

Departamento de Matemática - MTM  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Notas de aula:  
MTM 5186 - Cálculo IV

*Prof. Matheus Cheque Bortolan*

Florianópolis - SC  
2015/1



# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>O corpo <math>\mathbb{C}</math> dos números complexos e o plano complexo</b>	<b>7</b>
2.1	Definição e propriedades básicas . . . . .	7
2.2	Geometria em $\mathbb{C}$ . . . . .	10
2.2.1	A desigualdade triangular . . . . .	11
2.3	Representação polar em $\mathbb{C}$ . . . . .	13
2.3.1	Igualdade de números complexos na representação polar . . . . .	14
2.3.2	Raízes de números complexos . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Funções de uma variável complexa</b>	<b>17</b>
3.1	Definições básicas . . . . .	17
3.1.1	A função exponencial . . . . .	18
3.2	Limites . . . . .	18
3.3	Continuidade . . . . .	21
3.4	Diferenciabilidade . . . . .	22
3.5	Analiticidade . . . . .	26
3.5.1	Equações de Cauchy-Riemann . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Transformações de Möbius</b>	<b>31</b>
4.1	Definições e propriedades básicas . . . . .	31
4.2	Propriedade de preservação de círculos . . . . .	33
4.2.1	Orientação . . . . .	36
4.3	Representação matricial . . . . .	37
4.4	Razão cruzada . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Integração complexa</b>	<b>43</b>
5.1	Curvas no plano complexo . . . . .	43

5.2	Integrais complexas . . . . .	45
5.3	O Teorema de Cauchy-Goursat . . . . .	49
5.3.1	Domínios multiplamente conexos . . . . .	51
5.4	A fórmula integral de Cauchy . . . . .	55
5.5	A fórmula integral de Cauchy para derivadas . . . . .	56
5.6	Consequências das fórmulas integrais de Cauchy . . . . .	58
5.6.1	Derivadas de funções analíticas . . . . .	58
5.6.2	Desigualdade de Cauchy . . . . .	59
5.6.3	Teorema de Liouville . . . . .	59
5.6.4	O Teorema Fundamental da Álgebra . . . . .	60
5.6.5	O Teorema do Módulo Máximo . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Séries complexas e resíduos</b>	<b>63</b>
6.1	Sequências e séries complexas* . . . . .	63
6.1.1	Séries geométricas . . . . .	65
6.1.2	Séries de potências . . . . .	66
6.2	Séries de Taylor . . . . .	68
6.3	Séries de Laurent . . . . .	69
6.3.1	Teorema de representação em séries de Laurent . . . . .	71
6.3.2	Singularidades isoladas . . . . .	76
6.3.3	Classificação de singularidades . . . . .	76
6.4	Resíduos . . . . .	81
6.5	Integrais reais impróprias . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Soluções em séries para equações diferenciais ordinárias</b>	<b>89</b>
7.1	Equação de Euler . . . . .	92
7.2	Soluções em séries num ponto singular regular - o método de Frobenius . . . . .	96
7.3	Equação de Legendre . . . . .	100
7.4	Equação de Bessel . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Equações diferenciais parciais</b>	<b>105</b>
8.1	Equação de Laplace . . . . .	105
8.1.1	Domínios retangulares . . . . .	106
8.1.2	Discos . . . . .	110
8.2	Equação da onda . . . . .	114
8.3	Identidades de Green e funções de Green . . . . .	116
8.3.1	Notações . . . . .	116
8.3.2	Primeira identidade de Green . . . . .	117

---

8.3.3	Segunda identidade de Green . . . . .	118
8.3.4	Fórmula de representação . . . . .	119
8.3.5	Funções de Green . . . . .	120
8.3.6	Função de Green no semi-espaço . . . . .	122



# Introdução

---

---

Este é um material elaborado para poder ser usado como base nas disciplinas de Cálculo IV, ministradas pelos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.





---

# O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos e o plano complexo

---

## 2.1 Definição e propriedades básicas

Começamos este capítulo com a definição do corpo dos números complexos um pouco diferente da qual estamos habituados, mas veremos que elas coincidem.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos pares ordenados  $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ . Em  $\mathbb{C}$  definimos duas operações básicas da seguinte maneira, se  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ , temos*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \text{ que é chamada de } \mathbf{soma}.$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2), \text{ que é chamada de } \mathbf{produto}.$$

Chamamos a tripla  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  de **corpo dos números complexos**.

Estas operações satisfazem as seguintes propriedades, para  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$  e  $(a_3, b_3)$  em  $\mathbb{C}$ :

(S1) **Associatividade da soma:**

$$[(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3) = (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)].$$

(S2) **Comutatividade da soma:**

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1).$$

(S3) **Elemento neutro da soma:** considere o elemento  $(0, 0) \in \mathbb{C}$  e temos

$$(a_1, b_1) + (0, 0) = (a_1, b_1).$$

(S4) **Elemento inverso da soma:** para  $(a_1, b_1)$  considere o elemento  $(-a_1, -b_1) \in \mathbb{C}$  e temos

$$(a_1, b_1) + (-a_1, -b_1) = (0, 0).$$

Denotamos  $(-a_1, -b_1)$  por  $-(a_1, b_1)$ .

(P1) **Associatividade do produto:**

$$[(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)] \cdot (a_3, b_3) = (a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)].$$

(P2) **Comutatividade do produto:**

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1).$$

(P3) **Elemento neutro do produto:** considere o elemento  $(1, 0) \in \mathbb{C}$  e temos

$$(a_1, b_1) \cdot (1, 0) = (a_1, b_1).$$

(P4) **Elemento inverso do produto:** para  $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$  considere o elemento  $\left(\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}, -\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right)$  e temos

$$(a_1, b_1) \cdot \left(\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}, -\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right) = (1, 0).$$

Denotamos  $\left(\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}, -\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right)$  por  $(a_1, b_1)^{-1}$ .

(D) **Distributividade**

$$(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3).$$

Essas propriedades listadas acima são o motivo pelo qual dizemos que  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  é um **corpo**.

**Exercício 2.1.2.** *Demonstre todas estas propriedades.*

Daqui pra frente, omitiremos as operações e denotaremos o corpo dos números complexos simplesmente por  $\mathbb{C}$ .

**Exercício 2.1.3.** *Mostre as seguintes propriedades adicionais de  $\mathbb{C}$ :*

(a) *Temos*

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0) \text{ e } (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2, 0).$$

*Também*

$$(0, b_1) = (0, 1) \cdot (b_1, 0).$$

(b) *Para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos*

$$(\lambda, 0) \cdot (a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1).$$

(c) *Temos*

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = -(1, 0).$$

Vamos agora ver que essa definição que demos para o corpo dos números complexos coincide com a definição usual. Para isso, seja  $(a, b) \in \mathbb{C}$ , e escrevemos com a ajuda do item (a) do exercício acima:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0).$$

Além disso, os itens (a) e (b) nos permitem identificar o par  $(a, 0)$  com o número real  $a$ , e definindo  $i = (0, 1)$  escrevemos

$$(a, b) = a + ib,$$

e note que pelo item (c), temos  $i^2 = -1$ .

Assim, o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos pode ser visto como o conjunto

$$\{z := a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}, \text{ onde } i^2 = -1,$$

com as operações de soma e produto definidas anteriormente.

**Exercício 2.1.4.** *Reinterprete a definição das operações de soma e produto, bem como suas propriedades, com a definição usual dos números complexos. Isto é, dados  $z_1 = a_1 + ib_1$  e  $z_2 = a_2 + ib_2$  em  $\mathbb{C}$ , quem é  $z_1 + z_2$ ? Quem é  $z_1 \cdot z_2$ ? Como ficam as propriedades da soma e produto agora?*

**Observação 2.1.5.** *Nestas novas notações, denotamos o inverso multiplicativo  $z^{-1}$  de um número complexo  $z$  não-nulo também por  $\frac{1}{z}$ , que também é chamado de **recíproco** de  $z$ .*

Para um número complexo  $z = a + ib$ , chamamos  $a$  de **parte real** de  $z$  e  $b$  de **parte imaginária** de  $z$  e denotamos por  $a = \operatorname{Re}(z)$  e  $b = \operatorname{Im}z$ , assim todo número complexo  $z$

pode ser escrito na forma

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z).$$

Um número complexo  $z$  com  $\operatorname{Re}(z) = 0$  é chamado de **número imaginário puro**.

Sejam  $z_1 = a_1 + ib_1$  e  $z_2 = a_2 + ib_2$  dois números complexos. Usando as propriedades do conjuntos dos pares ordenados, sabemos que  $z_1 = z_2$  se, e somente se,  $a_1 = a_2$  e  $b_1 = b_2$ .

## 2.2 Geometria em $\mathbb{C}$

Em  $\mathbb{C}$  podemos também colocar uma estrutura geométrica, que nos possibilita trabalhar com distâncias e ângulos. Para isso, definimos primeiramente

**Definição 2.2.1.** *Seja  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  um número complexo. Definimos o conjugado de  $z$  como o número complexo  $\bar{z}$  dado por*

$$\bar{z} = a - ib,$$

Além disso, definimos a **norma** de  $z$  como o número real  $|z|$  dado por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Exercício 2.2.2.** *Mostre as seguintes propriedades da conjugação e da norma em  $\mathbb{C}$ :*

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$         | (g) $ z  = 0$ se, e somente se, $z = 0;$    |
| (b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$ | (h) $ z_1 \cdot z_2  =  z_1  z_2 ;$         |
| (c) $\overline{\bar{z}} = z;$                               | (i) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z);$  |
| (d) $ \bar{z}  =  z ;$                                      | (j) $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z);$ |
| (e) $z \cdot \bar{z} =  z ^2;$                              | (k) $ \operatorname{Re}(z)  \leq  z ;$      |
| (f) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$ se $z \neq 0;$         | (l) $ \operatorname{Im}(z)  \leq  z .$      |

Com estas duas novas definições, podemos olhar  $\mathbb{C}$  como um espaço geométrico, que pode ser representado no plano da seguinte forma, seja  $z = a + ib$  um número complexo, e olhamos o plano cartesiano com o eixo  $x$  representando a parte real de  $z$  e eixo  $y$  representando a parte imaginária de  $z$

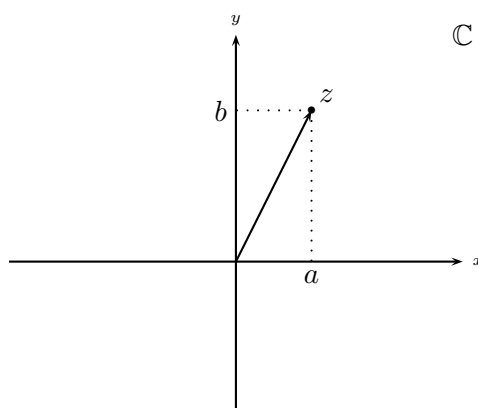


Figura 1: Representação coordenada e vetorial de  $z = a + ib$ .

Assim, o número complexo  $z$  pode ser visto tanto como o ponto coordenado  $(a, b)$  no plano ou como o vetor  $(a, b)$ . Assim, podemos definir a **distância** entre dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  por  $|z_1 - z_2|$ .

### 2.2.1 A desigualdade triangular

A norma complexa tem uma propriedade muito importante, que é a chamada **desigualdade triangular**, que enunciamos e demonstramos a seguir.

**Proposição 2.2.3** (Desigualdade triangular). *Sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Temos*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

**Demonstração:** Sabemos que

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

o que mostra o resultado. ■

Usando a desigualdade triangular, podemos ver também que  $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

**Proposição 2.2.4.** *Para quaisquer  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .*

**Demonstração:** Temos

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

utilizando o item (i) do exercício anterior. Assim

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

Analogamente, obtemos  $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$ , e juntas estas desigualdades nos dão

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

■

O exemplo abaixo ilustra um pouco da teoria de *lugar geométrico*, e será muito útil no Capítulo 4.

**Exemplo 2.2.5.** *Mostre que se  $\rho > 0$  e  $\rho \neq 1$ , então o conjunto  $\Gamma$  dos pontos de  $\mathbb{C}$  que satisfazem a equação*

$$|z - z_0| = \rho|z|, \text{ para um } z_0 \in \mathbb{C} \text{ fixado,}$$

*é um círculo.*

**Solução:** *Vamos supor que  $\rho > 1$  (o caso  $\rho < 1$  é inteiramente análogo). Assim temos*

$$|z - z_0|^2 = \rho^2|z|^2,$$

*e assim temos*

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = \rho^2|z|^2.$$

*Usando que  $\rho > 1$  podemos definir  $\alpha \doteq 1 - \rho^2$  e reescrever a equação acima da seguinte maneira*

$$|z|^2 - \frac{2}{\alpha}\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + \frac{1}{\alpha}|z_0|^2 = 0,$$

*o que, somando e subtraindo o termo  $\frac{|z_0|^2}{\alpha^2}$  nos dá*

$$\left|z - \frac{z_0}{\alpha}\right|^2 = |z|^2 - \frac{2}{\alpha}\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + \frac{|z_0|^2}{\alpha^2} = \frac{\rho^2}{\alpha^2}|z_0|^2,$$

*que é a equação de um círculo de centro  $\frac{z_0}{\alpha}$  e raio  $\frac{\rho}{|\alpha|}|z_0|$ .*

## 2.3 Representação polar em $\mathbb{C}$

Até agora, vimos como representar um número complexo  $z = a + ib$  como o par ordenado  $(a, b)$  no plano complexo, que chamamos de representação cartesiana de  $z$ . Mas, podemos também, alternativamente, representar o número  $z$  em coordenadas polares. Sabemos que se  $z = (a, b)$  então existem números reais  $r \geq 0$  e  $\theta \in \mathbb{R}$  tais que

$$a = r \cos \theta \text{ e } b = r \sin \theta.$$

Assim, podemos escrever o número complexo  $z$  como

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Definindo  $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$ , escrevemos então  $z = re^{i\theta}$ . Note que para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$  temos

$$|e^{i\theta}|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

logo  $r = |z|$ . Além disso, um *possível valor* para  $\theta$  é  $\arctan(\frac{b}{a})$  e  $e^{i(\theta+2n\pi)} = e^{i\theta}$  para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ .

Se  $z = re^{i\theta}$ , dizemos que  $\theta$  é um **argumento** de  $z$  (*não é único*) e assim, existe um único  $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$  tal que  $z = re^{i\theta_0}$ , e a este  $\theta_0$  chamamos de **argumento principal**.

Uma das propriedades mais úteis desta representação é a facilidade em lidar com produtos e potências de números complexos, como veremos a seguir:

**Proposição 2.3.1.** *Dados  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , temos*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

e além disso, se  $z_1 \neq 0$  temos  $r_1 > 0$  e  $z_1^{-1} = r_1^{-1} e^{-i\theta}$ .

**Demonstração:** Sabemos que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

logo

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

Para a segunda parte, como  $z_1 \neq 0$  temos  $r_1 = |z_1| > 0$  e ainda

$$\begin{aligned} z_1^{-1} &= \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \frac{1}{r_1^2} r_1 (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= r_1^{-1} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = r_1^{-1} e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

■

Utilizando esta proposição indutivamente, obtemos a seguinte expressão para potências de números complexos, cuja demonstração segue diretamente da proposição anterior.

**Proposição 2.3.2.** *Para cada  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{Z}_+^*$  temos*

$$z^n = r^n e^{in\theta}. \quad (2.3.1)$$

Além disso, se  $z \neq 0$ , esta expressão é válida para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ainda, como consequência direta da expressão (2.3.1) obtemos a **fórmula de de Moivre** (isto mesmo, são dois ‘de’)

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

### 2.3.1 Igualdade de números complexos na representação polar

Sabemos como lidar com a igualdade de números complexos em coordenadas cartesianas, agora vamos ver como isto se comporta em coordenadas polares.

