Métodos do tipo Newton Inexato para Problemas Inversos

Fábio J. Margotti

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, setembro de 2011

Sumário

Sumário

Problemas Inversos Mal Postos

Sejam X e Y espaços de Hilbert e $F : D(F) \longrightarrow Y$ uma função com $D(F) \subset X$ aberto. Considere a equação

$$F(x) = y, \tag{1}$$

O **problema direto** associado a equação (1) consiste em encontrar o vetor $y \in Y$, supondo-se conhecido o vetor $x \in D(F)$ e a função F.
O **problema inverso** associado a essa equação consiste na determinação de algum vetor $x \in D(F)$ (caso exista), conhecendo-se o vetor $y \in Y$ e a função F.

Problemas Inversos Mal Postos

Sejam X e Y espaços de Hilbert e $F : D(F) \longrightarrow Y$ uma função com $D(F) \subset X$ aberto. Considere a equação

$$F(x) = y, \tag{1}$$

O **problema direto** associado a equação (1) consiste em encontrar o vetor $y \in Y$, supondo-se conhecido o vetor $x \in D(F)$ e a função F.
O **problema inverso** associado a essa equação consiste na determinação de algum vetor $x \in D(F)$ (caso exista), conhecendo-se o vetor $y \in Y$ e a função F.

Problemas Inversos Mal Postos

Definição

O problema inverso (1) *é* ***bem posto*** *(no sentido de Hadamard) se*
(i) *(sobrejetividade): Para todo* $y \in Y$, *existe pelo menos um* $x \in D(F)$ *tal que a igualdade* (1) *é verificada;*
(ii) *(injetividade): Para todo* $y \in Y$, *existe no máximo um* $x \in D(F)$ *tal que a igualdade* (1) *é verificada;*
(iii) *(estabilidade): Para toda sequência* $(x_k) \subset D(F)$ *com* $F(x_k) \longrightarrow y$, *temos que* $x_k \longrightarrow x$.
Um problema inverso é ***mal posto*** *se ele não for bem posto.*

Portanto, o problema inverso (1) é bem posto se F é inversível e sua inversa é sequencialmente contínua.

Sumário

Resolução de Problemas Inversos

Suponha que o problema inverso (1) seja mal posto e suponha que para cada $y \in Y$ fixado, existe um $\rho > 0$ de tal modo que

$$F\left(x^{+}\right) = y$$

seja a única solução de (1) na bola $B_{\rho}\left(x^{+}\right) \subset D\left(F\right)$ de centro em x^{+} e raio ρ.

Objetivo: Dado o nível de ruídos $\delta > 0$ e o vetor contaminado por ruídos $y^{\delta} \in Y$ satisfazendo

$$\left|\left|y - y^{\delta}\right|\right| \leq \delta,$$

encontre $x_{\delta} \in D\left(F\right)$ tal que a **propriedade de regularização**

$$x_{\delta} \longrightarrow x^{+} \text{ quando } \delta \longrightarrow 0, \tag{2}$$

seja satisfeita.

Resolução de Problemas Inversos

Suponha que o problema inverso (1) seja mal posto e suponha que para cada $y \in Y$ fixado, existe um $\rho > 0$ de tal modo que

$$F\left(x^{+}\right) = y$$

seja a única solução de (1) na bola $B_\rho\left(x^{+}\right) \subset D\left(F\right)$ de centro em x^{+} e raio ρ.
Objetivo: Dado o nível de ruídos $\delta > 0$ e o vetor contaminado por ruídos $y^\delta \in Y$ satisfazendo

$$\left|\left|y - y^\delta\right|\right| \leq \delta,$$

encontre $x_\delta \in D\left(F\right)$ tal que a **propriedade de regularização**

$$x_\delta \longrightarrow x^{+} \text{ quando } \delta \longrightarrow 0, \tag{2}$$

seja satisfeita.

