

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Matemática
Plano de Ensino - Medida e Integração - 2021-1

1 Identificação da disciplina

1.1 Código

MTM 3441 - MTM410027

1.2 Nome da Disciplina

Medida e Integração

1.3 Horas aula

6 h semanais teóricas

1.4 Horas aula semestrais

108 h

2 Professor Ministrante

Fabio Silva Botelho

3 Pré-requisitos

Não há

4 Cursos para os quais é oferecida

Mestrado e Doutorado em Matemática, Bacharelado em Matemática

5 Ementa

Funções mensuráveis, medidas, integral, funções integráveis, espaços L^p , formas de convergência, decomposição de medidas, geração de medidas, medidas produto, medida de Lebesgue.

6 Objetivos

1. Proporcionar ao estudante o entendimento da necessidade da integral de Lebesgue e suas diferenças em relação à integral de Riemann.
2. Proporcionar ao estudante o entendimento de conceitos básicos em medida e integração, tais como conjuntos e funções mensuráveis, o teorema de Lebesgue de convergência monótona, o teorema de Lebesgue de convergência dominada e o lema de Fatou.
3. Proporcionar ao estudante o entendimento do conceito de integral de Lebesgue e suas propriedades.
4. Proporcionar ao estudante o entendimento de outros tópicos mais avançados de medida e integração tais como o teorema de Radon-Nykodym, teorema da decomposição de Hahn para medidas com sinal, teorema da decomposição de Lebesgue, teorema da representação de Riesz e outros.

7 Conteúdo Programático

1. Funções Mensuráveis (Capítulo 2 do Livro 1)
 - (a) Funções mensuráveis
 - (b) Funções complexas
 - (c) Funções entre espaços mensuráveis
2. Medidas (Capítulo 3 do Livro 1)
 - (a) Medidas
 - (b) Espaços mensuráveis
 - (c) Medidas com sinal
3. Integral (Capítulo 4 do Livro 1)
 - (a) Funções simples e suas integrais
 - (b) A integral de uma função não-negativa com imagem na reta real estendida.
 - (c) Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue
 - (d) Lema de Fatou

- (e) Propriedades da Integral
4. Funções Integráveis (Capítulo 5 do Livro 1)
- (a) Funções reais integráveis
 - (b) Linearidade da integral
 - (c) Teorema de Lebesgue da Convergência Dominada
 - (d) Integrandos que dependem de um parâmetro
5. Os Espaços L^p de Lebesgue (Capítulo 6 do Livro 1)
- (a) Espaços normados
 - (b) Os espaços L^p
 - (c) Desigualdade de Hölder
 - (d) Desigualdade de Minkowski
 - (e) Completude dos espaços L^p
 - (f) Espaços L^∞
6. Modos de Convergência (Capítulo 7 do Livro 1)
- (a) Convergência uniforme
 - (b) Convergência em quase todo o domínio (almost everywhere)
 - (c) Convergência em medida
 - (d) Convergência quase uniforme
 - (e) Teorema de Egorov
 - (f) Teorema de convergência de Vitali
7. Medidas com sinal (Parte do Capítulo 7 do Livro 2)
- (a) Medidas com sinal, definições
 - (b) Conjuntos positivos, negativos e nulos.
 - (c) A decomposição de Hahn
 - (d) Medidas mutuamente singulares
 - (e) Decomposição de Jordan
8. Teorema de Radon Nikodym (Parte do Capítulo 7 do Livro 2)
- (a) Medidas absolutamente contínuas
 - (b) Teorema de Radon-Nikodym
 - (c) Teorema da decomposição de Lebesgue

9. Medida exterior e mensurabilidade (Parte do Capítulo 7 do Livro 2)
 - (a) Medida exterior
 - (b) Conjuntos mensuráveis em relação à medida exterior
 - (c) Teorema de extensão de Carathéodory
10. Medidas produto (Parte do Capítulo 7 do Livro)
 - (a) Medidas produto, definições
 - (b) Teoremas de Fubini e Tonelli
11. A Medida de Lebesgue no \mathbb{R}^n (Capítulo 8 do Livro 2)
 - (a) Medida exterior
 - (b) A medida de Lebesgue
 - (c) Aproximações interiores e exteriores de conjuntos mensuráveis à Lebesgue
 - (d) Propriedades dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue
 - (e) Funções mensuráveis à Lebesgue
 - (f) Teorema de Egorov no \mathbb{R}^n
12. Outros tópicos em Medida e Integração (Capítulo 9 do Livro 2)
 - (a) Lema de Uryshon
 - (b) Partições da unidade
 - (c) Teorema de representação de Riesz do espaço dual ao espaço $C_c(V)$
 - (d) Pontos de Lebesgue

8 Metodologia de Ensino

As atividades pedagógicas não presenciais serão realizadas mediante aulas síncronas e assíncronas a serem disponibilizadas aos estudantes ficando a critério do professor ministrante a distribuição dos percentuais de atividades síncronas e assíncronas.

As aulas síncronas serão apresentadas mediante à plataforma google meets. Os links das aulas serão enviados pelo Moodle com pelo menos 30 min de antecedência.

O horário de atendimento poderá ser agendado por e-mail e/ou moodle em um dia e horário reservado a ser fixado na semana.

9 Avaliação

Haverá 3 avaliações escritas cujas datas serão anunciadas com pelo menos duas semanas de antecedência. O aluno do Bacharelado que obtiver média aritmética 6.0 em relação às 3 provas estará aprovado. Para o mestrado e doutorado, a média mínima para aprovação é 7.0. De acordo com o parágrafo 2º do artigo 70 da Resolução 17/Cun/97, o aluno com frequência suficiente e média das avaliações do semestre de 3,0 a 5,5 terá direito a uma nova avaliação, no final do semestre, abordando todo o conteúdo programático. A nota final desse aluno será calculada mediante à média aritmética entre a média das avaliações anteriores e a nota da nova avaliação.

10 Bibliografia

1. Bartle, R.G., The elements of integration and Lebesgue measure, John-Wiley and Sons, New York, 1995.
2. Botelho, F.S., Functional Analysis, Calculus of Variations and Numerical Methods for Models in Physics and Engineering, CRC Taylor and Francis, New York, 2020.
3. Royden, H.L., Real Analysis, New York, Macmillan, 1963.

Fabio Silva Botelho, 25 de Maio de 2021.