**Proposição 2.3.3.** *Sejam  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  números complexos. Então  $z_1 = z_2$  se, e somente se,  $r_1 = r_2$  e  $\theta_1 = \theta_2 + 2m\pi$ , para algum  $m \in \mathbb{Z}$ .*

**Demonstração:** Sabemos que

$$z_1 = r_1 \cos \theta_1 + i r_1 \sin \theta_1 \text{ e } z_2 = r_2 \cos \theta_2 + i \sin \theta_2,$$

e da igualdade de números complexos, temos

$$r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 \text{ e } r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2,$$

logo, como  $r_1 = |z_1| = |z_2| = r_2$ , temos  $r_1 = r_2$  e

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 \text{ e } \sin \theta_1 = \sin \theta_2,$$

o que implica que existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\theta_1 = \theta_2 + 2m\pi$ . A recíproca é trivial. ■



### 2.3.2 Raízes de números complexos

Suponhamos que temos  $n \geq 2$  e  $w = re^{i\theta} \neq 0$  um número complexo dado. Quantas possíveis soluções a equação  $z^n = w$  possui?

Tendo em vista a expressão (2.3.1), sabemos que uma solução é dada por  $z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ . Mas esta claramente não é a única solução, e de fato, todos os números

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \text{ para } 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.3.2)$$

são soluções de  $z^n = w$ .

**Proposição 2.3.4.** *Os números complexos dados em (2.3.2) são as únicas soluções da equação  $z^n = w$ .*

**Demonstração:** Já sabemos que todos os  $z_k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  são soluções da equação  $z^n = w$ . Agora seja  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  uma solução qualquer de  $z^n = w$ . Temos que  $z_1^n = r_1^n e^{in\theta_1}$  e assim temos  $r_1^n = r$  e  $n\theta_1 = \theta + 2m\pi$ , para algum  $m \in \mathbb{Z}$ , portanto

$$z_1 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2m\pi}{n}},$$

e claramente podemos tomar  $0 \leq m \leq n-1$ , o que conclui a demonstração. ■



---

# Funções de uma variável complexa

---

Este capítulo é dedicado ao estudo das funções de variável complexa, que é muito mais rico do que simplesmente funções de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ , como vamos a ver no que segue.

## 3.1 Definições básicas

No que segue vamos considerar  $G \subseteq \mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Dizemos então que  $f$  é uma **função complexa de uma variável complexa**, ou simplesmente, uma **função complexa**.

### Exemplo 3.1.1.

1. *Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^2 + iz$ . Temos neste caso  $f(0) = 0$ ,  $f(i) = i^2 + i \cdot i = 2i^2 = -2$ , e assim por diante.*
2.  *$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = i$ .*
3. *Fixe  $w \in \mathbb{C}$  e considere  $f : \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \frac{1}{z-w}$ .*

O conjunto  $G$  é chamado **domínio de  $f$** , e o conjunto  $f(G)$  dos pontos  $\{f(z) : z \in G\} \subseteq \mathbb{C}$  é chamado de **imagem de  $G$  por  $f$** . Quando nada é especificado, assumimos que o domínio da função  $f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{C}$  no qual  $f$  está bem definida. Por exemplo, considerando  $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ , o domínio de  $f$  é o  $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ ; uma vez que  $z^2 + 1$  é 0 para  $z = \pm i$ .

Claramente, como  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ , toda função real pode ser vista como uma função complexa. Além disso, as funções complexas podem ser vistas como funções definidas no plano, da seguinte maneira: seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa. Se escrevemos  $z = x + iy$  e

$f(z) = u + iv$ , podemos olhar a função  $f$  como uma função de duas variáveis, dada por

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

A função  $u$  é chamada de **parte real de  $f$** , enquanto a função  $v$  é chamada de **parte imaginária de  $f$**

**Exemplo 3.1.2.** *Encontre as partes real e imaginária da função  $f(z) = z^2 + iz$ .*

*Escrevendo  $z = x + iy$ , temos  $f(x + iy) = (x + iy)^2 + i(x + iy) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x)$ , logo temos  $u(x, y) = x^2 + y^2 - y$  e  $v(x, y) = 2xy - x$ .*

### 3.1.1 A função exponencial

Consideremos a função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida da seguinte maneira: escrevendo  $z = x + iy$ , definimos

$$f(x + iy) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

que denotamos por  $f(z) = e^z$ . Tal função é chamada de **função exponencial complexa**.

Como  $e^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , vemos que  $e^z \neq 0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Ainda, suas partes real e imaginária são, respectivamente  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \sin y$ .

Temos também que  $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ ; logo  $|e^{iy}| = 1$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 3.1.3.** *Para todos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

**Demonstração:** Escrevemos  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ , temos

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \end{aligned}$$

aonde utilizamos a propriedade da exponencial real e a Proposição 2.3.1. ■

Uma curiosidade interessante a respeito da exponencial complexa é que ela é *periódica*, uma vez que  $e^{z+2i\pi} = e^z$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Logo ela é periódica com período imaginário puro  $2i\pi$ .

## 3.2 Limites

**Definição 3.2.1.** *Dizemos que o **limite** de uma função complexa  $f$  quando  $z$  tende a  $z_0$  é  $L$ , e denotamos por*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L,$$

quando dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(z) - L| < \epsilon$  sempre que  $0 < |z - z_0| < \delta$ .

**Cr terio de não-existência de limite:** Se  $f$  se aproxima de dois números complexos  $L_1 \neq L_2$  quando tomamos dois caminhos diferentes chegando até  $z_0$ , então  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  não existe.

**Exemplo 3.2.2.** Mostre que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$  não existe.

**Solu o:** Consideramos o limite olhando somente o eixo real; isto  , assumamos que  $z = x = x + 0i$ . Assim, temos  $\bar{z} = x$  e temos, para  $x$  se aproximando de zero (mas  $x$  não   zero):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Agora, consideramos o limite olhando o eixo imaginário; isto  , assumimos que  $z = iy = 0 + iy$ . Neste caso,  $\bar{z} = -iy$  e temos, para  $y$  se aproximando de zero (mas  $y$  não   zero):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{iy}{-iy} = -1.$$

Logo, pelo cr terio de não-existência do limite, segue que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$  não existe.

**Exemplo 3.2.3.** Mostre, usando a defini o, que  $\lim_{z \rightarrow 1} z^2 = 1$ .

**Solu o:** Dado  $\epsilon > 0$ , nosso trabalho   encontrar um número real  $\delta > 0$ , tal que  $|z^2 - 1| < \epsilon$ , sempre que  $|z - 1| < \delta$ . Mas  $z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$  e, supondo que  $0 < |z - 1| < \delta < 1$ , sabemos que

$$1 > \delta > |z - 1| = |z + 1 - 2| \geq |z + 1| - 2,$$

logo  $|z + 1| < 3$  e assim  $|z^2 - 1| = |z + 1||z - 1| < 3\delta$ , e escolhendo ainda  $\delta < \frac{\epsilon}{3}$ , temos

$$|z^2 - 1| < \epsilon, \text{ sempre que } 0 < |z - 1| < \delta.$$

**Proposi o 3.2.4.** Suponha que  $f$  e  $g$  sejam fun o complexas. Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$ , temos

(a)  $\lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = cL$ , onde  $c$    um número complexo qualquer fixado;

(b)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = L + M$ ;

(c)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) = L \cdot M$  e

(d)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$ , desde que  $M \neq 0$ .

**Demonstração:** Provemos primeiramente (a). Se  $c = 0$ , nada temos a fazer, já que é trivial ver que  $\lim_{z \rightarrow z_0} 0 = 0$ , para qualquer que seja  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Assuma então que  $c \neq 0$  e dado  $\epsilon > 0$ , da definição de limite, existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |z - z_0| < \delta$  temos  $|f(z) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$ . Assim, segue que

$$|cf(z) - cL| = |c||f(z) - L| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon,$$

o que mostra (a).

Deixamos as demonstrações de (b), (c) e (d) como exercícios para o leitor. ■

Uma maneira útil de se verificar o limite de uma função complexa, é usar a teoria de funções em duas variáveis, e o seguinte resultado mostra exatamente isso.

**Teorema 3.2.5.** *Sejam  $f$  uma função complexa, com  $f = u + iv$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  e  $L = a + ib$  números complexos, e escrevemos  $z = x + iy$ . Então  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  se, e somente se,*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a \text{ e } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b.$$

**Demonstração:** Assuma que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ , então isso quer dizer que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |z - z_0| < \delta$  temos  $|f(z) - L| < \epsilon$ . Mas temos

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{\mathbb{R}^2}$$

e

$$|f(z) - L| = \sqrt{(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2}.$$

Assim, é fácil ver que  $|u(x, y) - a| \leq |f(z) - L|$  e  $|v(x, y) - b| \leq |f(z) - L|$  e portanto segue que

$$|u(x, y) - a| < \epsilon \text{ e } |v(x, y) - b| < \epsilon, \text{ sempre que } 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{\mathbb{R}^2} < \delta,$$

ou seja,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b$ . A recíproca fica como exercício para o leitor. ■

**Exemplo 3.2.6.** *Mostre que  $\lim_{z \rightarrow 1} z^2 = 1$ , usando o teorema acima.*

**Solução:** Sabemos que se  $z = x + iy$ , temos  $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$  e portanto neste caso  $u(x, y) = x^2 - y^2$  e  $v(x, y) = 2xy$ . Quando  $z \rightarrow 1 = 1 + i0$  temos que  $(x, y) \rightarrow (1, 0)$ , conseqüentemente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^2 - y^2) = 1,$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} v(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} 2xy = 0,$$

portanto  $\lim_{z \rightarrow z_0} z^2 = 1 + i0 = 1$ .

### 3.3 Continuidade

**Definição 3.3.1.** Dizemos que uma função complexa  $f$  é **contínua em um ponto**  $z_0$  do seu domínio, se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Quando  $f$  é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que  $f$  é **contínua**.

**Observação 3.3.2.** Lembre-se que, para garantir que uma função complexa  $f$  é contínua em um ponto  $z_0$ , precisamos verificar três coisas:

1.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe;
2.  $f$  está definida no ponto  $z_0$ ; isto é,  $z_0$  está no domínio de  $f$ ;
3.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

**Exemplo 3.3.3.** A função  $f(z) = z^2$  é contínua em  $z_0 = 1$ .

**Solução:** Sabemos que  $\lim_{z \rightarrow 1} z^2$  existe e que  $z_0 = 1$  está no domínio de  $f(z) = z^2$ . Ainda, já mostramos que  $\lim_{z \rightarrow 1} z^2 = 1$ , o que mostra que  $z^2$  é contínua em  $z_0 = 1$ .

**Exemplo 3.3.4** (O logaritmo complexo). Definimos o **logaritmo principal complexo** de um número complexo  $z$  por

$$\text{Log}(z) \doteq \ln |z| + i\text{Arg}(z).$$

A função  $\text{Log}(z)$  está definida para todo número complexo não-nulo; porém, notemos que ela é descontínua no eixo real negativo.

**Solução:** De fato, assumamos que  $z_0 = -x$ ,  $x > 0$ , é um número complexo no eixo real negativo. Vamos nos aproximar de  $z_0$  por valores no círculo de raio  $x$ , com parte real positiva; isto é, com valores da forma  $z = xe^{i\theta}$  onde  $\theta$  se aproxima de  $\pi$ , por valores menores do que  $\pi$ . Temos

$$\text{Log}(z) = \ln x + i\theta,$$

e portanto  $\lim_{z \rightarrow z_0} \text{Log}(z) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} [\ln x + i\theta] = \ln x + i\pi$ .

Analogamente, se  $z$  se aproxima de  $z_0$  pelo círculo de raio  $x$ , com parte real negativa; isto é, com valores da forma  $z = xe^{i\theta}$  onde  $\theta$  se aproxima de  $-\pi$ , temos  $\lim_{z \rightarrow z_0} \text{Log}(z) = \lim_{\theta \rightarrow -\pi} [\ln x + i\theta] = \ln x - i\pi$ .

Do critério de não-existência do limite, segue que  $\lim_{z \rightarrow z_0} \text{Log}(z)$  não existe, e portanto  $\text{Log}(z)$  não é contínua no eixo real negativo.

Usando a Proposição 3.2.4 podemos enunciar algumas propriedades básicas de funções contínuas:

**Proposição 3.3.5.** *Suponha que  $f$  e  $g$  sejam função complexas contínuas em um ponto  $z_0$ , então:*

- (a)  $cf$  é contínua em  $z_0$ , onde  $c$  é um número complexo qualquer fixado;
- (b)  $f + g$  é contínua em  $z_0$ ;
- (c)  $f \cdot g$  é contínua em  $z_0$  e
- (d)  $\frac{f}{g}$  é contínua em  $z_0$ , desde que  $g(z_0) \neq 0$ .

Com essa proposição, podemos provar a continuidade de uma grande classe de funções, como veremos no exemplo a seguir:

**Exemplo 3.3.6.** *Sabemos que a função  $f(z) = z$  é contínua em todos os pontos de  $\mathbb{C}$ , assim usando o item (c) da proposição acima, qualquer função  $z^n$  é contínua, para  $n \in \mathbb{N}$ .*

Usando os item (a) e (b), vemos que qualquer função complexa polinomial do tipo  $p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$  é contínua.

Por fim, usando o item (d), qualquer função complexa do tipo  $\frac{p(z)}{q(z)}$  é contínua, onde  $p(z), q(z)$  são função complexas polinomiais, em todos os pontos  $z_0$  nos quais  $q(z_0) \neq 0$ . Estas funções são chamadas de **funções racionais**.

Por fim, podemos usar o Teorema 3.2.5 para dar um critério que estabelece a continuidade de funções complexas, utilizando a teoria de cálculo em duas variáveis.

**Teorema 3.3.7.** *Seja  $f$  uma função complexa com  $f = u + iv$  e  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Então  $f(z)$  é contínua em  $z_0$  se, e somente se,  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são contínuas em  $(x_0, y_0)$ .*

## 3.4 Diferenciabilidade

Para introduzir o conceito de diferenciabilidade, precisamos antes do conceito de *vizinhança*:

**Definição 3.4.1.** *Seja  $z_0$  um número complexo. Uma bola aberta de centro em  $z_0$  e raio  $r > 0$  é o conjunto definido por*

$$B_r(z_0) \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$



Uma bola aberta de centro em  $z_0$  e raio qualquer é também chamada de **vizinhança** de  $z_0$  e dizemos que um subconjunto  $D \subseteq \mathbb{C}$  é **aberto**, se para cada ponto  $z_0 \in D$  existe uma vizinhança de  $z_0$  inteiramente contida em  $D$ ; isto é, para cada  $z_0 \in D$  existe um  $r > 0$  tal que  $B_r(z_0) \subseteq D$ .

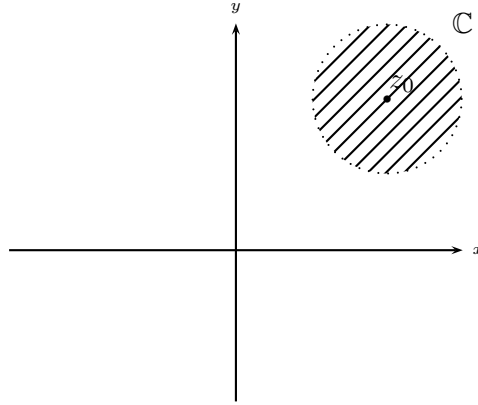


Figura 2: Vizinhança de um ponto  $z_0$ .

**Definição 3.4.2.** Seja  $f$  uma função complexa definida numa vizinhança de um ponto  $z_0$ . Dizemos que  $f$  é **diferenciável no ponto**  $z_0$  se existe o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

e neste caso denotamos este limite por  $f'(z_0)$ ; isto é

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Quando  $f$  é diferenciável em todos os pontos do seu domínio dizemos simplesmente que  $f$  é **diferenciável**.

