à qual se aplicam.

A frequência será aferida pela presença nas vídeo-conferências.

### IX. Metodologia de avaliação

O aluno será avaliado através de 3 avaliações (assíncronas) parciais que serão aplicadas via moodle em datas a ser decididas durante o semestre (e que deverão ser entregues pelo moodle). Será calculada a média aritmética das notas obtidas nas avaliações e será considerado aprovado o aluno que tiver, além de frequência suficiente, média maior ou igual a 6,0.

### X. Avaliação final

De acordo com o parágrafo 2 do artigo 70 da Resolução 17/Cun/97, o aluno com frequência suficiente e média das avaliações do semestre de 3,0 a 5,5 terá direito a uma nova avaliação assíncrona, no final do semestre, abordando todo o conteúdo programático. A nota final desse aluno será calculada através da média aritmética entre a média das avaliações anteriores e a nota da nova avaliação.

### XI. Cronograma teórico

O cronograma inicial segue abaixo. No que segue abaixo, a.b significa a seção a.b do plano de ensino.

Semana 1: 1.1; Semana 2: 1.2 e 1.3; Semana 3: 1.4 e 1.5; Semana 4: 1.6 e 1.7; Semana 5: 2.1 e 2.2; Semana 6: 2.3; Semana 7: 2.4 e 2.5; Semana 8: 2.6 e 2.7; Semana 9: 2.8 e 2.9; Semana 10: 2.10 e 2.11; Semana 11: 2.12; Semana 12: 2.13; Semana 13: 2.14; Semana 14: 2.15; Semana 15: 2.16; Semana 16: 2.17.

### XII. Cronograma prático

Não se aplica.

### XIII. Bibliografia básica

1. LIMA, E. – Curso de Análise, Volume 2, 12ª edição, Projeto Euclides, EMPA, Rio de Janeiro.
2. RUDIN, W. – Princípios de Análise Matemática; Ao Livro Técnico e Editora Universidade de Brasília; 1971.
3. BARTLE, R. G. – Elementos de Análise Real, Rio de Janeiro. Editora Campus, 1983.
4. Introdução à teoria da medida e integral de Lebesgue, Marco. A. P. Cabral, UFRJ, 2016. <https://www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros/livro-medida/medida-a4.pdf>
5. Integral de Lebesgue no  $\mathbb{R}^n$ , *Hemerson Monteiro, UFSC*. <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96602>
6. Integração de funções reais de várias variáveis. D. Royer, UFSC. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96810>
7. Integral de Riemann no  $\mathbb{R}^n$ , *Luiz Carlos Leal Junior UFSC* <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96577>

### XIV. Bibliografia complementar

1. ISNARD, C. – Introdução à medida e integração. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009. 314 p. (Projeto Euclides)
2. MARSDEP, J. e HOFFMAN, M. – Elementary Classical Analysis, Second edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1993
3. RANA, K. – An Introduction to Measure and Integration, Second edition, AMS, Graduate Studies in Mathematics, Volume 45, Providence, 2002.
4. ROYDEN, H.L. e FITZPATRICK, P.M. – Real Analysis, Fourth edition, Pearson, 2010.
5. BARTLE, R.G. – The Elements of Integration and Lebesgue Measure, John Wiley & Sons Inc., Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

Florianópolis, 10 de maio de 2021.

---

Professor Danilo Royer  
Coordenador da disciplina