Sumário

Método de Newton (Dados sem ruídos)

Aplicando o método de Newton à equação $y - F(x) = 0$ obtemos

Algoritmo (Newton)

Dados(x_0, F, y)
Para $n = 0, 1, 2, ...$
  Calcule $s_n \in X$ *tal que* $A_n s_n = b_n$;
  $x_{n+1} := x_n + s_n$;
  $n = n + 1$;
Até que algum critério de parada seja atingido

Utilizamos: $A_n := F'(x_n)$ e $b_n := y - F(x_n)$.

REGINN

O $n-$ésimo passo de Newton é determinado resolvendo-se a equação

$$A_n s_n = b_n.$$

Para determinar o $n-$ésimo passo do REGINN, deve-se resolver

$$A_n s_n = b_n^\delta + r_n,$$

onde $\frac{||r_n||}{||b_n^\delta||} < \mu_n \leq 1$. Ou seja,

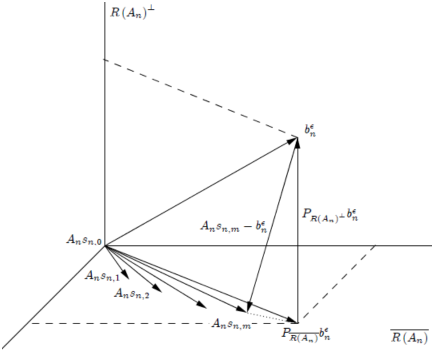
$$\left|\left|A_n s_n - b_n^\delta\right|\right| < \mu_n \left|\left|b_n^\delta\right|\right|$$

REGINN

$$b_n^\delta \notin R(A_n)^\perp \Longrightarrow \left\| P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta \right\| < \left\| b_n^\delta \right\|$$

Se $A_n s_{n,m} \longrightarrow P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta$ quando $m \longrightarrow \infty$, então

$$\left\| A_n s_{n,m} - b_n^\delta \right\| \longrightarrow \left\| P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta - b_n^\delta \right\| = \left\| P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta \right\| < \left\| b_n^\delta \right\|.$$



REGINN

Teremos para algum $m = m_n$ suficientemente grande e μ_n suficientemente próximo de 1 que $\left|\left|A_n s_{n,m_n} - b_n^\delta\right|\right| < \mu_n \left|\left|b_n^\delta\right|\right|$.
s_{n,m_n} aproxima s_n na equação $A_n s_n = b_n$.

Algoritmo (REGINN)

Dados $\left(x_0^\delta; F, y^\delta; \tau; \delta, (\mu_n)\right)$
Para $n = 0, 1, 2...$
  $s_{n,0} := 0$;
  Para $m = 0, 1, 2, ...$
    compute $s_{n,m}$ *tal que* $A_n s_{n,m} \longrightarrow P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta$;
  Até que $\left|\left|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\right|\right| < \mu_n \left|\left|b_n^\delta\right|\right|$
  $x_{n+1}^\delta := x_n^\delta + s_{n,m}$;
Até que $\left|\left|b_n^\delta\right|\right| \leq \tau\delta$

Sumário

REGINN (Análise de Convergência)

Suponha que $(s_{n,m})_m$ satisfaz

- $\langle A_n s_{n,m}; b_n^\delta \rangle > 0, \forall m \geq 1$ se $A_n^* b_n^\delta \neq 0$;
- $\lim\limits_{m \to \infty} A_n s_{n,m} = P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta$;
- $||A_n s_{n,m}|| \leq \Theta \left|\left|b_n^\delta\right|\right|, \forall m, n \in \mathbb{N}$ e algum $\Theta \geq 1$.

Assuma que existem constantes $L, \varrho \in [0, 1)$ tais que

- $||E(v, w)|| \leq L \, ||F'(w)(v - w)||$, onde $E(v, w) := F(v) - F(w) - F'(w)(v - w)$;
- $\left|\left|P_{R(F'(u))^\perp}(F(x^+) - F(u))\right|\right| \leq \varrho \, ||F(x^+) - F(u)||$.