**Observação 3.4.3.** Também denotamos a derivada  $f'(z)$  por  $\frac{d}{dz}f(z)$ .

**Exemplo 3.4.4.** Mostre que  $f(z) = z^2$  é diferenciável e que  $f'(z) = 2z$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Solução:** Notemos que, para  $z_0 \in \mathbb{C}$  fixado, temos

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = z + z_0,$$

sempre que  $z \neq z_0$ . Portanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0,$$

e logo  $f$  é diferenciável em  $z_0$  e  $f'(z_0) = 2z_0$ . Como  $z_0$  é arbitrário, segue que  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $\mathbb{C}$  e que  $f'(z) = 2z$ .

O exemplo a seguir mostra que os Teoremas 3.2.5 e 3.3.7 não têm um correspondente quando tratamos da diferenciabilidade de funções complexas.

**Exemplo 3.4.5.** Considere a função complexa definida por  $f(x+iy) = x+i4y$ . Mostremos que esta função não é diferenciável em nenhum ponto de  $\mathbb{C}$ .

De fato, seja  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$  um número complexo arbitrário fixado. Consideramos primeiramente o limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  usando o caminho  $z = x_0 + iy$ . Temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x_0 + i4y - (x_0 - i4y_0)}{x_0 + iy - (x_0 - iy_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{i4(y - y_0)}{i(y - y_0)} = 4.$$

Agora, tomando  $z = x + iy_0$  temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x + i4y_0 - (x_0 - i4y_0)}{x + iy_0 - (x_0 - iy_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

e usando o critério de não-existência do limite, vemos que esta função não é diferenciável em  $z_0$ .

O próximo resultado mostra que diferenciabilidade é ‘mais forte’ do que continuidade; isto é, uma função diferenciável num ponto  $z_0$  é automaticamente contínua neste ponto.

**Proposição 3.4.6.** Seja  $f$  uma função complexa definida numa vizinhança de um ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Se  $f$  é diferenciável em  $z_0$  então  $f$  é contínua em  $z_0$ .

**Demonstração:** Temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0),$$

e como  $f$  é diferenciável, existe o limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  e do item (c) da Proposição 3.2.4, segue que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \underbrace{\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)}_{=0} = 0.$$

■

Vejamos agora algumas regras de diferenciação, que são muito úteis no cálculo de derivadas e cuja demonstração fica como exercício para o leitor:

**Proposição 3.4.7** (Regras de derivação). *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções complexas diferenciáveis e  $c$  um número complexo fixado. Temos*

- (a)  $\frac{d}{dz}c = 0$ ;
- (b)  $\frac{d}{dz}(cf(z)) = cf'(z)$ ;
- (c)  $\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z)$ ;
- (d)  $\frac{d}{dz}(f(z) \cdot g(z)) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$ ;
- (e)  $\frac{d}{dz} \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ , desde que  $g(z) \neq 0$  na vizinhança de  $z_0$ .

Uma outra propriedade importante das derivadas é a *Regra da cadeia*, que enunciaremos a seguir.

**Teorema 3.4.8** (Regra da cadeia). *Sejam  $f$  e  $g$  funções complexas, com  $g$  definida numa vizinhança de  $z_0$ , diferenciável em  $z_0$  e  $f$  definida numa vizinhança de  $g(z_0)$  e diferenciável em  $g(z_0)$ . Então a composta  $f \circ g$  é diferenciável em  $z_0$  e*

$$\frac{d}{dz}(f \circ g)(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

**Demonstração:** Como  $g$  é diferenciável em  $z_0$ ,  $g$  é contínua em  $z_0$  e temos  $\lim_{z \rightarrow z_0} (g(z) - g(z_0)) = 0$ , assim

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(g(z_0))g'(z_0), \end{aligned}$$

onde em (\*) utilizamos a diferenciabilidade de  $f$  em  $g(z_0)$  e de  $g$  em  $z_0$ . ■

**Observação 3.4.9.** *Note que esta demonstração não está completamente correta; melhor dizendo, ela só é verdadeira se assumirmos que  $g(z) \neq g(z_0)$  para  $0 < |z - z_0| < r$ , para algum  $r > 0$ . Caso contrário, não podemos dividir a expressão por  $g(z) - g(z_0)$ .*

**Exercício 3.4.10.** *Dê uma demonstração mais precisa deste resultado, que não exclua o caso que mencionamos acima.*

Usando o item (c) das regras de derivação é fácil mostrar a regra de diferenciação para potências:

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, usando o item (e), podemos ver que

$$\frac{d}{dz} z^{-1} = \frac{d}{dz} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -z^{-2},$$

e indutivamente podemos mostrar que a regra acima vale também para inteiros negativos.

Logo temos

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

### 3.5 Analiticidade

Agora veremos o conceito de analiticidade, que é de extrema importância quando trabalhamos com funções complexas.

**Definição 3.5.1.** *Seja  $f$  uma função complexa definida numa vizinhança de um ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é **analítica no ponto**  $z_0$  se  $f$  é diferenciável numa vizinhança de  $z_0$ .*

**Observação 3.5.2** (CUIDADO!). *Note aqui uma diferença sutil, mas de extrema importância, entre as definições de diferenciabilidade e analiticidade. Para que  $f$  seja analítica em  $z_0$  ela deve ser diferenciável em todos os pontos de uma vizinhança de  $z_0$ , e não somente no ponto  $z_0$ .*

**Definição 3.5.3.** *Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma região definida num conjunto aberto  $D$ . Se  $f$  é analítica em todos os pontos de  $D$  dizemos simplesmente que  $f$  é **analítica em  $D$** . Uma função analítica em todo o plano complexo  $\mathbb{C}$  é também chamada de **função inteira**.*

**Exemplo 3.5.4.**

1. Toda função polinomial  $p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  é inteira.
2. Uma função racional da forma  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  é analítica no aberto  $D$  definido por  $\mathbb{C} \setminus \{z_0 \in \mathbb{C} : q(z_0) = 0\}$ .

Com estas definições, podemos enunciar o seguinte:

**Proposição 3.5.5.** *Sejam  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  duas funções analíticas num conjunto aberto  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Então as funções  $cf$ , onde  $c$  é um número complexo fixado,  $f + g$  e  $f \cdot g$  são analíticas em  $D$ . Ainda, se  $g(z) \neq 0$  para todo  $z \in D$ , a função  $\frac{f}{g}$  é analítica em  $D$ .*

Ainda, uma regra importante usada no cálculo de limites é a Regra de L'Hôpital, dada abaixo

**Proposição 3.5.6** (Regra de L'Hôpital). *Sejam  $f$  e  $g$  funções analíticas num ponto  $z_0$  com  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  e assumamos que  $g'(z_0) \neq 0$ . Então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

**Demonstração:** Exercício.

### 3.5.1 Equações de Cauchy-Riemann

Usando as partes real e imaginária de uma função complexa, podemos estabelecer um critério para decidir quando uma função  $f$  não é diferenciável em um determinado ponto  $z_0$ .

**Teorema 3.5.7** (Equações de Cauchy-Riemann). *Assumamos que a função complexa  $f = u + iv$  é diferenciável no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Então as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  em  $(x_0, y_0)$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0);$$

ou resumidamente  $u_x = v_y$  e  $u_y = -v_x$ .

**Demonstração:** Como  $f$  é diferenciável em  $z_0$ , existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{x + iy - x_0 - iy_0}.$$

Sabemos também que como este limite existe, ele existe independente de que caminho em  $\mathbb{C}$  tomamos; isto é, podemos tomar  $y = y_0$  fixo e temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Agora, tomando  $x = x_0$  fixado, temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões obtemos o resultado desejado. ■

**Observação 3.5.8** (CUIDADO!). *Este resultado não diz quando uma função  $f$  é diferenciável, ele é simplesmente um critério para definir quando uma função  $f$  não é diferenciável em um ponto  $z_0$ , a saber, se uma função  $f$  **não** satisfaz as equações de Cauchy-Riemann num ponto  $z_0$  então  $f$  **não** é diferenciável em  $z_0$ .*

**Exemplo 3.5.9.** *Mostre que a função complexa definida por  $f(x + iy) = x + i4y$  não é diferenciável em nenhum ponto de  $\mathbb{C}$  usando as equações de Cauchy-Riemann.*

**Solução:** Neste caso temos  $u(x, y) = x$  e  $v(x, y) = 4y$ . Assim  $u_x(x, y) = 1$ ,  $u_y(x, y) = 0$ ,  $v_x(x, y) = 0$  e  $v_y(x, y) = 4$  e como  $u_x \neq v_y$  em todos os pontos de  $\mathbb{C}$ , segue que  $f$  não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em nenhum ponto, portanto  $f$  não é diferenciável em nenhum ponto de  $\mathbb{C}$ .

Podemos no entanto, utilizar algumas condições a mais para ter a recíproca deste resultado, isto é, utilizando as equações de Cauchy-Riemann, sermos capazes de dizer quando a função é diferenciável. Este é o conteúdo do próximo resultado.

**Teorema 3.5.10** (Equações de Cauchy-Riemann v.2). *Suponha que  $f = u + iv$  seja uma função complexa, seja  $z_0 = x_0 + iy_0$  e assumamos que  $u(x, y), v(x, y)$  são funções continuamente diferenciáveis; isto é, contínuas com todas as derivadas parciais de ordem 1  $u_x, u_y, v_x$  e  $v_y$  contínuas em uma vizinhança de  $(x_0, y_0)$ . Se  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto  $(x_0, y_0)$  então  $f$  é diferenciável em  $z_0$  e ainda*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

**Exemplo 3.5.11.** *Encontre os pontos nos quais a função complexa  $f(z) = |z|^2$  é diferenciável.*

**Solução:** Neste caso, sabemos que  $f(x + iy) = x^2 + y^2$ , logo  $u(x, y) = x^2 + y^2$  e

$v(x, y) = 0$ . Assim temos

$$u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = 2y, \quad v_x(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad v_y(x, y) = 0,$$

assim  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann somente se  $x = y = 0$ . Portanto  $f(z) = |z|^2$  é diferenciável somente em  $z = 0$ .

No que segue, sempre mencionaremos a palavra *domínio*, que definimos a seguir:

**Definição 3.5.12.** Um **domínio**  $D$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  que é conexo; isto é, um conjunto aberto que não pode ser escrito como união de dois abertos disjuntos.

**Observação 3.5.13.** Equivalentemente, um domínio é um conjunto aberto com a seguinte propriedade: para cada par de pontos distintos  $z, w \in D$  existe uma função contínua  $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$  tal que  $\gamma(0) = z$  e  $\gamma(1) = w$ .

Com esta definição, podemos enunciar o seguinte resultado

**Proposição 3.5.14.** Suponha que  $f$  seja uma função analítica num domínio  $D$ .

(a) Se  $|f(z)|$  é constante em  $D$  então  $f$  também é.

(b) Se  $f'(z) = 0$  em  $D$  então  $f$  é constante em  $D$ .

**Demonstração:** As provas destes resultado seguem basicamente das equações de Cauchy-Riemann. Provemos primeiramente (a) e para isso, sabemos que para  $f = u + iv$  temos, como  $|f(z)| = c$  para algum número complexo  $c$

$$c^2 = |f(z)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y).$$

Se  $c = 0$ , nada temos a fazer, então podemos supor que  $c \neq 0$  e derivando a expressão acima em  $x$  e  $y$  separadamente, temos

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases}.$$

Como  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, substituindo  $v_x$  por  $-u_y$  e  $v_y$  por  $u_x$  nas equações acima, obtemos

$$\begin{cases} uu_x - vv_y = 0 \\ uu_y + vv_x = 0 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por  $u$ , a segunda por  $v$  e somando as duas equações temos  $0 = u^2 u_x + v^2 u_x = (u^2 + v^2) u_x = c^2 u_x$ , e como  $c^2 > 0$  segue que  $u_x = 0$ . Analogamente mostramos que  $u_y = 0$  e novamente, as equações de Cauchy-Riemann implicam que  $v_x = 0$  e  $v_y = 0$ . Portanto, usando a teoria de cálculo em duas variáveis, sabemos que  $u$  e  $v$  são constantes, o que mostra que  $f$  é constante.

A prova de (b) é análoga, e fica como exercício ao leitor. ■



---

# Transformações de Möbius

---

Em muitas aplicações que envolvem problemas de valores de contorno associados à equação de Laplace, é necessário encontrar aplicações *conformes*; isto é, que preservam ângulos entre curvas, que levam um disco no semiplano  $y \geq 0$ . Tal aplicação deve levar a fronteira do disco na reta de fronteira no semiplano. Uma classe importante de aplicações conformes elementares que levam círculos em linhas, e vice-versa, são as *transformações de Möbius*, ou também conhecidas como *transformações lineares fracionárias*.

Neste capítulo vamos definir e estudar esta classe especial de aplicações.

## 4.1 Definições e propriedades básicas

**Definição 4.1.1.** *Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números complexos com  $ad - bc \neq 0$ , então a função complexa definida por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

*é chamada uma transformação de Möbius.*

Se  $c = 0$ , então a transformação de Möbius  $T(z)$  é uma transformação linear afim; logo, toda aplicação linear afim é uma transformação de Möbius. Agora veremos que qualquer transformação de Möbius é dada por compostas de transformações lineares afins e da função  $g(z) = \frac{1}{z}$ .

**Teorema 4.1.2.** *Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números complexos com  $ad - bc \neq 0$  e considere a transformação de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Então existem duas transformações lineares afins  $S, R$  tais que*

$$T(z) = S \circ g \circ R(z),$$

onde  $g(z) = \frac{1}{z}$ .

**Demonstração:** Podemos reescrever  $T(z)$  da seguinte forma

$$T(z) = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c},$$

e definindo  $\alpha = \frac{bc - ad}{c}$  e  $\beta = \frac{a}{c}$  tomamos

$$S(z) = \alpha z + \beta \quad \text{e} \quad R(z) = cz + d,$$

logo é simples verificar que  $T = S \circ g \circ R$ . ■

Claramente vemos que o domínio de  $T$  é o conjunto dos números complexos menos o ponto  $z = -\frac{d}{c}$ ; já que a função  $T$  não está definida neste ponto.

**Observação 4.1.3.** *Apesar de não termos visto a definição precisa de aplicações conformes, é possível mostrar que  $T$  satisfaz esta propriedade; e para isto, é de fundamental importância que  $ad - bc \neq 0$ .*

Além da observação acima, mostramos mais uma propriedade importante que segue do fato  $ad - bc \neq 0$ .

**Proposição 4.1.4.** *Uma transformação de Möbius é injetora no seu domínio.*

**Demonstração:** De fato, suponha que  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  com  $ad - bc \neq 0$ . Garantimos que existe uma transformação linear afim  $H$  tal que  $H \circ T(z) = \frac{1}{cz + d}$ , para todo  $z$  no domínio de  $T$ .

De fato, da demonstração do Teorema 4.1.2 sabemos que

$$T(z) = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c},$$

logo, definindo  $H(z) = \frac{c}{bc - ad}z - \frac{a}{bc - ad}$  temos que  $H \circ T(z) = \frac{1}{cz + d}$ .

