

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

---

A comissão designada pela portaria nº. 011/MTM/2018, composta pelos membros Jáuber Cavalcante de Oliveira, Danilo Royer, Ivan Pontual Costa e Silva, sugere o seguinte conteúdo programático para a disciplina MTM3441 - Medida e Integração, 108 h/aula.

---

**Disciplina: MTM3441 - Medida e Integração**

**Nº total de horas/aula: 108**

**Nº de horas/aula semanais: 6**

**Pré-requisito: MTM3432 - Análise II**

---

**EMENTA:** Funções mensuráveis, medidas, integral, funções integráveis, espaços  $L_p$ , formas de convergência, decomposição de medidas, geração de medidas, medidas produto, medida de Lebesgue.

**OBJETIVOS:**

Ao término do curso Medida e Integração o aluno deve dominar o conceito de medida, integral e suas aplicações.

**CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:**

Parte I: Elementos de Integração

1. Introdução - Cap. 1 do livro texto:

1.1 Razões para o desenvolvimento da integral de Lebesgue.

1.2 Comparação com a integral de Riemann.

1.3 Números reais estendidos.

2. Funções mensuráveis - Cap. 2 do livro texto:

2.1 Funções e conjuntos mensuráveis.

2.2 Funções complexas.

2.3 Funções entre espaços mensuráveis.

3. Medidas - Cap. 3 do livro texto:

3.1 Medidas.

3.2 Espaços de medida.

4. Volumes de blocos e intervalos - Cap. 11 do livro texto:

4.1 Intervalos, blocos em  $\mathbb{R}^n$ , volume  $n$ -dimensional, invariância por translação.

5. Medida exterior - Cap. 12 do livro texto:

5.1A medida exterior em  $\mathbb{R}^n$ , propriedades da medida exterior, invariância por translação.

6. Conjuntos mensuráveis - Cap. 13 do livro texto:

6.1  $\sigma$ -álgebras, medida em uma  $\sigma$ -álgebra.

6.2 A condição de Carathéodory, teorema de Carathéodory.

6.3 Conjuntos de Lebesgue, medida de Lebesgue, unicidade da medida de Lebesgue, algumas propriedades.

7. A integral - Cap. 4 do livro texto:

- 7.1 Funções simples e suas integrais.
  - 7.2 A integral de uma função mensurável real estendida não negativa.
  - 7.3 O Teorema da Convergência Monótona.
  - 7.4 Lema de Fatou.
  - 7.5 Propriedades da integral.
  - 8. Funções integráveis - Cap. 5 do livro texto:
    - 8.1 Funções reais integráveis.
    - 8.2 Positividade e linearidade da integral.
    - 8.3 O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.
    - 8.4 Integrandos que dependem de um parâmetro.
  - 9. Os Espaços de Lebesgue  $L_p$  - Cap. 6 do livro texto:
    - 9.1 Espaços lineares normados.
    - 9.2 Os espaços  $L_p$ .
    - 9.3 Desigualdades de Hölder e Minkowski.
    - 9.4 O Teorema do Completamento.
    - 9.5 O espaço  $L_\infty$
  - 10. Formas de Convergência - Cap. 7 do livro texto:
    - 10.1 Relação entre: convergências em  $L_p$ , convergência uniforme, convergência quase sempre, convergência em medida, convergência quase uniforme
    - 10.2 Teorema de Egoroff.
    - 10.3 Teorema da convergência de Vitali.
  - 11. Decomposição de medidas - Cap. 8 do livro texto:
    - 11.1 Teoremas da decomposição de Hahn e Jordan.
    - 11.2 Teorema de Radon-Nikodym.
    - 11.3 Teorema da decomposição de Lebesgue.
    - 11.4 Teorema da Representação de Riesz para  $L_p$ .
  - 12. Geração de Medidas - Cap. 9 do livro texto:
    - 12.1 Medidas em álgebras de conjuntos.
    - 12.2 A extensão de medidas, teoremas de extensão de Hahn e Carathéodory.
    - 12.3 A medida de Lebesgue.
    - 12.4 O teorema da representação de Riesz para  $C([a,b])$ .
  - 13. Medidas produto - Cap. 10 do livro texto:
    - 13.1 Retângulos, o Teorema da Medida Produto.
    - 13.2 Teorema de Tonelli e Fubini.
    - 13.3 Teorema de Mudança de Variáveis (opcional; havendo tempo)
- Parte II: Elementos da Medida de Lebesgue
- 14. Exemplos de conjuntos mensuráveis - Cap. 14 do livro texto:
    - 14.1 Conjunto de Borel.
    - 14.2 Conjunto nulo.
    - 14.3 Invariância por translação.
    - 14.4 Existência de conjuntos que não são de Borel.
  - 15. Aproximação de conjuntos mensuráveis - Cap. 15 do livro texto:
    - Aproximação por conjuntos abertos, por conjuntos fechados, por conjuntos compactos, por blocos.

## **BIBLIOGRAFIA BÁSICA**

Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, 1995.


## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. de Barra, G., *Measure Theory and Integration*, Woodhead Publishing, 2003.
2. Folland, G. B., *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 1999.
3. Isnard, C., *Introdução à medida e integração*, IMPA, 2007.
4. Kubrusly, C., *Measure Theory. A First Course*, Elsevier, 2007.
5. Lerner, N., *A Course on Integration Theory*, Birkhauser, 2014.
6. Royden, H. L., *Real Analysis*, New York: Macmillan, 1963.
7. Taylor, A. E., *General Theory of Functions and Integration*, Dover, 1965.
8. Taylor, M. E., *Measure Theory and Integration*, American Mathematical Society, 2006.
9. Yeh, J. *Real Analysis. Theory of Measure and Integration*, World Scientific Publishing, 2006.

Florianópolis, 10 de junho de 2018.

  
Jáuber Cavalcante de Oliveira

  
Danilo Royer

  
Ivan Pontual Costa e Silva