

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS - DISCIPLINA MTM 5163: CÁLCULO C

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável e defina

$$\gamma(t) = f(e^{t^2}, \sin t).$$

(a) Calcule $\gamma'(t)$ em termos das derivadas parciais de f .

(b) Calcule $\gamma'(0)$, assumido que $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1$.

2. Seja $\gamma(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.

(a) Expresse $\gamma'(t)$ em termos das derivadas parciais de f .

(b) Calcule $\gamma'(0)$ sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{1}{3}$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável e, para $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, defina o campo vetorial $F(x, y, z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x})$. Mostre que

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dois campos vetoriais tais que $f(xy, g(x, y)) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e assumamos que $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$, para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$x \frac{\partial g}{\partial x} - y \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

5. Calcule a derivada direcional do campo f no ponto (x_0, y_0) na direção do vetor $\vec{v}$, onde:

(a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1)$;

(b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 4)$;

(c) $f(x, y) = \arctan(\frac{x}{y})$, $(x_0, y_0) = (3, 3)$ e $\vec{v} = (1, 1)$;

(d) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{v} = (5, 5)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável. Lembrando que derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) na direção do vetor $\vec{v}$ com $\|\vec{v}\| = 1$ pode ser calculada por

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v},$$

conclua que

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo menor entre os vetores $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\vec{v}$. Agora, responda:

- (a) em qual direção e sentido a derivada direcional é máxima? Isto é, qual é o vetor $\vec{v}$ que maximiza a derivada direcional?
 - (b) em qual direção e sentido a derivada direcional é mínima?
 - (c) Supondo $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, em qual direção a derivada direcional é nula?
7. Usando o Exercício 6 acima, encontre a direção e sentido na qual o campo escalar dado cresce mais rapidamente no ponto dado, e também a direção e sentido na qual o campo decresce mais rapidamente:
- (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$;
 - (b) $f(x, y) = \ln \|(x, y)\|$ em $(1, -1)$;
 - (c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ em $(1, \frac{1}{2})$.
8. Calcule $\text{rot } \vec{F}$, onde:
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz^2\vec{j} + xyz\vec{k}$;
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$;
 - (c) $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{i}$;
 - (d) $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} - x^2\vec{j}$;
 - (e) $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.
9. Seja $F(x, y, z) = Q(x, y, z)\vec{j}$ e suponha que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = 0$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\text{rot } \vec{F}$.
10. Determine, se possível, um campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$, onde
- (a) $\vec{F}(x, y) = -6x\vec{i} - 2y\vec{j}$;
 - (b) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$;
 - (c) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} - xy\vec{j}$.