Assim, sejam  $z_1, z_2$  números complexos no domínio de  $T$  tais que  $T(z_1) = T(z_2)$ . Do que provamos acima temos

$$\frac{1}{cz_1 + d} = H \circ T(z_1) = H(T(z_1)) = H(T(z_2)) = H \circ T(z_2) = \frac{1}{cz_2 + d},$$

e portanto  $z_1 = z_2$ , o que prova que  $T$  é injetora no seu domínio. ■

Se  $c \neq 0$ , temos a seguinte situação: escrevamos  $T$  da seguinte maneira

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{1}{c} \frac{az + b}{z + \frac{d}{c}} = \phi(z) \frac{1}{z + \frac{d}{c}},$$

onde  $\phi(z) = \frac{1}{c}(az + b)$ . Como  $ad - bc \neq 0$ , vemos que  $\phi(-\frac{d}{c}) \neq 0$  e portanto

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} T(z) = \infty.$$

Ainda, vemos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c},$$

e assim, usando estas duas últimas relações, podemos definir  $T$  em todo o *plano complexo estendido* (isto é, o plano complexo unido com o símbolo  $\infty$ ) da seguinte maneira

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{se } z \neq -\frac{d}{c}, z \neq \infty; \\ \infty, & \text{se } z = -\frac{d}{c}; \\ \frac{a}{c}, & \text{se } z = \infty. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

**Exemplo 4.1.5.** *Encontre a imagem dos pontos  $0, 1 + i, i$  e  $\infty$  pela transformação de Möbius dada por*

$$T(z) = \frac{2z + 1}{z - i}.$$

**Solução:** *Temos*

$$T(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 - i} = i \quad e \quad T(1 + i) = 3 + 2i.$$

*Para os pontos restantes, identificamos  $a = 2, b = 1, c = 1$  e  $d = -i$ ; assim  $-\frac{d}{c} = i$  e  $\frac{a}{c} = 2$ ; logo*

$$T(i) = T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad e \quad T(\infty) = \frac{a}{c} = 2.$$

## 4.2 Propriedade de preservação de círculos

Não é difícil ver que transformações lineares afins levam retas em retas e círculos em círculos. Para termos um estudo de como retas e círculos se comportam sob a ação de transformações de Möbius, primeiramente vamos estudar este comportamento considerando primeiramente a função  $g(z) = \frac{1}{z}$ . Para isto, faremos alguns resultados:

**Proposição 4.2.1** (Eixos real e imaginários). *A função  $g(z) = \frac{1}{z}$  leva o eixo real estendido no eixo real estendido e o eixo imaginário estendido no eixo imaginário estendido.*

**Demonstração:** Claramente

$$g(x + i0) = \frac{1}{x + i0} = \frac{1}{x},$$

logo  $g$  leva o eixo real estendido no eixo real estendido. A análise para o eixo imaginário é totalmente análoga. ■

**Proposição 4.2.2** (Retas verticais com  $x_0 \neq 0$ ). *Seja  $r = \{z = x_0 + iy\}$  uma reta vertical qualquer no plano complexo estendido com  $x_0 \neq 0$ . Então a imagem de  $r$  pela função  $g(z) = \frac{1}{z}$  é um círculo contendo o ponto  $z = 0$ .*

**Demonstração:** Temos

$$g(x_0 + iy) = \frac{1}{x_0 + iy} = \frac{x_0 - iy}{x_0^2 + y^2},$$

e por cálculos simples podemos mostrar que

$$\left| g(x_0 + iy) - \frac{1}{2x_0} \right| = \frac{1}{2|x_0|},$$

e portanto a imagem da reta  $r$  por  $g$  é um círculo. Como a reta  $r$  é ilimitada, o ponto  $\infty$  do plano complexo estendido pertence à  $r$  e como  $g(\infty) = 0$ , segue que 0 pertence ao círculo. ■

**Proposição 4.2.3** (Retas horizontais com  $y_0 \neq 0$ ). *Seja  $r = \{z = x + iy_0\}$  uma reta horizontal qualquer no plano complexo estendido com  $y_0 \neq 0$ . Então a imagem de  $r$  pela função  $g(z) = \frac{1}{z}$  é um círculo contendo o ponto  $z = 0$ .*

**Demonstração:** Análoga à proposição anterior, obtemos

$$\left| g(x + iy_0) + i\frac{1}{2y_0} \right| = \frac{1}{2|y_0|}.$$

Agora o próximo passo é ver como a função  $g(z) = \frac{1}{z}$  age sobre círculos. Como  $g^{-1}(z) = g(z)$  para todo  $z$  no plano complexo estendido, temos facilmente o nosso primeiro resultado, cuja demonstração segue do que fizemos acima, e é deixada a cargo do leitor. ■

**Proposição 4.2.4** (Círculos contendo 0). *Seja  $C$  um círculo no plano complexo com  $0 \in C$ . Então  $g(z) = \frac{1}{z}$  leva  $C$  em uma reta horizontal ou vertical.*

Agora, vejamos os outros casos.

**Proposição 4.2.5** (Círculos centrados em 0). *A função  $g(z) = \frac{1}{z}$  leva círculos centrados em 0 em círculos centrados em zero.*

**Demonstração:** Seja  $C = \{z = re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ , para algum  $r > 0$ . Assim  $g(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = r^{-1}e^{-i\theta}$ , que está no círculo de raio  $r^{-1}$  centrado em 0. ■

**Proposição 4.2.6** (Círculos não contendo e não centrados em 0). *A função  $g(z) = \frac{1}{z}$  leva círculos não contendo e não centrados em 0 em círculos não contendo e não centrados em 0.*

**Demonstração:** Considere um círculo  $C$  não contendo e não centrado em 0, que tem como equação  $|z - z_0| = r$ . Como  $C$  não contém 0, sabemos que  $|z_0| \neq r$ , e como  $C$  não está centrado em 0,  $z_0 \neq 0$ .

Temos

$$\left| g(z) - \frac{1}{z_0} \right| = \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z||z_0|} = \frac{r}{|z_0|} \cdot \left| \frac{1}{z} \right|,$$

e como  $|z_0| \neq r$ , segue que  $\frac{r}{|z_0|} \neq 1$  e o Exemplo 2.2.5 nos diz que a imagem de  $C$  por  $g$  é um círculo não centrado em 0 e não contendo 0. ■

Com estes resultados, fica simples verificar que estas mesmas propriedades valem para transformações de Möbius gerais. Estas propriedades estão no seguinte resultado, cuja demonstração fica a cargo do leitor.

**Teorema 4.2.7.** *Seja  $T$  uma transformação de Möbius da forma (4.1.1), então:*

1. *se  $C$  é um círculo, a imagem de  $C$  por  $T$  é ou um círculo ou uma reta no plano estendido. A imagem é uma reta se, e somente se,  $c \neq 0$  e o ponto  $z = -\frac{d}{c}$  está no círculo  $C$ ;*
2. *se  $r$  é uma reta, a imagem de  $r$  por  $T$  é ou uma reta ou um círculo no plano estendido. A imagem é um círculo se, e somente se,  $c \neq 0$  e o ponto  $z = -\frac{d}{c}$  não está na reta  $r$ .*

Além disso, se fixarmos três pontos  $z_1, z_2, z_3$  em  $C$  (ou em  $r$ ) e especificarmos  $Tz_1, Tz_2$  e  $Tz_3$ , a transformação  $T$  é única.

**Exemplo 4.2.8.** *Encontre a imagem do círculo unitário  $|z| = 1$  pela transformação de Möbius  $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ . Qual é a imagem do interior  $|z| < 1$  deste círculo?*

**Solução:** O ponto  $z = -\frac{d}{c} = 1$  está no círculo unitário  $|z| = 1$ , então pelo Teorema 4.2.7 a imagem deste círculo é uma reta. Como qualquer reta é determinada por dois pontos, encontremos dois valores na imagem de  $T$  para encontrá-la. Temos  $T(-1) = -\frac{1}{2}$  e  $T(i) = -\frac{1}{2} - i\frac{3}{2}$ , logo a imagem de  $T$  é a reta  $r = \{-\frac{1}{2} + iy : y \in \mathbb{R}\}$ .

Para responder a última pergunta, escolhemos um ponto de teste no disco unitário  $|z| < 1$ ; por exemplo,  $z = 0$ . Assim  $T(0) = -2$ , que está a esquerda da reta  $r$ , portanto a imagem do disco  $|z| < 1$  é o semiplano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < -\frac{1}{2}\}$ .

**Exemplo 4.2.9.** *Encontre a imagem do círculo  $|z| = 2$  pela transformação de Möbius  $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ . Qual é a imagem do disco  $|z| < 2$  por  $T$ ?*

**Solução:** O ponto  $z = -\frac{d}{c} = 1$  não está no círculo  $C \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ , então o Teorema 4.2.7 garante que a imagem de  $C$  é um círculo, que chamamos de  $\tilde{C}$ . Neste caso, para encontrar a descrição exata de  $\tilde{C}$ , notemos que  $C$  é simétrico com respeito ao eixo real; isto é, se  $z$  está em  $C$ , então  $\bar{z}$  também está.

Ainda, observamos que

$$T(\bar{z}) = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z} - 1} = \overline{\left(\frac{z + 2}{z - 1}\right)} = \overline{T(z)},$$

assim, se  $z \in C$  então ambos  $T(z)$  e  $\overline{T(z)} = T(\bar{z})$  estão em  $\tilde{C}$ . Logo, concluímos que  $\tilde{C}$  é simétrico com respeito ao eixo real. Como  $z = 2$  e  $z = -2$  estão em  $C$  e  $T(2) = 4$ ,  $T(-2) = 0$ , concluímos que  $\tilde{C}$  é o círculo de centro em 2 e raio 2; isto é,

$$\tilde{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 2\}.$$

Novamente, para responder a última pergunta, utilizando um ponto de teste, por exemplo  $z = 0$ , temos  $T(0) = -2$  que está fora de  $\tilde{C}$  e portanto a imagem de  $|z| < 2$  é a região  $|z - 2| > 2$ .

### 4.2.1 Orientação

**Definição 4.2.10.** Se  $C$  é um círculo, então uma tripla de pontos  $(z_1, z_2, z_3)$  de  $C$  é chamada de **orientação** de  $C$ . Analogamente, definimos uma orientação para a reta  $r$ .

Intuitivamente, três pontos em um círculo ou uma reta nos dão uma direção; isto é, nós “vamos” de  $z_1$  até  $z_2$  e de  $z_2$  até  $z_3$  (com somente dois pontos, isso claramente seria ambíguo). Além disso, se caminarmos no sentido dessa orientação, temos definidos o **lado direito** e o **lado esquerdo** do círculo ou da reta. Podemos então enunciar o *Princípio da Orientação*:

**Teorema 4.2.11.** Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2$  dois círculos (ou duas retas, ou um círculo e uma reta, ou uma reta e um círculo) e  $T$  uma transformação de Möbius tal que  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$ . Considere  $(z_1, z_2, z_3)$  uma orientação para  $\Gamma_1$ . Então  $T$  leva o lado direito (resp. esquerdo) de  $\Gamma_1$  no lado direito (resp. esquerdo) de  $\Gamma_2$ , com respeito à orientação  $(Tz_1, Tz_2, Tz_3)$  de  $\Gamma_2$ .

**Exemplo 4.2.12.** Qual a imagem do semiplano  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$  pela transformação de Möbius  $T$  que leva  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$  em  $w_1 = -1$ ,  $w_2 = i$ ,  $w_3 = -1$  (respectivamente)?

**Solução:** A orientação  $(z_1, z_2, z_3)$  do eixo real faz com que o semiplano  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$  seja o seu lado esquerdo. Pelo Teorema 4.2.11, a transformação  $T$  deve levar este conjunto

sobre o lado esquerdo do círculo  $|z| = 1$ , com a orientação dada por  $(w_1, w_2, w_3)$  que é o exterior  $\{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\}$ .  $\square$

## 4.3 Representação matricial

Quando trabalhamos com transformações de Möbius, é útil utilizar sua *representação matricial*, o que facilita muito o cálculo de compostas e inversas.

**Definição 4.3.1.** *Seja  $T$  uma transformação de Möbius dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

*A esta transformação associamos uma matriz  $A$ , definida por*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Note que, como para qualquer  $\lambda \neq 0$  complexo temos

$$T(z) = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)},$$

vemos que esta representação matricial não é única; isto é, a mesma transformação pode nos dar matrizes distintas.

É bem simples verificar (fica a cargo do leitor) que a composta  $T_2 \circ T_1$  de duas transformações de Möbius  $T_1$  e  $T_2$ , dadas por

$$T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \text{ e } T_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2},$$

é representada pelo produto matricial

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, a expressão para a inversa  $T^{-1}$  da transformação  $T$  é representada matricialmente pela inversa  $A^{-1}$  da matriz  $A$ , dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Como podemos eliminar qualquer número complexo não-nulo, concluímos que a repre-

sentação matricial de  $T^{-1}$  pode ser dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 4.3.2.** *Sejam  $T(z) = \frac{2z-1}{z+2}$  e  $S(z) = \frac{z-i}{iz-1}$ . Use a representação matricial para encontrar  $S^{-1} \circ T$ .*

**Solução:** *As representações matriciais de  $T$  e  $S$ , respectivamente, são*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

*Assim, a representação matricial de  $S^{-1}$  é*

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

*e portanto a representação matricial para  $S^{-1} \circ T$  é dada pelo produto*

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i & 1+2i \\ 1-2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

*Assim, sabemos que a transformação  $S^{-1} \circ T$  é dada por*

$$S^{-1} \circ T(z) = \frac{(-2+i)z + 1 + 2i}{(1-2i)z + 2 + i}.$$

## 4.4 Razão cruzada

Para terminar este capítulo, apresentamos o conceito de *razão cruzada*, que é útil para encontrar transformações de Möbius que levam três pontos determinados  $z_1, z_2$  e  $z_3$  em outros três pontos determinados  $w_1, w_2$  e  $w_3$ .

**Definição 4.4.1.** *A **razão cruzada** entre os números complexos  $z, z_1, z_2$  e  $z_3$  é o número complexo definido por*

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

**Observação 4.4.2** (CUIDADO!). *Lembre-se de verificar corretamente a ordem dos números complexos quando for calcular a razão cruzada. Ela é muito importante, e altera o resultado se for mudada. Por exemplo, mostre que  $(0, 1, i, 2) = \frac{3}{4} + i\frac{1}{4}$ , enquanto  $(0, i, 1, 2) = \frac{1}{4} - i\frac{1}{4}$ .*



Para completar a definição de razão cruzada em todo o plano complexo estendido, definimos

$$(\infty, z_1, z_2, z_3) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z, z_1, z_2, z_3).$$

Para apresentar o resultado principal da razão cruzada, faremos um lema.

**Lema 4.4.3.** *Suponha que  $T$  é uma transformação de Möbius tal que  $T(0) = 0$ ,  $T(1) = 1$  e  $T(\infty) = \infty$ . Então  $T(z) = z$  para todo  $z$  no plano complexo estendido.*

**Demonstração:** Seja  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Temos

$$\begin{aligned} 0 &= T(0) = \frac{b}{d}; \\ 1 &= T(1) = \frac{a+b}{c+d}; \\ \infty &= T(\infty) = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Logo temos  $b = 0$ ,  $c = 0$  e  $\frac{a}{d} = 1$ , logo  $T(z) = z$ , para todo  $z$  no plano complexo estendido. ■

O resultado a seguir ilustra muito bem a importância das razões cruzadas quando trabalhamos com transformações de Möbius.

