7^{a} LISTA DE EXERCÍCIOS - DISCIPLINA MTM 5163: CÁLCULO C

1. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial de classe C^2 em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ onde o Teorema da divergência se aplica. Seja S a fronteira de Ω, com a normal $\vec{n}$ apontando para fora de B. Calcule $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

2. Seja $\vec{F}(x,y,z) = (x+y+z^2)\vec{k}$ e seja S a fronteira do cilindro $x^2+y^2 \leqslant 4$ e $0 \leqslant z \leqslant 3$. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde S é a normal exterior ao cilindro.

3. Sejam $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \|\vec{F}\|$ e σ uma superfície esférica com normal exterior $\vec{n}$. Calcule $\iint_\sigma \frac{1}{r^3}\vec{F} \cdot \vec{n}$.

4. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0),(1,1,1)\}$ e tal que $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ em Ω. Sejam S_1, S_2 superfícies esféricas de centros $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$, respectivamente, e rais iguais a $\frac{1}{4}$, com normais exteriores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Seja S_3 uma superfície esférica de centro na origem e raio 5, com normal exterior $\vec{n}_3$. Mostre que
$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

5. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule a integral $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} dS$.
   (a) $\vec{F}(x,y,x) = y\vec{k}$, $\sigma(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$, com $u^2+v^2 \leqslant 1$, sendo $\vec{n}$ a normal apontando para cima. .
   (b) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - x^2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\sigma(u,v) = (u,v,1-u^2)$, com $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ e $u+v \leqslant 1$, sendo $\vec{n}$ a normal apontando para cima.
   (c) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$, S a superfície $x^2+y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, $y \geqslant 0$, sendo $\vec{n}$ a normal com a componente $y \geqslant 0$.
   (d) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$, S a superfície $z = x+y+2$ e $x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1$, sendo $\vec{n}$ a normal que aponta para baixo.

6. Calcule $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(-y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k})$, S a esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $\vec{n}$ a normal apontando para fora da esfera.
   Cuidado: o Teorema da divergência não pode ser aplicado (por quê?). Aplique o Teorema de Stokes a cada superfície semi-esférica e some.