REGINN (Análise de Convergência)

Suponha que $(s_{n,m})_m$ satisfaz

- $\langle A_n s_{n,m}; b_n^\delta \rangle > 0$, $\forall m \geq 1$ se $A_n^* b_n^\delta \neq 0$;
- $\lim\limits_{m\to\infty} A_n s_{n,m} = P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta$;
- $||A_n s_{n,m}|| \leq \Theta \left|\left| b_n^\delta \right|\right|$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ e algum $\Theta \geq 1$.

Assuma que existem constantes $L, \varrho \in [0, 1)$ tais que

- $||E(v, w)|| \leq L \, ||F'(w)(v - w)||$, onde $E(v, w) := F(v) - F(w) - F'(w)(v - w)$;
- $\left|\left| P_{R(F'(u))^\perp} (F(x^+) - F(u)) \right|\right| \leq \varrho \, ||F(x^+) - F(u)||$.

REGINN (Análise de Convergência)

Se assumirmos que existe $\Lambda < 1$ tal que $\Theta L + \varrho < \Lambda$, definindo

$$\tau > \frac{1+\varrho}{\Lambda - \Theta L - \varrho} \text{ e}$$
$$\mu_{\min} := \frac{(1+\varrho)\,\delta}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|} + \varrho,$$

então tomando $\mu_n \in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$, podemos provar que:

- O REGINN está bem definido e termina;
- Todas as iterações se mantém numa bola;
- Os resíduos decrescem linearmente segundo a taxa $\frac{\left|\left|b_{n+1}^\delta\right|\right|}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|} \leq \Lambda < 1.$

REGINN (Análise de Convergência)

Se assumirmos que existe $\Lambda < 1$ tal que $\Theta L + \varrho < \Lambda$, definindo

$$\begin{aligned} \tau &> \frac{1+\varrho}{\Lambda - \Theta L - \varrho} \quad \text{e} \\ \mu_{\min} &:= \frac{(1+\varrho)\,\delta}{\left\|b_n^\delta\right\|} + \varrho, \end{aligned}$$

então tomando $\mu_n \in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$, podemos provar que:

- O REGINN está bem definido e termina;
- Todas as iterações se mantém numa bola;
- Os resíduos decrescem linearmente segundo a taxa $\frac{\left\|b_{n+1}^\delta\right\|}{\left\|b_n^\delta\right\|} \leq \Lambda < 1$.

REGINN (Análise de Convergência)

Se assumirmos que existe $\Lambda < 1$ tal que $\Theta L + \varrho < \Lambda$, definindo

$$\begin{aligned} \tau &> \frac{1+\varrho}{\Lambda - \Theta L - \varrho} \text{ e} \\ \mu_{\min} &:= \frac{(1+\varrho)\,\delta}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|} + \varrho, \end{aligned}$$

então tomando $\mu_n \in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$, podemos provar que:

- O REGINN está bem definido e termina;
- Todas as iterações se mantém numa bola;
- Os resíduos decrescem linearmente segundo a taxa $\frac{\left|\left|b_{n+1}^\delta\right|\right|}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|} \leq \Lambda < 1.$

REGINN (Análise de Convergência)

Se assumirmos que existe $\Lambda < 1$ tal que $\Theta L + \varrho < \Lambda$, definindo

$$\begin{aligned} \tau &> \frac{1+\varrho}{\Lambda - \Theta L - \varrho} \text{ e} \\ \mu_{\min} &:= \frac{(1+\varrho)\,\delta}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|} + \varrho, \end{aligned}$$

então tomando $\mu_n \in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$, podemos provar que:

- O REGINN está bem definido e termina;
- Todas as iterações se mantém numa bola;
- Os resíduos decrescem linearmente segundo a taxa $\frac{\left|\left|b_{n+1}^\delta\right|\right|}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|} \leq \Lambda < 1$.