**Teorema 4.4.4.** *Se  $T$  é uma transformação de Möbius e  $z_1, z_2, z_3$  são números complexos fixados distintos, então:*

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)).$$

**Demonstração:** Notemos primeiramente que se definirmos a função

$$R(z) = (z, z_1, z_2, z_3),$$

no plano estendido, então  $R$  é uma transformação de Möbius. Além disso, temos  $R(z_1) = 0$ ,  $R(z_2) = 1$  e  $R(z_3) = \infty$ . Defina  $w_1 = T(z_1)$ ,  $w_2 = T(z_2)$  e  $w_3 = T(z_3)$  (que são distintos, já que  $T$  é injetora) e

$$S(z) = (z, w_1, w_2, w_3).$$

Para  $S$ , temos  $S(w_1) = 0$ ,  $S(w_2) = 1$  e  $S(w_3) = \infty$ . Assim, se considerarmos a

transformação  $S \circ T \circ R^{-1}$ , vemos que

$$\begin{aligned} S \circ T \circ R^{-1}(0) &= S(T(R^{-1}(0))) = S(T(z_1)) = S(w_1) = 0; \\ S \circ T \circ R^{-1}(1) &= S(T(R^{-1}(1))) = S(T(z_2)) = S(w_2) = 1; \\ S \circ T \circ R^{-1}(\infty) &= S(T(R^{-1}(\infty))) = S(T(z_3)) = S(w_3) = \infty. \end{aligned}$$

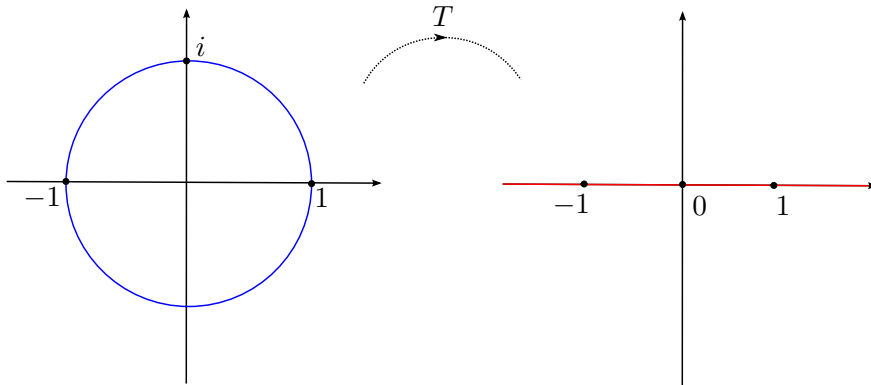
Segue então do Lema 4.4.3 que  $S \circ T \circ R^{-1}(z) = z$  para todo  $z$  no plano complexo estendido; equivalentemente, substituindo  $z$  por  $R(z)$ , temos

$$S \circ T(z) = R(z), \text{ para todo } z,$$

isto é  $(z, z_1, z_2, z_3) = (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$ . ■

Usando este teorema podemos construir transformações de Möbius que levam pontos  $z_1, z_2, z_3$  determinados em pontos  $w_1, w_2$  e  $w_3$  determinados, como veremos agora.

**Exemplo 4.4.5.** *Construa uma transformação de Möbius que leva o círculo unitário  $|z| = 1$  no eixo real.*



**Solução:** *Escolhemos três pontos distintos no círculo unitário  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$  e  $z_3 = -1$  e três pontos distintos no eixo real  $w_1 = -1$ ,  $w_2 = 0$  e  $w_3 = 1$ . Pelo Teorema 4.4.4, se  $w = T(z)$  é a transformação que buscamos, ela deve satisfazer*

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3).$$

Assim, usando a definição da razão cruzada, temos

$$\frac{z-1}{z+1} \frac{i+1}{i-1} = -\frac{w+1}{w-1},$$

e resolvendo esta equação na variável  $w$  temos

$$T(z) = w = \frac{z-i}{iz-1},$$

que é a transformação que buscamos.

Este exemplo é bastante interessante, e merece ser melhor explorado. Vamos ver o que acontece com o interior do círculo unitário, escolhendo o ponto de teste  $z = 0$ . Temos  $T(0) = i$ , logo o interior do disco é levado no semiplano  $\text{Im}(z) > 0$ .

Note que, se caminhamos ‘em cima’ do círculo  $|z| = 1$  seguindo a ordem dos pontos que escolhemos; isto é, indo de  $z_1$  para  $z_2$  e de  $z_3$  para  $z_3$ , o interior do círculo fica do nosso lado esquerdo. Caminhando pelo eixo real também no sentido dos pontos de escolhemos; isto é, de  $w_1$  para  $w_2$  e de  $w_2$  para  $w_3$ , o semiplano  $\text{Im}(z)$  também do nosso lado esquerdo.

Isso não é por acaso. É possível mostrar que a ordem na qual escolhemos os pontos definem onde cada “lado” será levado. Informalmente falando, o lado esquerdo vai no lado esquerdo e o direito vai no direito.

Imagine que no problema anterior, quiséssemos que o interior do disco fosse levado no semiplano  $\text{Im}(z) < 0$ . Como deveríamos proceder?

Refaçamos os cálculos escolhendo agora  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 0$  e  $w_3 = -1$ ; isto é, vamos inverter o lado para o qual estamos ‘caminhando’ (e portanto, direito e esquerdo se invertem).

Queremos

$$(z, 1, i, -1) = (w, 1, 0, -1),$$

e resolvendo esta equação em  $w$  temos

$$w = T(z) = \frac{-2z + 2i}{2iz - 2},$$

e vemos neste caso, que o ponto de teste  $z = 0$  é levado em  $T(0) = -i$  que está no semiplano inferior  $\text{Im}(z) < 0$ . Note que a orientação não foi alterada, porque  $T$  agora também leva o lado ‘esquerdo’ do disco no lado esquerdo do eixo real, considerando claro a orientação dada pelos pontos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  no círculo e  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  no eixo real.



---

# Integração complexa

---

Neste capítulo trabalharemos com integração de funções complexas. Na teoria da variáveis complexas, a integral tem um papel importantíssimo e nos dá resultados realmente impressionantes, se comparados aos resultados obtidos com integrais de funções em  $\mathbb{R}^2$ .

Para começar este estudo, é indispensável introduzirmos o conceito de curvas em  $\mathbb{C}$ ; e este é o objetivo da próxima seção.

## 5.1 Curvas no plano complexo

**Definição 5.1.1.** *Uma curva no plano complexo é uma aplicação contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , de um intervalo real  $[a, b]$  tomando valores complexos. Dada uma curva  $\gamma$  em  $\mathbb{C}$ , podemos escrever*

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \text{ para cada } t \in [a, b].$$

As equações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são chamadas de **equações paramétricas** de  $\gamma$ , e o conjunto  $\Gamma \doteq \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{C}$  é chamado de **traço** de  $\gamma$ .

**Exemplo 5.1.2.**

1.  $\gamma_1(t) = \cos t + i \sin t$ , para  $t \in [0, 2\pi]$ ;
2. Dados dois pontos distintos  $z_0, z_1$  do plano complexo, a curva  $\gamma_2(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ ,  $t \in [0, 1]$  é o segmento de reta que sai de  $z_0$  e vai até  $z_1$ ;

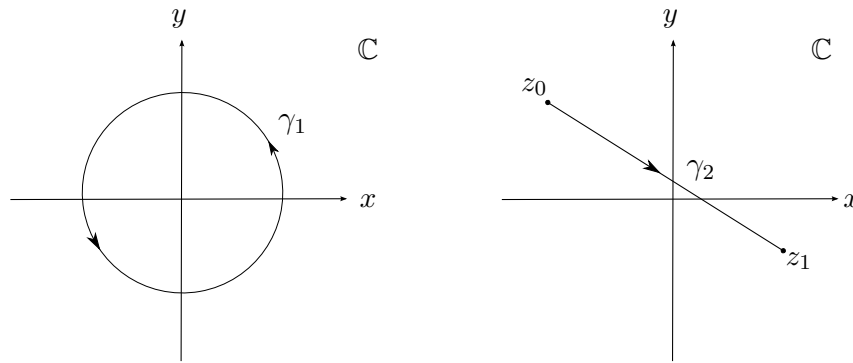


Figura 3: Traços das curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

Para uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , chamamos o ponto  $\gamma(a) = x(a) + iy(a)$  de **ponto inicial** e  $\gamma(b) = x(b) + iy(b)$  de **ponto final** da curva  $\gamma$ . À medida que  $t$  varia de  $a$  até  $b$ , imaginamos uma partícula se deslocando do ponto  $\gamma(a)$  até o ponto  $\gamma(b)$ .

**Definição 5.1.3.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva. Dizemos que  $\gamma$  é*

- (a) **suave** se  $\gamma$  é diferenciável com  $\gamma'(t)$  contínua em  $[a, b]$  e  $\gamma'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ ;
- (b) **suave por partes** se existe uma partição  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$  de  $[a, b]$  tal que  $\gamma|_{[t_{i+1}, t_i]}$  é uma curva suave, para cada  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;
- (c) **simples** se  $\gamma|_{(a,b)}$  é injetora;
- (d) **fechada** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Uma curva suave por partes, em análise complexa, é também chamada de **contorno** ou **caminho**.

Um conceito importante que está ligado às curvas é o conceito de *orientação*, que veremos a seguir.

**Definição 5.1.4** (Orientação para curvas não-fechadas). *Sejam  $z_0, z_1$  dois pontos distintos de  $\mathbb{C}$ . Fixado o par ordenado  $(z_0, z_1)$ , dizemos que uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  com  $\gamma(a) = z_0$  e  $\gamma(b) = z_1$  está **orientada positivamente com relação a  $(z_0, z_1)$** , ou simplesmente **orientada positivamente**. Se  $\gamma(a) = z_1$  e  $\gamma(b) = z_0$ , dizemos que  $\gamma$  está **orientada negativamente**.*

**Definição 5.1.5** (Orientação para curvas fechadas). *Dizemos que uma curva fechada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  está **orientada positivamente** se, ao caminharmos em cima da curva, na direção crescente de valores de  $t$ , a região interior da curva fica à nossa esquerda; equivalentemente, se caminhamos no sentido anti-horário. Caso contrário, dizemos que  $\gamma$  está **orientada negativamente**.*

Em qualquer um dos casos acima, dada uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , a curva  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t), \text{ para todo } t \in [a, b],$$

tem orientação contrária à orientação de  $\gamma$ .

## 5.2 Integrais complexas

Consideremos um contorno  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e assumamos que  $\gamma(t) \in G$ , para todo  $t \in [a, b]$ ; isto é,  $f$  está definida sobre todos os pontos da curva  $\gamma$ . Dizemos neste caso que  $\gamma$  está **inteiramente contida** em  $G$ .

Seja  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$  uma partição do intervalo  $[a, b]$  e defina  $\Delta t_i = [t_i, t_{i-1}]$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Esta partição  $P$  de  $[a, b]$  induz uma partição na curva  $\gamma$  da seguinte forma: tome

- $z_i = \gamma(t_i)$ , para cada  $i = 0, \dots, n$ ;
- $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .

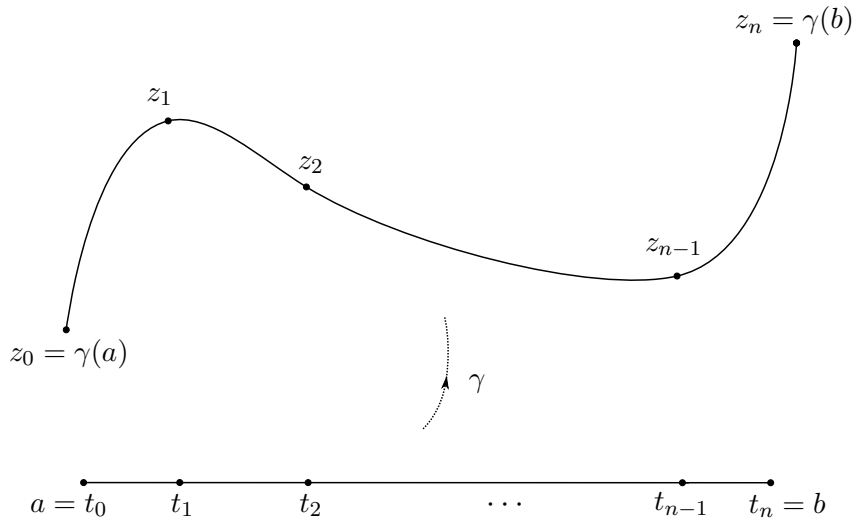


Figura 4: Partição induzida em  $\gamma$  por  $P$ .

Definimos a *norma* da partição  $P$  por  $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$ ; isto é, o comprimento do maior subintervalo de  $P$ . Além disso, para cada um destes subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$ , escolhemos um ponto  $t_i^*$  e definimos  $z_i^* = \gamma(t_i^*)$ . Definimos então a *soma* de  $f$  associada à partição  $P$  por

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(z_i^*) \Delta z_i.$$

Com todas estas considerações, podemos fazer a seguinte definição:

**Definição 5.2.1.** A integral complexa de  $f$  em  $\gamma$  é definida por

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(z_i^*) \Delta z_i,$$

quando este limite existe, independente da escolha dos pontos  $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ . Quando tal limite existe, dizemos que  $f$  é **integrável** sobre  $\gamma$ .

A seguinte proposição, cuja demonstração será deixada como exercício, garante uma grande quantidade de curvas e funções que cumprem a definição acima.

**Proposição 5.2.2.** Seja  $f$  uma função contínua em todos os pontos de uma curva  $\gamma$  suave por partes. Então  $f$  é integrável sobre  $\gamma$ .

**Demonstração:**

Com esta proposição, assumiremos daqui pra frente que todas as funções e curvas dadas satisfazem esta condição; isto é, a curva é suave por partes e a função é contínua sobre todos os pontos da curva.

**Observação 5.2.3** (Notação). Quando  $\gamma$  é uma curva fechada, denotamos a integral de  $f$  sobre  $\gamma$  por

$$\oint_{\gamma} f(z)dz.$$

Um resultado que nos diz como calcular integrais em determinadas situações é o seguinte:

**Teorema 5.2.4.** Seja  $f$  uma função contínua numa curva suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

**Exemplo 5.2.5.**

1. Calcule  $\int_{\gamma} \bar{z}dz$ , onde  $\gamma(t) = 3t + it^2$ , para  $t \in [-1, 4]$ .

**Solução:** Temos  $\overline{\gamma(t)} = 3t - it^2$  e também  $\gamma'(t) = 3 + i2t$ , assim

$$\int_{\gamma} \bar{z}dz = \int_{-1}^4 (3t - it^2) \cdot (3 + i2t)dt = \int_{-1}^4 [2t^3 + 9t + i3t^2]dt = 195 + i65.$$

2. Calcule  $\oint_{\gamma} f(z)dz$ , onde  $f(z) = \frac{1}{z}$  e  $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .



**Solução:** Temos  $\gamma(t) = e^{it}$  e assim  $f(\gamma(t)) = e^{-it}$  e  $\gamma'(t) = ie^{it}$ , portanto

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_0^{2\pi} ie^{-it}e^{it}dt = i \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi i.$$

No que segue, listamos algumas propriedades de integrais de funções sobre curvas suaves.

**Proposição 5.2.6** (Propriedades). *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções contínuas num domínio  $D$ , e  $\gamma$  uma curva inteiramente contida em  $D$ . Então:*

- (a)  $\int_{\gamma} cf(z)dz = c \int_{\gamma} f(z)dz$ , onde  $c$  é um número complexo fixado;
- (b)  $\int_{\gamma} [f(z) + g(z)]dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma} g(z)dz$ ;
- (c)  $\int_{\gamma} f(z)dz = - \int_{-\gamma} f(z)dz$ .

Note que tudo que fizemos desde o Teorema 5.2.4 foi considerando que  $\gamma$  é uma curva suave. Mas e se quisermos tomar uma curva  $\gamma$  suave por partes? Como fazemos então?

Notemos que se  $\gamma$  é uma curva por partes, podemos escrever  $\gamma$  como uma concatenação de curvas suaves  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \dots, \gamma_k$ , onde  $\gamma_i$  começa no ponto final de  $\gamma_{i-1}$ , para cada  $i = 1, \dots, k - 1$ ; e neste caso, escrevemos  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ .

