3ª LISTA DE EXERCÍCIOS - DISCIPLINA MTM 5163: CÁLCULO C

1. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde
   (a) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

   (b) $\vec{F}(x,y,z) = (x + y + z)\vec{k}$ e $\gamma(t) = (t, t, 1 - t^2)$, $t \in [0, 1]$;

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

   (d) $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{j}$ e $\gamma(t) = (t^2, 3)$, $t \in [-1, 1]$;

   (e) $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ e $\gamma(t) = (t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

2. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo tal que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y)$ é paralelo ao vetor $x\vec{i} + y\vec{j}$. Seja também $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva C^1 cujo traço está contido na circunferência de centro na origem e raio $r > 0$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

3. Uma partícula move-se no plano de modo que sua posição no instante de tempo t é dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(0)$ até $\gamma(1)$.
   Dica: Note que $\vec{F}$ é conservativo e $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$ é tal que $\nabla f = \vec{F}$.

4. Uma partícula desloca-se em um campo de forças dado por $F(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$. Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}$ no deslocamento de uma partícula de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ sendo dados:
   (a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
   (b) $\gamma(t) = (2t + 1, t - 1, t)$, $t \in [1, 2]$;
   (c) $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

5. Calcule $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$ onde $\gamma(t) = (t^2, \sin t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

6. Calcule $\int_\gamma x\,dx - y\,dy$, onde γ é o segmento que liga $(1,1)$ a $(2,3)$.

7. Calcule $\int_\gamma x\,dx + y\,dz + z\,dz$, onde γ é o segmento que liga $(0,0,0)$ a $(1,2,1)$.

8. Calcule $\int_\gamma x dx + xy dy + z dz$, onde γ é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e o plano $y = x$, com sentido de percurso do ponto $(0, 0, \sqrt{2})$ para $(1, 1, 0)$.

9. Seja $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$, para $t \in [0, 2\pi]$, com $r > 0$. Mostre que
$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$
não depende de r.

10. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo em $\mathbb{R}^2$. Justifique as igualdades.
    (a) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ para $t \in [0, 1]$ e $\gamma_2(t) = (\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4})$, para $t \in [0, 2]$.
    (b) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, para $t \in [0, 2\pi]$ e $\gamma_2(t) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t))$, para $t \in [0, 2\pi]$.

11. Calcule $\int_\gamma x^{\frac{1}{3}} dx + \frac{dy}{1+y^2}$, onde γ é o quadrado de lado 2 centrado em 0, orientada no sentido anti-horário.

12. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (x + y^2)\vec{j}$ e γ é a curva do Exercício 11 acima.

13. Calcule $\int_\gamma y^2 dx + x dy - dz$, onde γ é a poligonal de vértices $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 1, 1)$ e $P_2 = (1, 1, 0)$, orientada de P_0 para P_2.

14. Calcule $\int_\gamma x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$ onde γ é a curva do Exercício 13 acima.