REGINN (Análise de Convergência)

Suponha que

- $s_{n,0} := 0$ e $s_{n,m} = s_{n,m-1} + A_n^* v_{n,m-1}$ com $v_{n,m-1} \in Y$;
- Existe $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e monotonamente crescente com $t \leq \Psi(t)$, $t \in [0,1]$ tal que se $\beta_n := \frac{\left\|A_n e_n - b_n^\delta\right\|}{\left\|b_n^\delta\right\|} < 1$ então

$$\left\|s_{n,m} - e_n\right\|^2 - \left\|s_{n,m-1} - e_n\right\|^2 < C_M \left\|b_n^\delta\right\| \cdot \left\|v_{n,m-1}\right\| z_{n,m},$$

onde $e_n := x^+ - x_n^\delta$ e $z_{n,m} := \Psi(\beta_n) - \frac{\left\|A_n s_{n,m-1} - b_n^\delta\right\|}{\left\|b_n^\delta\right\|}$;

- $\lim_{\delta \to 0} s_{n,m}^\delta = s_{n,m}$, para cada $m \leq m_n$ fixado.

REGINN (Análise de Convergência)

Suponha que

- $s_{n,0} := 0$ e $s_{n,m} = s_{n,m-1} + A_n^* v_{n,m-1}$ com $v_{n,m-1} \in Y$;
- Existe $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e monotonamente crescente com $t \leq \Psi(t)$, $t \in [0,1]$ tal que se $\beta_n := \frac{\left\|A_n e_n - b_n^\delta\right\|}{\left\|b_n^\delta\right\|} < 1$ então

$$\left\|s_{n,m} - e_n\right\|^2 - \left\|s_{n,m-1} - e_n\right\|^2 < C_M \left\|b_n^\delta\right\| . \left\|v_{n,m-1}\right\| z_{n,m},$$

onde $e_n := x^+ - x_n^\delta$ e $z_{n,m} := \Psi(\beta_n) - \frac{\left\|A_n s_{n,m-1} - b_n^\delta\right\|}{\left\|b_n^\delta\right\|}$;

- $\lim\limits_{\delta \to 0} s_{n,m}^\delta = s_{n,m}$, para cada $m \leq m_n$ fixado.

REGINN (Análise de Convergência)

Suponha que

- $s_{n,0} := 0$ e $s_{n,m} = s_{n,m-1} + A_n^* v_{n,m-1}$ com $v_{n,m-1} \in Y$;
- Existe $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e monotonamente crescente com $t \leq \Psi(t)$, $t \in [0,1]$ tal que se $\beta_n := \frac{\left|\left|A_n e_n - b_n^\delta\right|\right|}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|} < 1$ então

$$\left|\left|s_{n,m} - e_n\right|\right|^2 - \left|\left|s_{n,m-1} - e_n\right|\right|^2 < C_M \left|\left|b_n^\delta\right|\right| . \left|\left|v_{n,m-1}\right|\right| z_{n,m},$$

  onde $e_n := x^+ - x_n^\delta$ e $z_{n,m} := \Psi(\beta_n) - \frac{\left|\left|A_n s_{n,m-1} - b_n^\delta\right|\right|}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|}$;
- $\lim\limits_{\delta \to 0} s_{n,m}^\delta = s_{n,m}$, para cada $m \leq m_n$ fixado.

REGINN (Análise de Convergência)

Então é possível provar que:

- O erro é monotonamente decrescente, isto é, $\left|\left|x^+ - x_n^\delta\right|\right| < \left|\left|x^+ - x_{n-1}^\delta\right|\right|$;
- tomando $\mu_n \in \left[\underline{\mu}; \Lambda - \Theta L\right)$ com $\underline{\mu} > \mu_{\min}$, prova-se que

$$x_{N(\delta)} \longrightarrow x^+, \ \delta \longrightarrow 0.$$

REGINN (Análise de Convergência)

Então é possível provar que:

- O erro é monotonamente decrescente, isto é, $\left|\left|x^+ - x_n^\delta\right|\right| < \left|\left|x^+ - x_{n-1}^\delta\right|\right|$;
- tomando $\mu_n \in \left[\underline{\mu}; \Lambda - \Theta L\right)$ com $\underline{\mu} > \mu_{\min}$, prova-se que

$$x_{N(\delta)} \longrightarrow x^+, \ \delta \longrightarrow 0.$$

REGINN (Análise de Convergência)