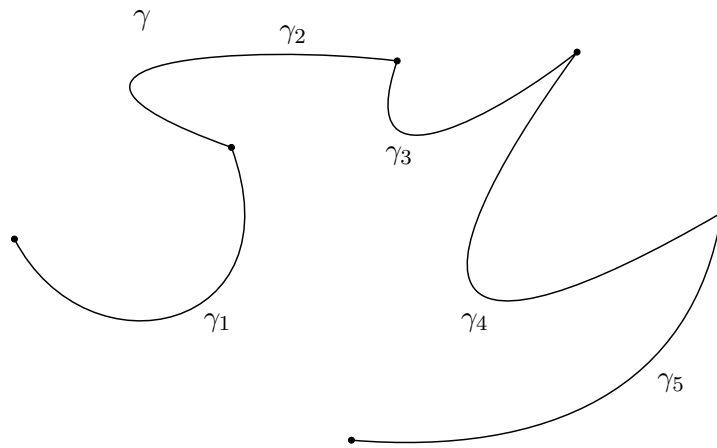


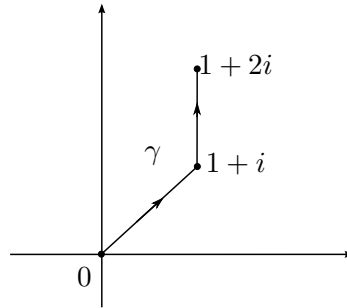
Figura 4: Exemplo de uma curva  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$ , suave por partes.

Temos então, com estas notações, o seguinte resultado

**Proposição 5.2.7.** *Se  $f$  é contínua sobre uma curva  $\gamma$  suave por partes e  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ , então:*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

**Exemplo 5.2.8.** Calcule a integral  $\int_{\gamma} f(z)dz$ , onde  $f(x+iy) = x^2 + iy^2$  e  $\gamma$  é o contorno dado na figura abaixo:



**Solução:** Podemos escrever  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ , onde

$$\gamma_1(t) = t + it \text{ e } \gamma_2(t) = 1 + i(1+t), \text{ para } t \in [0, 1].$$

Assim, temos

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 (t^2 + it^2) \cdot (1+i)dt = (1+i)^2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}i,$$

e analogamente, mostramos que

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = -\frac{7}{3} + i.$$

A proposição acima nos dá que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}i.$$

O resultado a seguir nos dá uma limitação para o valor da integral de uma função  $f$  sobre uma curva  $\gamma$ , em termos de uma limitação para  $f$  e do comprimento da curva.

**Teorema 5.2.9.** Assuma que  $f$  é contínua sobre uma curva suave  $\gamma$  e que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in \Gamma$ . Então, se  $c(\gamma)$  denota o comprimento da curva  $\gamma$ , temos que

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq Mc(\gamma).$$

**Demonstração:** Seja  $P$  uma partição de  $[a, b]$  e  $S(f, P)$  a soma de  $f$  associada à  $P$ . Então

$$|S(f, P)| = \left| \sum_{i=1}^n f(z_i^*) \Delta z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(z_i^*)| |\Delta z_i| \leq M \sum_{i=1}^n |\Delta z_i|,$$

uma vez que  $|f(z_i^*)| \leq M$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Como  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\Delta z_i| = c(\gamma)$ , temos

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} |S(f, P)| \leq M \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\Delta z_i| = Mc(\gamma).$$

■

**Exemplo 5.2.10.** *Encontre uma cota superior para o valor absoluto de  $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z+1} dz$  onde  $\gamma$  é o círculo  $|z| = 4$ .*

**Solução:** *Primeiramente, sabemos que o comprimento de  $\gamma$  é  $8\pi$ ; isto é,  $c(\gamma) = 8\pi$ . Agora, sabemos da Proposição 2.2.4, que*

$$|z + 1| \geq |z| - 1 = 3;$$

e também  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ , e para  $|z| = 4$ , o maior valor para  $\operatorname{Re}(z)$  é 4; portanto  $|e^z| \leq e^4$  e assim

$$\left| \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z+1} dz \right| \leq \frac{8\pi e^4}{3}.$$

## 5.3 O Teorema de Cauchy-Goursat

O Teorema de Cauchy-Goursat é um dos resultados principais da teoria de funções de variáveis complexas, e é utilizado em inúmeras aplicações. Mas, antes de enunciá-lo, precisamos de alguns conceitos adicionais. Lembremos que um *domínio*  $D$  é um conjunto aberto e conexo por caminhos.

**Definição 5.3.1.** *Dizemos que um domínio  $D$  é simplesmente conexo se todo contorno fechado simples inteiramente contido em  $D$  pode ser deformado continuamente em um ponto. Basicamente, estamos dizendo que  $D$  não tem buracos.*

### Exemplo 5.3.2.

1. O plano complexo  $\mathbb{C}$  é simplesmente conexo.
2. O anel formado pelos pontos  $z \in \mathbb{C}$  tais que  $1 < |z| < 2$  não é simplesmente conexo.

**Definição 5.3.3.** *Um domínio que não é simplesmente conexo é chamado de **multiplamente conexo**; isto é, o domínio  $D$  possui buracos. Se o domínio  $D$  possui um buraco ele é chamado **duplamente conexo**, se tem dois buracos ele é chamado **triplamente conexo**, e assim por diante.*

Com estas definições, podemos enunciar primeiramente o Teorema de Cauchy, que foi provado pelo próprio Cauchy em 1825.

**Teorema 5.3.4** (Teorema de Cauchy). *Seja  $f$  uma função analítica num domínio simplesmente conexo  $D$ , e assumamos que  $f'$  é contínua em  $D$ . Então para cada contorno fechado simples em  $D$ , temos*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

A demonstração deste resultado será omitida, mas ela é uma aplicação direta do Teorema de Green para funções em  $\mathbb{R}^2$ , juntamente com as equações de Cauchy-Riemann.

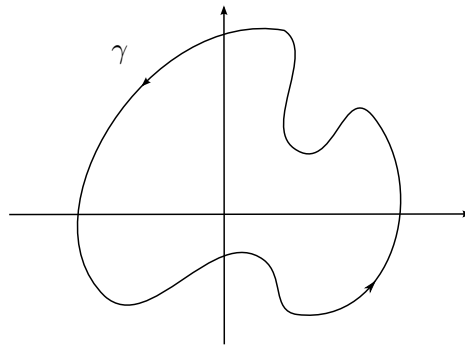
Algum tempo depois, em 1883, Goursat conseguiu provar o Teorema de Cauchy, sem a hipótese de que  $f'$  é contínua em  $D$ . Com isto, temos o tão famoso Teorema de Cauchy-Goursat.

**Teorema 5.3.5** (Teorema de Cauchy-Goursat). *Assumamos que  $f$  é analítica em um domínio  $D$ . Então para todo contorno fechado simples  $\gamma$  em  $D$ , temos*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

O Teorema de Cauchy-Goursat pode ainda ser dito de uma forma mais simples: se  $f$  é analítica em uma curva  $\gamma$  e em seu interior, então  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

**Exemplo 5.3.6.** *Calcule  $\oint_{\gamma} e^z dz$ , onde  $\gamma$  é o contorno mostrado na figura abaixo:*



**Solução:** *Seria muito complicado calcular esta integral utilizando o Teorema 5.2.4, uma vez que a curva é difícil de ser parametrizada. Assim, vamos usar o Teorema de Cauchy-Goursat. Como  $f(z) = e^z$  é uma função inteira,  $f$  é analítica em  $\gamma$  e seu interior e portanto, segue que*

$$\oint_{\gamma} e^z dz = 0.$$

A ideia principal do exemplo acima é que  $\oint_{\gamma} e^z dz = 0$  para qualquer curva fechada simples  $\gamma$ . O mesmo é verdade para as funções inteiras  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Vejamos agora um exemplo com uma função que não é inteira.

**Exemplo 5.3.7.** Calcule  $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ , onde  $\gamma$  é o círculo  $|z - 2| = 1$ .

**Solução:** Sabemos que  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  não é uma função inteira, pois esta função não está definida para  $z = 0$ ; mas  $f$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Como  $z = 0$  não está sobre a curva  $\gamma$  nem em seu interior, sabemos que  $f$  é analítica em  $\gamma$  e em seu interior. Portanto, o Teorema de Cauchy-Goursat se aplica, e temos

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

### 5.3.1 Domínios multiplamente conexos

Para um domínio multiplamente conexo, não podemos tirar as mesmas conclusões do Teorema de Cauchy-Goursat; isto é, não é sempre verdade que a integral de uma função analítica neste domínio é nula, como veremos no seguinte exemplo.

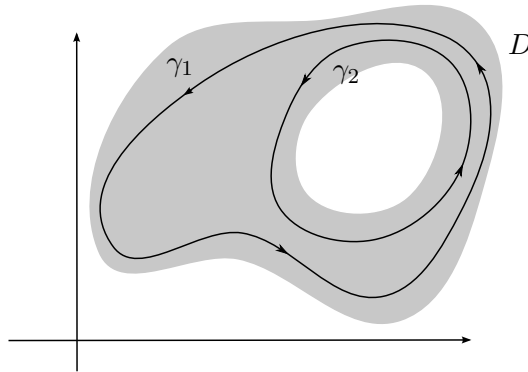
**Exemplo 5.3.8.** Mostre que a integral  $\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$ , onde  $\gamma$  é um círculo centrado em  $z_0$ .

**Solução:** Como  $z_0$  está no interior de  $\gamma$ , a função  $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$  não é analítica no interior de  $\gamma$ . Faremos este exemplo parametrizando a curva  $\gamma$ .

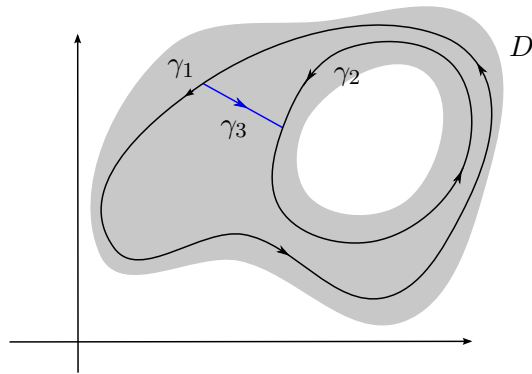
Uma possível parametrização para um círculo centrado em  $\gamma$  é  $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$ , com  $t \in [0, 1]$ . Logo

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^1 \frac{2\pi i r e^{2\pi i t}}{r e^{2\pi i t}} dt = 2\pi i \int_0^1 1 dt = 2\pi i.$$

Considere então o domínio  $D$  duplamente conexo e as curvas  $\gamma_1, \gamma_2$ , orientadas positivamente, como dados na figura abaixo:



Colocamos agora nessa figura um segmento de reta  $\gamma_3$ , que une as curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , como na seguinte figura:



Considerando a curva  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_3 \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3)$ , o domínio formado pelo interior dessa curva é um domínio simplesmente conexo e se  $f$  é uma função analítica em  $\gamma$  e em seu interior, temos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Pela Proposição 5.2.7 e o item (c) da Proposição 5.2.6 temos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz + \oint_{-\gamma_3} f(z) dz,$$

e portanto

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz,$$

e este é o chamado **princípio da deformação de curvas**.

**Observação 5.3.9.** Note que em  $\gamma$ , consideramos  $-\gamma_2$ , pois é a curva que dá a orientação positiva.

Este raciocínio pode ser aplicado para um domínio multiplamente conexo e uma quantidade finita de curvas, e podemos então enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 5.3.10** (Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos). *Sejam  $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_k$  curvas fechadas e simples, satisfazendo:*

- (i)  $\gamma_i$  está no interior de  $\gamma$ , para cada  $i = 1, \dots, k$ ;
- (ii) curvas distintas não se intersectam;
- (iii) nenhuma curva  $\gamma_i$  está no interior de nenhuma curva  $\gamma_j$ , para  $i, j = 1, \dots, k$ ;
- (iv) todas as curvas estão orientadas positivamente.

Assim, se  $f$  é analítica na região formada pela compreendida entre a curva  $\gamma$  e seu interior, e as curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  e seus exteriores (vide exemplo na figura abaixo), então

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^k \oint_{\gamma_i} f(z)dz.$$

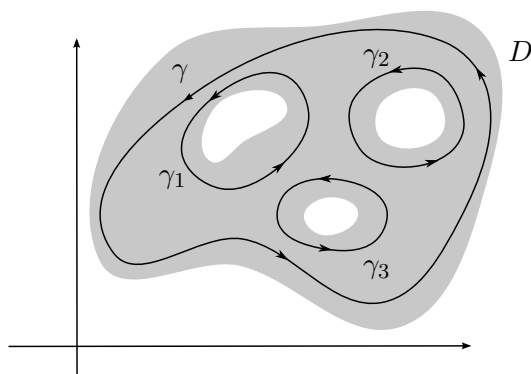


Figura 5: Exemplo de curvas e região dadas no teorema acima.

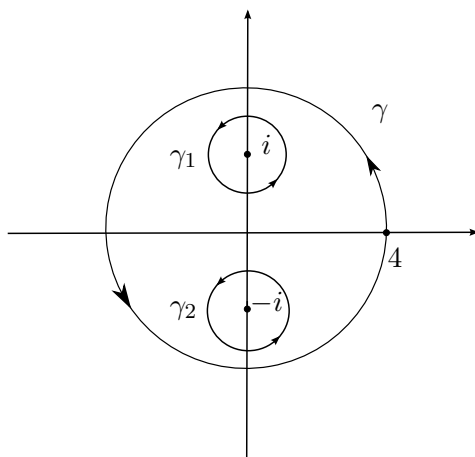
**Exemplo 5.3.11.** Utilize o Teorema 5.3.10 para calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}$ , onde  $\gamma$  é o círculo  $|z| = 4$ .

**Solução:** Como  $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ , segue que a função  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$  não é analítica em  $z = i$  e em  $z = -i$ , e ambos estes pontos estão no interior da região delimitada pela curva  $\gamma$ .

Assim, segue do Teorema 5.3.10 que

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+1} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+1},$$

onde  $\gamma_1$  é o círculo de raio  $\frac{1}{2}$  em torno de  $z = i$  e  $\gamma_2$  é o círculo de raio  $\frac{1}{2}$  em torno de  $z = -i$ , como mostrado na figura abaixo:



Usando a decomposição em frações parciais, temos

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z - i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{z + i},$$

e assim

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z - i} - \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z + i} + \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z - i} - \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z + i}.$$

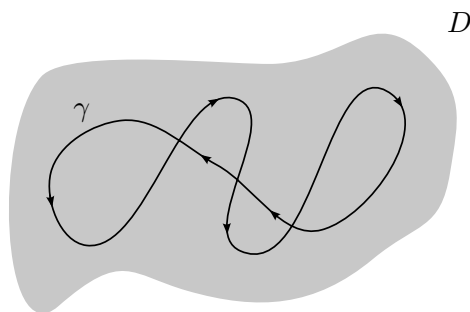
Mas a função  $\frac{1}{z+i}$  é analítica em  $\gamma_1$  e em seu interior, e a função  $\frac{1}{z-i}$  é analítica em  $\gamma_2$  e seu interior, logo a segunda e a terceira integrais no lado direito da expressão acima são nulas, pelo Teorema de Cauchy-Goursat. Portanto

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z - i} - \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z + i}.$$

Parametrizando estas curvas e calculando cada uma destas integrais pela definição, como no Exemplo 5.3.8, chegamos em

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi - \pi = 0.$$

**Observação 5.3.12** (ATENÇÃO!). Tudo que fizemos até agora, foi assumindo que as curvas fossem contornos simples; isto é, as curvas não tinham auto-intersecção. Apesar de não apresentarmos a demonstração, o Teorema de Cauchy-Goursat é válido também para qualquer contorno fechado  $\gamma$  num domínio simplesmente conexo  $D$ , como por exemplo, para o que aparece na figura abaixo:



Contorno fechado não-simples  $\gamma$  em um domínio simplesmente conexo.

Neste caso, se  $f$  é uma função analítica em  $D$ , temos  $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$ .