Uma maneira de definir $(s_{n,m})_m$ é $s_{n,m} := g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta$, com $g_m : \left[0, ||A_n||^2\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes satisfazendo

$$|t g_m(t)| \leq C_g,$$
$$g_m(t) \longrightarrow \frac{1}{t} \text{ pontualmente para todo } t > 0.$$

Algumas possíveis escolhas de g_m são:

- Tikhonov:

$$g_m(t) := \frac{1}{t + \gamma_m}, \gamma_m > 0 \text{ e } \gamma_m \longrightarrow 0 \text{ quando } m \longrightarrow \infty$$

REGINN (Análise de Convergência)

Uma maneira de definir $(s_{n,m})_m$ é $s_{n,m} := g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta$, com $g_m : \left[0, ||A_n||^2\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes satisfazendo

$$|t g_m(t)| \leq C_g,$$
$$g_m(t) \longrightarrow \tfrac{1}{t} \text{ pontualmente para todo } t > 0.$$

Algumas possíveis escolhas de g_m são:

- Tikhonov:

$$g_m(t) := \frac{1}{t + \gamma_m}, \gamma_m > 0 \text{ e } \gamma_m \longrightarrow 0 \text{ quando } m \longrightarrow \infty$$

REGINN (Análise de Convergência)

- Decomposição em Valores Singulares Truncada:

$$g_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{se } t \geq \frac{1}{m} \\ 0, & \text{se } t < \frac{1}{m} \end{cases}$$

- Landweber:

$$g_m(t) := \sum_{j=0}^{m-1} (1-t)^j \,, \text{ com } ||A_n|| \leq 1.$$

Também podemos usar o método da máxima descida ou do gradiente conjugado, entre outros.

REGINN (Análise de Convergência)

- Decomposição em Valores Singulares Truncada:

$$g_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{se } t \geq \frac{1}{m} \\ 0, & \text{se } t < \frac{1}{m} \end{cases}$$

- Landweber:

$$g_m(t) := \sum_{j=0}^{m-1} (1-t)^j \, , \text{ com } ||A_n|| \leq 1 .$$

Também podemos usar o método da máxima descida ou do gradiente conjugado, entre outros.

REGINN (Análise de Convergência)

- Decomposição em Valores Singulares Truncada:

$$g_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{se } t \geq \frac{1}{m} \\ 0, & \text{se } t < \frac{1}{m} \end{cases}$$

- Landweber:

$$g_m(t) := \sum_{j=0}^{m-1} (1-t)^j \,, \text{ com } ||A_n|| \leq 1 .$$

Também podemos usar o método da máxima descida ou do gradiente conjugado, entre outros.

Sumário

REGINN (Taxas de Convergência)

Restrinja a iteração interna do REGINN para $s_{n,m} := g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta$, com $g_m : J \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes satisfazendo

$$\begin{aligned} (a)\ & \sup_{t \in J} |g_m(t)| \leq C_g m^{\alpha}; \\ (b)\ & \sup_{t \in J} |t p_m(t)| \leq C_p m^{-\alpha}; \\ (c)\ & \sup_{t \in J} |p_m(t)| = 1. \end{aligned}$$

com $J := \left[0, ||A_n||^2\right]$, $\alpha > 0$ e $p_m(t) := 1 - t g_m(t)$.

REGINN (Taxas de Convergência)

Assuma as condições sobre a não linearidade de F

$$\begin{array}{cc} (A) & \|F'(v)\| \leq 1, \forall v \in D(F), \\ (B) & \begin{array}{c} F'(v) = Q(v,w)\,F'(w) \text{ e} \\ \|I - Q(v,w)\| \leq C_Q \|v - w\| \end{array} \end{array},$$

para todo $v, w \in B_\rho(x^+)$, para algum $\rho > 0$, onde $Q : X \times X \longrightarrow B(Y, Y)$.

REGINN (Taxas de Convergência)

Com as hipóteses acima, é possível provar que existe um número positivo $\lambda_{\min} < 1$ tal que a condição de fonte do tipo Hölder

$$x^+ - x_0 \in R\left((A^*A)^{\frac{\lambda}{2}}\right) \text{ para } \lambda \in (\lambda_{\min}, 1]\,,$$

implica na taxa de convergência

$$\left|\left|x_{N(\delta)} - x^+\right|\right| = O\left(\delta^{\frac{\lambda - \lambda_{\min}}{1+\lambda}}\right), \delta \longrightarrow 0.$$

Sumário

Sumário

O Problema Inverso

O algoritmo REGINN com a iteração interna de Landweber foi utilizado para identificar o parâmetro a na equação diferencial

$$\begin{cases} -\left(au'\right)' = f \text{ em } \Omega := (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Podemos definir a função

$$\begin{aligned} F : D(F) &\to L^2(\Omega) \\ a &\mapsto u_a \end{aligned}$$

onde
$D(F) := \left\{ a \in H^1(\Omega) : a(x) \geq \underline{a} \text{ quase sempre em } \Omega \right\} \subset L^2(\Omega)$
e u_a é a única solução de (3) .

O Problema Inverso

O algoritmo REGINN com a iteração interna de Landweber foi utilizado para identificar o parâmetro a na equação diferencial

$$\begin{cases} -(au')' = f \text{ em } \Omega := (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Podemos definir a função

$$\begin{aligned} F : D(F) &\to L^2(\Omega) \\ a &\mapsto u_a \end{aligned}$$

onde
$D(F) := \{a \in H^1(\Omega) : a(x) \geq \underline{a} \text{ quase sempre em } \Omega\} \subset L^2(\Omega)$
e u_a é a única solução de (3).

O Problema Inverso

Fixada uma função $f \in L^2(\Omega)$, gostaríamos de determinar no **problema direto**, a função $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ na equação

$$F(a) = u,$$

dada a função $a \in D(F)$.

No **problema inverso**, temos disponível a função $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e gostaríamos de determinar $a \in D(F)$ satisfazendo a equação acima.

Observação

O problema inverso é mal posto.

O Problema Inverso

Fixada uma função $f \in L^2(\Omega)$, gostaríamos de determinar no **problema direto**, a função $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ na equação

$$F(a) = u,$$

dada a função $a \in D(F)$.
No **problema inverso**, temos disponível a função $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e gostaríamos de determinar $a \in D(F)$ satisfazendo a equação acima.

Observação

O problema inverso é mal posto.

O Problema Inverso

- F é continuamente Fréchet diferenciável;
- A condição do cone tangencial

$$\left|\left|E\left(\tilde{a}, a\right)\right|\right|_{L^2} \leq \omega \left|\left|F\left(\tilde{a}\right) - F\left(a\right)\right|\right|_{L^2}$$

é satisfeita com $\omega < 1$ se $\tilde{a}$ e a estiverem suficientemente próximos.

Podemos tomar $\mu_n \in \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|}, 1\right]$ e $\tau \geq \frac{1+\omega}{1-\omega}$.

O Problema Inverso

- F é continuamente Fréchet diferenciável;
- A condição do cone tangencial

$$\left|\left|E\left(\tilde{a},a\right)\right|\right|_{L^2} \leq \omega \left|\left|F\left(\tilde{a}\right) - F\left(a\right)\right|\right|_{L^2}$$

é satisfeita com $\omega < 1$ se $\tilde{a}$ e a estiverem suficientemente próximos.

Podemos tomar $\mu_n \in \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|}, 1\right]$ e $\tau \geq \frac{1+\omega}{1-\omega}$.

O Problema Inverso

- F é continuamente Fréchet diferenciável;
- A condição do cone tangencial

$$\left|\left|E\left(\widetilde{a},a\right)\right|\right|_{L^2}\leq\omega\left|\left|F\left(\widetilde{a}\right)-F\left(a\right)\right|\right|_{L^2}$$

é satisfeita com $\omega<1$ se $\widetilde{a}$ e a estiverem suficientemente próximos.