## 5.4 A fórmula integral de Cauchy

Se uma função  $f$  é analítica num domínio simplesmente conexo  $D$  e  $z_0$  é um ponto qualquer de  $D$ , então a função quociente  $\frac{f(z)}{z-z_0}$  não está definida no ponto  $z_0$  e portanto, não é analítica em  $D$ . Sendo assim, não podemos utilizar o Teorema de Cauchy-Goursat e concluir que a integral de  $\frac{f(z)}{z-z_0}$  é zero sobre um contorno fechado que contém  $z_0$  no seu interior.

Em geral, esta integral não zera 0, e isto é o que mostra a **fórmula integral de Cauchy**.

**Teorema 5.4.1** (Fórmula integral de Cauchy). *Suponha que  $f$  é analítica num domínio simplesmente conexo  $D$  e  $\gamma$  é um contorno fechado e simples inteiramente contido em  $D$ , orientado positivamente. Então, para qualquer ponto  $z_0$  no interior de  $\gamma$ , temos*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \quad (5.4.1)$$

**Demonstração:** Seja  $D$  um domínio simplesmente conexo,  $\gamma$  um contorno fechado e simples inteiramente contido em  $D$  e  $z_0$  um ponto interior ao contorno  $\gamma$ . Além disso, seja  $\gamma_1$  a fronteira de um disco centrado em  $z_0$  que está inteiramente contido no interior de  $\gamma$ , orientada positivamente.

Pelo princípio da deformação de curvas, sabemos que

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Assim, calcularemos o valor da integral da direita. Para isto, somamos e subtraímos  $f(z_0)$  no numerador:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z-z_0} dz \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz + f(z_0) \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z-z_0}, \end{aligned}$$

e utilizando o Exemplo 5.3.8, obtemos

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz + 2\pi i f(z_0). \quad (5.4.2)$$

Ainda, como  $f$  é contínua, sabemos que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|z - z_0| < \delta$  então  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ . Assumindo que  $\delta$  é pequeno o suficiente de maneira que se escolhermos  $\gamma_2$  como sendo o círculo  $|z - z_0| = \frac{\delta}{2}$ , temos  $\gamma_2$  inteiramente contida no interior

de  $\gamma_1$ , temos do princípio da deformação de curvas e do Teorema 5.2.9 que

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_2} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz,$$

e também

$$\left| \oint_{\gamma_2} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq 2 \frac{\epsilon \pi \delta}{\delta} = 2\pi\epsilon.$$

Isto significa que, podemos fazer a integral  $\oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$  arbitrariamente pequena; o que só ocorre se ela for zero. Portanto

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0,$$

e assim, substituindo na equação (5.4.2), temos o resultado. ■

**Exemplo 5.4.2.** Calcule  $\oint_{\gamma} \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz$ , onde  $\gamma$  é o círculo  $|z| = 2$ .

**Solução:** Primeiramente identificamos  $f(z) = z^2 - 4z + 4$  e  $z_0 = -i$ . Como  $z_0$  está no interior de  $\gamma$  e  $f$  é analítica em todos os pontos de  $\gamma$  e do seu interior, podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy, e obtemos

$$\oint_{\gamma} \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = \pi(-8 + 6i).$$

**Exemplo 5.4.3.** Calcule  $\oint_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 9} dz$ , onde  $\gamma$  é o círculo  $|z - 2i| = 4$ .

**Solução:** Fatorando o denominador como  $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ , podemos ver que  $z_0 = 3i$  é o único ponto no interior de  $\gamma$ , onde o integrando deixa de ser analítico. Podemos então reescrever o integrando como

$$\frac{z}{z^2 + 9} = \frac{f(z)}{z - 3i},$$

onde  $f(z) = \frac{z}{z + 3i}$ . A função  $f$  é analítica em todos os pontos de  $\gamma$  e em seu interior, portanto, pela fórmula integral de Cauchy, temos

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 9} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - 3i} dz = 2\pi i f(3i) = \pi i.$$

## 5.5 A fórmula integral de Cauchy para derivadas

Agora veremos que a fórmula integral de Cauchy tem um análogo para avaliar as derivadas  $f^{(n)}(z_0)$  de uma função analítica  $f$  no ponto  $z_0$ , para  $n = 1, 2, \dots$ .

**Teorema 5.5.1** (Fórmula integral de Cauchy para derivadas). *Assuma que  $f$  é analítica num domínio simplesmente conexo  $D$  e  $\gamma$  é um contorno fechado simples, inteiramente contido em  $D$ , orientado positivamente. Então, para qualquer ponto  $z_0$  no interior de  $\gamma$ , temos*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (5.5.1)$$

**Exemplo 5.5.2.** Calcule  $\oint_{\gamma} \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz$ , onde  $\gamma$  é o círculo  $|z| = 1$ .

**Solução:** Notamos primeiramente que o integrando deixa de ser analítico nos pontos  $z = 0$  e  $z = -2i$ ; mas somente  $z = 0$  está no interior de  $\gamma$ . Assim, identificamos  $z_0 = 0$  e escrevemos o integrando como

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3} = \frac{f(z)}{z^3},$$

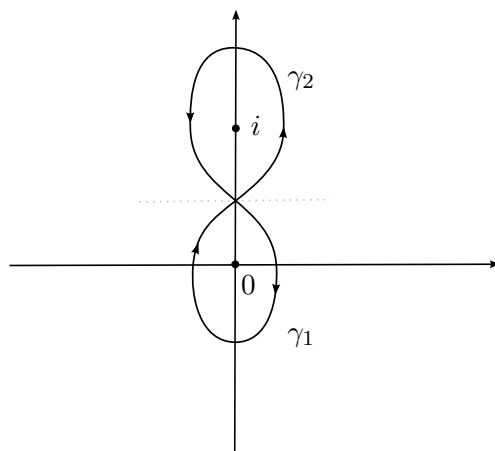
onde  $f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$ . Note que  $f$  é analítica em todos os pontos de  $\gamma$  e de seu interior, e a fórmula integral de Cauchy para derivadas nos dá

$$\oint_{\gamma} \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0).$$

Como  $f''(z) = \frac{2-4i}{(z+2i)^3}$ , temos  $f''(0) = \frac{2i-1}{4i}$  e portanto

$$\oint_{\gamma} \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}i.$$

**Exemplo 5.5.3.** Calcule  $\oint_{\gamma} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz$ , onde  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  é a ‘figura oito’ da figura abaixo.



**Solução:** Apesar de  $\gamma$  não ser um contorno fechado simples,  $\gamma$  é a união de duas curvas  $\gamma_1, \gamma_2$  como indicado na figura acima. Claramente vemos que  $\gamma_1$  está orientada negativa-

mente, logo

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz \\ &= - \oint_{-\gamma_1} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz. \end{aligned}$$

e agora tanto  $-\gamma_1$  e  $\gamma_2$  estão orientadas positivamente.

Em  $-\gamma_1$  e no seu interior, vemos que  $z_0 = 0$  é o único ponto na qual  $\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}$  deixa de ser analítica; assim, identificamos  $f_1(z) = \frac{z^3+3}{(z-i)^2}$ , e temos de (5.4.1) que

$$\oint_{-\gamma_1} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = \oint_{-\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z} dz = 2\pi i f_1(0) = -6\pi i.$$

Em  $\gamma_2$  e no seu interior, vemos que  $z_0 = i$  é o único ponto onde  $\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}$  deixa de ser analítica; assim, identificamos  $f_2(z) = \frac{z^3+3}{z}$ , e temos de (5.5.1) que

$$\oint_{\gamma_2} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i f_2'(i) = -4\pi + 6\pi i.$$

Somando os dois resultados, temos

$$\oint_{\gamma} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = -4\pi + 12\pi i.$$

## 5.6 Consequências das fórmulas integrais de Cauchy

Nesta seção mostraremos algumas importantes consequências que as fórmulas integrais de Cauchy trazem para as funções de uma variável complexa.

### 5.6.1 Derivadas de funções analíticas

O Teorema 5.5.1 nos dá uma consequência impressionante para funções de variável complexa, e está longe de ser válida para funções reais de duas variáveis. Note que o Teorema 5.5.1 nos dá a existência das derivadas de todas as ordens de uma função complexa analítica, bem como uma fórmula para calculá-las. Temos então o seguinte resultado:

**Teorema 5.6.1.** *Assuma que  $f$  é analítica num domínio simplesmente conexo  $D$ . Então  $f$  tem todas as derivadas de todas as ordens, em todos os pontos de  $D$ , e todas as suas derivadas são funções analíticas.*

**Observação 5.6.2.**

1. O teorema acima nos diz que se uma função  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  é analítica num domínio simplesmente conexo  $D$ , então ela possui todas as derivadas de todas as ordens. Assim, podemos também concluir que  $u, v$  são funções continuamente diferenciáveis que tem derivadas parciais de todas as ordens, e todas são contínuas, em todos os pontos de analiticidade de  $f$ .
2. Se  $u, v$  são funções que não possuem todas as derivadas parciais de todas as ordens, a função dada por  $f = u + iv$  não pode ser analítica.

**5.6.2 Desigualdade de Cauchy**

Usando a fórmula de Cauchy para derivadas, podemos tirar uma desigualdade muito importante, que nos dá uma estimativa superior para a norma das derivadas de uma função analítica  $f$ .

**Teorema 5.6.3** (Desigualdade de Cauchy). *Suponha que  $f$  é uma função analítica num domínio simplesmente conexo  $D$  e  $\gamma$  é um círculo definido por  $|z - z_0| = r$  que está inteiramente contido em  $D$ . Se  $|f(z)| \leq M$  em todos os pontos  $z \in \gamma$ , então*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

**Demonstração:** Fixe  $n \geq 1$ . Como  $|f(z)| \leq M$  em  $\gamma$  e  $|z - z_0| = r$ , temos

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r^{n+1}}.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy para derivadas e o Teorema 5.2.9, temos

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \left| \frac{n!}{2\pi i} \right| \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

■

Note que a constante  $M$  depende do círculo  $|z - z_0| = r$ ; mas, aplicando este resultado para  $n = 0$ , vemos que temos  $|f(z_0)| \leq M$ , para qualquer círculo centrado em  $z_0$  inteiramente contido em  $D$ . Em outras palavras, a limitação  $M$  para  $|f(z)|$  em  $\gamma$  nunca pode ser menor do que  $|f(z_0)|$ .

**5.6.3 Teorema de Liouville**

Utilizaremos agora o Teorema 5.6.3 para mostrar uma aplicação importantíssima no estudo de funções de variável complexa.

**Teorema 5.6.4** (Teorema de Liouville). *Uma função inteira  $f$  é limitada se, e somente se,  $f$  é constante.*

**Demonstração:** Assuma que  $f$  é uma função inteira e limitada; isto é,  $|f(z)| \leq M$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Então, para qualquer ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  e qualquer círculo  $|z - z_0| = r$ , podemos aplicar o Teorema 5.6.3 e obter  $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ . Como podemos fazer  $r$  tão grande quanto quisermos, temos que  $|f'(z_0)| = 0$ , o que implica que  $f'(z_0) = 0$ , para todo  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Pelo item (b) da Proposição 3.5.14, temos que  $f$  é constante em  $\mathbb{C}$ . ■

**Exemplo 5.6.5.** *As funções  $e^z$ ,  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$ ,  $p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$  são funções inteiras e não constantes, assim o Teorema de Liouville implica que nenhuma delas pode ser limitada em  $\mathbb{C}$ .*

### 5.6.4 O Teorema Fundamental da Álgebra

Com a teoria de variáveis complexas, usando o Teorema de Liouville, podemos agora demonstrar um dos principais resultados da álgebra de polinômios - que dificilmente é demonstrado com outras técnicas - de maneira bastante simples e direta.

**Teorema 5.6.6** (Teorema Fundamental da Álgebra). *Seja  $p(z)$  um polinômio não constante. Então  $p$  tem pelo menos uma raiz complexa.*

**Demonstração:** Assuma que  $p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ ,  $c_n \neq 0$ , não possua nenhuma raiz complexa; isto é, assumamos que  $p(z) \neq 0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Então podemos definir a função  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ , e esta é uma função inteira, já que o denominador nunca se anula.

Mas temos

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} = \frac{1}{|c_nz^n + \dots + c_1z + c_0|} = \frac{1}{|z|^n |c_n + \dots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n}|}.$$

Assim, vemos que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ ; o que implica facilmente que a função  $f(z)$  é limitada para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Segue do Teorema de Liouville que  $f(z)$  deve ser constante, o que implica que  $p(z)$  é constante, e nos dá uma contradição e completa a demonstração. ■

### 5.6.5 O Teorema do Módulo Máximo

O Teorema do Módulo Máximo é uma ferramenta importante quando trabalhamos com estimativas de funções complexas. Ele garante que para encontrar o máximo valor para o módulo de uma função complexa em uma região fechada, basta olhar para o módulo de  $f$  nos pontos da fronteira dessa região.

**Teorema 5.6.7** (Teorema do Módulo Máximo). *Assuma que  $f$  é analítica em uma região  $D$  limitada por uma curva fechada simples  $\gamma$ . Então o módulo  $|f(z)|$  atinge seu máximo em  $\gamma$ .*

**Exemplo 5.6.8.** *Encontre o valor máximo para o módulo da função  $f(z) = 2z + 5i$  no disco fechado dado por  $|z| \leq 2$ .*

**Solução:** *Como  $f$  é um polinômio,  $f$  é analítica em  $|z| \leq 2$ , e segue do Teorema do Módulo Máximo que só precisamos encontrar uma estimativa do módulo de  $f$  para os pontos na fronteira da região dada; neste caso, o círculo  $|z| = 2$ . Temos, para  $|z| = 2$ , que*

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= f(z) \cdot \overline{f(z)} = (2z + 5i)(2\bar{z} - 5i) = 4z\bar{z} - 10i(z - \bar{z}) + 25 \\ &= 4|z|^2 + 20\text{Im}(z) + 25 = 41 + 20\text{Im}(z). \end{aligned}$$

*Sabemos que o valor máximo para a expressão acima ocorre quando o máximo de  $\text{Im}(z)$  é atingida, para  $|z| = 2$ , e este valor ocorre quando  $z = 2i$ ; isto é,  $\text{Im}(z) = 2$ . Logo*

$$\max_{|z| \leq 2} |f(z)| = \sqrt{41 + 20 \cdot 2} = 9.$$





---

# Séries complexas e resíduos

---

No capítulo anterior, vimos que dada uma função  $f$  analítica num ponto  $z_0$ , ela possui todas as derivadas de todas as ordens neste ponto, e todas elas são funções analíticas em  $z_0$ ; sendo assim, podemos sempre expandir uma função analítica num ponto  $z_0$  em uma série de Taylor numa vizinhança de  $z_0$ . Porém se  $f$  deixa de ser analítica num ponto  $z_0$ , veremos que poderemos expandir  $f$  num outro tipo de série numa vizinhança de  $z_0$ , que é chamada de *série de Laurent*. Com a séries de Laurent, surge naturalmente a definição de *resíduo* de uma função num ponto  $z_0$ , e isto nos levará a um resultado incrível para o cálculo de integrais.

## 6.1 Sequências e séries complexas\*

Muito da teoria de sequências e séries complexas é análoga à teoria real. Vamos nesta seção olhar brevemente as definições e resultados que precisaremos. No que segue  $\mathbb{N}$  denota o conjunto dos números naturais e  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros.

**Definição 6.1.1.** Uma **sequência** de números complexos  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos, com contradomínio complexo. Em outras palavras, para cada natural  $n$ , associamos um número complexo  $z_n$ .

Dizemos que a sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** para um número complexo  $L$ , se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|z_n - L| < \epsilon$ , para  $n \geq n_0$ . Neste caso, dizemos que o limite de  $\{z_n\}$  é  $L$ , e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L \text{ ou } z_n \rightarrow L, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Quando uma sequência não é convergente, dizemos que ela é **divergente**.