Podemos tomar $\mu_n\in\left(\omega+\frac{(1+\omega)\delta}{\left|\left|b_n^\delta\right|\right|},1\right]$ e $\tau\geq\frac{1+\omega}{1-\omega}$.

Sumário

Descrição do Algoritmo

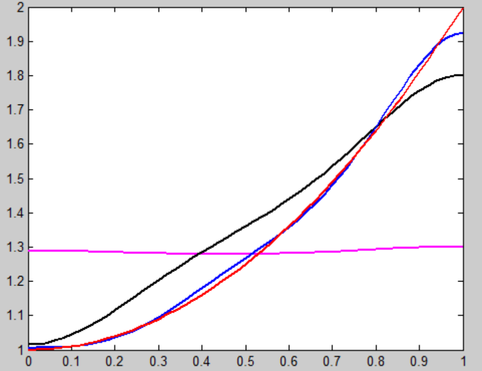
Algoritmo

$$
\begin{array}{l}
Dados\left(a_0^\delta;\delta;u^\delta;\omega;f\right)\\
\tau := \frac{1+\omega}{1-\omega};\\
Para\ n = 0,1,2,...\\
\qquad s_{n,m} := 0;\ Tome\ \mu_n \in \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{||b_n^\delta||},1\right];\\
\qquad Para\ m = 0,1,2,...\\
\qquad\qquad s_{n,m+1} := s_{n,m} - A_n^*\left(A_n s_{n,m} - b_n^\delta\right);\\
\qquad\qquad m := m+1;\\
\qquad At\acute{e}\ que\ ||A_n s_{n,m} - b_n^\delta|| < \mu_n ||b_n^\delta||\\
\qquad a_{n+1}^\delta := a_n^\delta + s_{n,m};\\
\qquad n := n+1;\\
At\acute{e}\ que\ ||b_n^\delta|| \leq \tau\delta
\end{array}
$$

Sumário

Resultados Numéricos

O programa foi testado utilizando-se as funções exatas $a^{+}(x) = 1 + x^2$ e $f(x) = -6x^2 + 2x - 2$, sendo que a solução de (3) nesse caso é dada por $u(x) = x^2 - x$.



Resultados Numéricos

Na primeira tabela, a_0 satisfaz a condição de fonte $a^+ - a_0 \in R\left((A^*A)^{\frac{1}{2}}\right)$ e na segunda temos $a_0 \equiv 1$, que não satisfaz essa condição. Em ambos os casos, $||a^+ - a_0||_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

δ	$N(\delta)$	I
10^{-1}	0	0
10^{-2}	11	156
10^{-3}	15	376
10^{-4}	22	8100
10^{-5}	29	89115
10^{-6}	36	713743

δ	$N(\delta)$	I
10^{-1}	0	0
10^{-2}	5	36
10^{-3}	17	7578
10^{-4}	26	130011
10^{-5}	35	8.10^6
10^{-6}	> 50	$> 10^8$

δ versus número total de iterações externas e internas

Sumário

Kaczmarz-Reginn

Considere o sistema de equações

$$F_i\left(x\right) = y_i^{\delta_i}, i = 1, ..., p.$$

Seja

$$\delta = \max_{1 \leq i \leq p} \left\{\delta_i\right\}.$$

Objetivo: Determinar $x_\delta \approx x^+$, onde

$$F_i\left(x^+\right) = y_i, \text{ com } \left\|y_i - y_i^{\delta_i}\right\| \leq \delta_i, i = 1, ..., p,$$

de modo que $x_\delta \longrightarrow x^+$ quando $\delta \longrightarrow 0$.

Sumário

Métodos tipo Kaczmarz

$$x_0 \xrightarrow{F_1(x)=y_1^{\delta_1}} x_1 \xrightarrow{F_2(x)=y_2^{\delta_2}} \dots \xrightarrow{F_p(x)=y_p^{\delta_p}} x_p \qquad \text{Ciclo } 1$$

$$x_p \xrightarrow{F_1(x)=y_1^{\delta_1}} x_{p+1} \xrightarrow{F_2(x)=y_2^{\delta_2}} \dots \xrightarrow{F_p(x)=y_p^{\delta_p}} x_{2p} \qquad \text{Ciclo } 2$$

$$\vdots$$

$$x_{(n-1)p} \xrightarrow{F_1(x)=y_1^{\delta_1}} x_{(n-1)p+1} \xrightarrow{F_2(x)=y_2^{\delta_2}} \dots \xrightarrow{F_p(x)=y_p^{\delta_p}} x_{np} \qquad \text{Ciclo } n$$

Sumário

Descrição do Algoritmo (K-Reginn)

Dados $\left(F_i, y_i^{\delta_i}, \delta_i, x_0, \tau, (\mu_n)\right)$

$n := 0;\ k := 0;\ i = 1;$

- Enquanto $k < p$
- $m := 0;\ s_{n,m} := 0;$
  - Se $\left\|F_i(x_n) - y_i^{\delta_i}\right\| < \tau\delta$
  - $k := k + 1;$
  - Senão
  - $m := m + 1;$ Calcule $s_{n,m};$
  - Até que $\left\|A_{i,n}s_{n,m} - b_n^{\delta_i}\right\| < \mu_n \left\|b_n^{\delta_i}\right\|$
  - $k := 0;$
- $i = p \Longrightarrow i = 1;$
- $i < p \Longrightarrow i = i + 1;$
- $x_{n+1} := x_n + s_{n,m};\ n := n + 1;$

Sumário

O Problema Inverso

$$\begin{cases} -\nabla\left(a\nabla u\right) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = U_i & \text{em } \Gamma_{1i} \quad , i = 1,2,3,4, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_{2i} \end{cases} \tag{4}$$

onde $\Omega := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

Problema direto: Dada a condutividade elétrica $a \in L_+^\infty(\Omega)$, encontre o operador DpN $\Lambda_a : H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ que a cada voltagem $U_i \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ associa a corrente elétrica resultante $-au_\nu|_{\partial\Omega}$, onde u é solução de (4).

Problema inverso: Dado o operador DpN Λ_a, determine a condutividade elétrica a.

Sumário

Resultados Numéricos

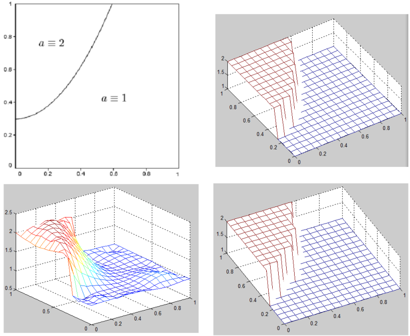
Comportamento das soluções encontradas com diversos percentuais de ruídos diferentes.
Iteração interna utilizando o método de Landweber.

$$a^{+}(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{se } y > 2x^2 + 0,3 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad a_0 \equiv 1,5 \text{ e } \tau = 2,5.$$

Ruídos (%)	Ciclos	Total It. Internas	$\left\|\left\|a_{N(\delta)} - a^{+}\right\|\right\|_{L^2(\Omega)}$
$4,0$	03	2.142	$0,121$
$2,0$	04	2.223	$0,112$
$1,0$	12	5.547	$0,093$
$0,5$	24	12.043	$0,074$

Resultados Numéricos

Figuras superiores: função a^+ a ser reconstruída;
Figuras inferiores: função $a_{N(\delta)}$ reconstruída usando 1% de ruídos (original à esquerda e ajustada à direita)



Referências Bibliográficas

- A. Lechleiter, A. Rieder. *Newton Regularizations for Impedance Tomography: a numerical study*. Inverse Problems 22 (2006), 1967-1987.
- A. Lechleiter, A. Rieder. *Towards a general convergence Theory of Inexact Newton Regularizations.*Numerische Mathematik 114 (2010), 521-548.
- A. Rieder. *On Convergence Rates of Inexact Newton Regularizations*. Numerische Mathematik 88 (2001), 347-365.
- A. Rieder. *On the regularization of nonlinear ill-posed problems via inexact Newton iterations*. Inverse Problems 15 (1999), 309-327.