Fica a cargo do leitor verificar que se uma sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $L_1$  e  $L_2$ , então  $L_1 = L_2$ ; em outras palavras, o limite (quando existe) é único.

**Definição 6.1.2.** *Dada uma sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , consideramos uma sequência  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Dizemos que  $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma **subsequência** de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .*

**Proposição 6.1.3** (Critério de divergência para sequências). *Se existem duas subsequências de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que convergem para números complexos distintos, então a sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é divergente.*

**Exemplo 6.1.4.** *As sequências  $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\frac{i^{n+1}}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  são convergentes. Já  $\{i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência divergente.*

Temos um critério de convergência que liga a teoria de sequências complexas e reais.

**Proposição 6.1.5** (Critério para convergência). *Uma sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para um número complexo  $L = a + ib$  se, e somente se,  $\{\operatorname{Re}(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $a$  e  $\{\operatorname{Im}(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $b$ .*

**Exemplo 6.1.6.** *Considere a sequência  $\{\frac{3+in}{n+2ni}\}_{n \in \mathbb{N}}$  e calcule seu limite.*

**Solução:** *Sabemos que*

$$z_n \doteq \frac{3+in}{n+2in} = \frac{2n^2+3n}{5n^2} + i \frac{n^2-6n}{5n^2},$$

e assim vemos que  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $L = \frac{2}{5} + i\frac{1}{5}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Considere uma sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Definimos uma outra sequência  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  associada à  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por

$$S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} + z_n = \sum_{k=0}^n z_k.$$

A sequência  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é chamada sequência das **somas parciais** de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Quando a sequência  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente, dizemos que a **série** de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente e denotamos este limite por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Agora, vamos relembrar alguns critérios para convergência e divergência de séries complexas.

**Proposição 6.1.7** (Teste da divergência). *Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ , então  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  diverge.*

**Definição 6.1.8.** Uma série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é dita **absolutamente convergente** se  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  converge.

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é convergente, mas  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  não é convergente, dizemos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é **condicionalmente convergente**.

**Exercício 6.1.9.** Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  uma série real condicionalmente convergente. Mostre que

dado  $x \in \mathbb{R}$ , existe uma maneira de reordenar os termos da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  tal que a nova série reordenada tenha soma  $x$ .

Sabemos que convergência absoluta implica convergência, como no curso de Cálculo I. Agora, relembremos dois importantes testes para convergência e divergência de séries, que também são válidos para o caso complexo.

**Teorema 6.1.10** (Teste da razão). Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  é uma série de números complexos não-nulos tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L.$$

- (i) Se  $L < 1$ , a série é absolutamente convergente.
- (ii) Se  $L > 1$ , a série é divergente.
- (iii) Se  $L = 1$ , o teste é inconclusivo.

**Teorema 6.1.11** (Teste da raiz). Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  é uma série de números complexos tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L.$$

- (i) Se  $L < 1$ , a série é absolutamente convergente.
- (ii) Se  $L > 1$ , a série é divergente.
- (iii) Se  $L = 1$ , o teste é inconclusivo.

### 6.1.1 Séries geométricas

Uma **série geométrica** é qualquer série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = a + az + \cdots + az^n + \cdots,$$

isto é, é a série associada a uma sequência da forma  $\{az^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  onde  $a, z$  são números complexos. Daqui para frente, fazemos a convenção  $0^0 = 1$ .

Para uma série desta forma, é simples notar que

$$S_n - zS_n = a - az^n,$$

e portanto

$$S_n = \frac{a(1 - z^n)}{1 - z}.$$

Agora,  $z^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  sempre que  $|z| < 1$ , e portanto  $S_n \rightarrow \frac{a}{1-z}$ . Em outras palavras, para  $|z| < 1$ , a série  $\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}$ . Além disso, esta série diverge se  $|z| \geq 1$ .

Trocando  $z$  por  $-z$  na série acima, podemos ver também que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(-1)^n z^n = \frac{a}{1+z}.$$

Concluimos então que para  $|z| < 1$  temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} a(-1)^n z^n = \frac{a}{1+z}. \quad (6.1.1)$$

**Exemplo 6.1.12.** Calcule o valor da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{5^n}$ .

*Solução:* Neste caso, sejam  $a = 1$  e  $z = \frac{1+2i}{5}$ . Como  $|z| = \left| \frac{1+2i}{5} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ , sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{5^n} = \frac{1}{1 - \frac{1+2i}{5}} = 1 + i\frac{1}{2}.$$

## 6.1.2 Séries de potências

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (6.1.2)$$

é chamada uma **série de potências** (dizemos ainda que ela está **centrada em**  $z_0$ ).

Aplicando o teste da raiz para a série acima, se  $\alpha \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , então a série é absolutamente convergente se  $|z - z_0|\alpha < 1$ , é divergente se  $|z - z_0|\alpha > 1$  e é inconclusivo

de  $|z - z_0|^\alpha = 1$ . Isto quer dizer que existe um disco de raio  $0 \leq R \leq \infty$  (onde  $R = \frac{1}{\alpha}$ ) tal que a série de potência (6.1.2) é convergente se  $|z - z_0| < R$  e divergente se  $|z - z_0| > R$ .

**Definição 6.1.13.** *Este  $R$  definido acima é chamado de raio de convergência da série (6.1.2). O círculo  $|z - z_0| = R$  é chamado de círculo de convergência.*

**Observação 6.1.14.** *Note que se  $\alpha = \infty$ , temos  $R = 0$  e a série é convergente somente no ponto  $z = z_0$ . Se  $0 < R < \infty$ , a série converge absolutamente para todos os pontos no interior do círculo de convergência. Se  $R = \infty$ , então a série converge para todo  $z \in \mathbb{C}$ .*

Lembre-se que  $R = \frac{1}{\alpha}$ , onde  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Pode-se mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , quando estes dois limites existirem. Assim

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Sobre o círculo de convergência  $|z - z_0| = R$  não podemos dizer muito sobre a série. Ela pode convergir em todos os pontos, bem como divergir em todos os pontos; ou até mesmo convergir em alguns e divergir em outros, como veremos no exemplo a seguir:

**Exemplo 6.1.15.** *Considere a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ . Então, do Teste da razão temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{n+1}}{\frac{z^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |z| = |z|,$$

e assim a série converge se  $|z| < 1$  e diverge se  $|z| > 1$ .

Ainda se  $z = 1$ , sabemos que a série diverge, enquanto que para  $z = -1$  a série é convergente. Pode ser mostrado ainda que esta série converge em todos os pontos do círculo  $|z| = 1$ , exceto no ponto  $z = 1$ .

**Exercício 6.1.16.** *Mostre que a série acima converge para todo  $z$  com  $|z| = 1$ , exceto no ponto  $z = 1$ .*

Agora, como no Cálculo I, temos resultados que nos permitem derivar e integrar termo-a-termo uma série de potências. Para isto, assumimos no restante desta seção que o raio de convergência  $R$  da série (6.1.2) não é zero. Temos então

**Teorema 6.1.17.** *Considere a série de potências (6.1.2) e assuma que seu raio de convergência  $R$  é não-nulo. Assim, temos*

(a) esta série representa uma função contínua  $f$  dentro do seu círculo de convergência  $|z - z_0| = R$ ;

(b) a função  $f$  é diferenciável e a série pode ser derivada termo-a-termo dentro do seu círculo de convergência  $|z - z_0| = R$ , e sua derivada  $f'$  é dada por

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}. \quad (6.1.3)$$

Ainda mais, a série (6.1.3) tem raio de convergência  $R$ ;

(c) esta série pode ser integrada termo-a-termo dentro do seu círculo de convergência; isto é, se  $\gamma$  é um contorno inteiramente contido no interior do círculo  $|z - z_0| = R$  então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz, \quad (6.1.4)$$

Ainda mais, a série (6.1.4) tem raio de convergência  $R$ .

## 6.2 Séries de Taylor

Na teoria de funções de variável complexa, as séries representam um papel muito importante. Vejamos o primeiro resultado que relaciona os conceitos de analiticidade e séries.

**Teorema 6.2.1.** *Seja  $f$  uma função analítica num domínio  $D$  e seja  $z_0 \in D$ . Então  $f$  tem uma representação em série de potências:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (6.2.1)$$

onde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (6.2.2)$$

e esta representação é válida para a maior vizinhança centrada em  $z_0$  e raio  $R > 0$  que está inteiramente contida em  $D$ .

**Exemplo 6.2.2.** *Encontre a série de Taylor de  $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ , centrada em  $z_0 = 0$ .*

**Solução:** Poderíamos utilizar a expressão (6.2.2) para encontrar esta série. Porém, sabendo que  $\frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$ , utilizaremos a série de  $\frac{1}{1-z}$  para nos auxiliar.

Temos para  $|z| < 1$ , que  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , logo o item (b) do Teorema 6.1.17 implica que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1},$$

é a representação em série de Taylor de  $f(z)$  centrada em  $z_0 = 0$ , que tem raio de convergência igual ao da série de  $\frac{1}{1-z}$ , que é  $R = 1$ .

Podemos ainda utilizar tais expressões para, por exemplo, encontrar a série de Taylor de  $f(z) = \frac{z^3}{(1-z)^2}$ , simplesmente multiplicando a série obtida no exemplo anterior, obtendo

$$\frac{z^2}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n+2},$$

e novamente, esta série tem raio de convergência  $R = 1$ .

**Exemplo 6.2.3.** Encontre a série de Taylor de  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  centrada em  $z_0 = 2i$ .

**Solução:** Neste caso, escrevemos

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i-(z-2i)} = \frac{1}{1-2i} \frac{1}{1-\frac{z-2i}{1-2i}}.$$

Se definimos  $w \doteq \frac{z-2i}{1-2i}$ , temos  $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i} \frac{1}{1-w}$ . Usando a expansão em série de potências para  $|w| < 1$ , temos

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-2i}{1-2i} \right)^n,$$

logo

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{n+1}} (z-2i)^n,$$

sempre que  $\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right| = |w| < 1$ ; isto é, sempre que  $|z-2i| < |1-2i| = \sqrt{5}$ . Portanto o raio de convergência desta série é  $R = \sqrt{5}$  e o círculo de convergência é  $|z-2i| = \sqrt{5}$  (isto pode ser verificado também aplicando os resultados da Observação 6.1.14).

**Observação 6.2.4.** Quando a série de Taylor está centrada em  $z_0 = 0$ , ela é comumente chamada de **série de Maclaurin**.

## 6.3 Séries de Laurent

Se uma função é analítica numa vizinhança de um ponto  $z_0$ , então vimos na seção anterior que  $f$  tem uma representação em série de Taylor. A pergunta natural que surge

é: e se  $f$  não é analítica no ponto  $z_0$ ? Ainda podemos encontrar alguma representação em séries para a função  $f$ ?

Antes de responder esta pergunta, veremos rapidamente a definição de sequências e séries com índices em  $\mathbb{Z}$ , ao invés de  $\mathbb{N}$ .

**Definição 6.3.1.** *Uma sequência com índices em  $\mathbb{Z}$  é uma função que a cada número inteiro  $n$  associa um número complexo  $z_n$ . Denotamos por  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , e quando não houver confusão, diremos simplesmente que  $\{z_n\}$  é uma **sequência**.*

Dada uma sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , podemos construir duas sequências usuais, dadas por

$$z_n^+ = z_n, \text{ para todo } n \geq 0 \text{ e } z_n^- = z_{-n}, \text{ para todo } n > 0.$$

**Definição 6.3.2.** *Diremos que a sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é **convergente** se ambas as sequências  $\{z_n^+\}_{n \geq 0}$  e  $\{z_n^-\}_{n > 0}$  são convergentes (possivelmente com limites distintos). Neste caso, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^+ = L_1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^- = L_2$ , escrevemos*

$$L_2 \overset{n \rightarrow -\infty}{\longleftarrow} z_n \overset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} L_1.$$

*Se uma sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  não é convergente, diremos que ela é **divergente**.*

**Exemplo 6.3.3.** *A sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  dada por  $z_n = \frac{1}{n}$ , se  $n \neq 0$  e  $z_0 = 0$ , é convergente e também*

$$0 \overset{n \rightarrow -\infty}{\longleftarrow} z_n \overset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Já as sequências  $\{2^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  são divergentes.*

Dada uma sequência  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , podemos construir duas sequências de somas parciais, como segue

$$1. S_n^+ = \sum_{k=0}^n z_k = \sum_{k=0}^n z_k^+, \text{ para } n \geq 0, \text{ e}$$

$$2. S_n^- = \sum_{k=-n}^{-1} z_k = \sum_{k=1}^n z_k^-, \text{ para } n > 0.$$

**Observação 6.3.4.** *Para evitar complicações com o estudo de séries com índices inteiros, trataremos somente o caso de convergência absoluta para as sequências de somas parciais definidas acima.*

A condição de convergência absoluta nas sequências das somas parciais nos dá também o seguinte resultado.



**Definição 6.3.5.** Quando as seqüências  $\{S_n^+\}_{n \geq 0}$  e  $\{S_n^-\}_{n > 0}$  são absolutamente convergentes para  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, dizemos que a série de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é **convergente** e denotamos por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = L_1 + L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^-.$$

**Proposição 6.3.6.** Se a série  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$  é convergente, então

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^n z_k.$$

Como podemos ver, o estudo de seqüências e séries com índices inteiros é basicamente análoga ao estudo de seqüências usuais, vista no curso de Cálculo II. Assim, todos os critérios e testes de convergência se aplicam novamente, se aplicados às partes ‘positiva’ e ‘negativa’.

### 6.3.1 Teorema de representação em séries de Laurent

No início deste capítulo, perguntamos como seria uma representação em séries (se existir) para um função  $f$  que deixa de ser analítica para alguns pontos de um domínio simplesmente conexo  $D$ . A resposta para esta pergunta está contida no seguinte resultado:

**Teorema 6.3.7.** Seja  $f$  uma função analítica num domínio anelar  $D$  definido por  $r < |z - z_0| < R$ , (onde  $0 \leq r < R \leq \infty$ ). Então  $f$  tem uma representação em série da forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (6.3.1)$$

válida para  $r < |z - z_0| < R$ , e a convergência desta série é absoluta. Os coeficientes  $a_n$  são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}, \quad (6.3.2)$$

onde  $\gamma$  é uma curva fechada simples inteiramente contida em  $D$  e contém  $z_0$  em seu interior (veja figura abaixo).

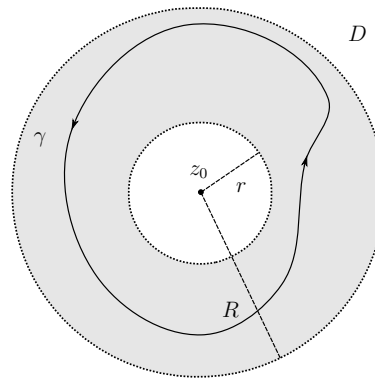


Figura: Região anelar  $D$  e curva  $\gamma$ .

A série (6.4.1) é chamada de **série de Laurent** de  $f$ , centrada em  $z_0$ , no anel  $D$ . Segue diretamente do Teorema de Cauchy-Goursat que, no caso onde  $f$  é analítica para todos os pontos no interior do círculo  $|z - z_0| = R$ , que  $a_n = 0$  para todo  $n < 0$ , e portanto a série de Laurent é igual à série de Taylor de  $f$ .

**Exemplo 6.3.8.** Encontre a expansão em série de Laurent para  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  nos seguintes domínios.

- (a)  $0 < |z| < 1$       (b)  $|z| > 1$       (c)  $0 < |z - 1| < 1$       (d)  $|z - 1| > 1$

**Solução:** Nas partes (a) e (b), queremos expressar  $f$  envolvendo as potências de  $z$ ; já nos itens (c) e (d), encontraremos séries envolvendo potências de  $z - 1$ .

Para o item (a), notemos que  $f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z}$ , e lembremos que podemos expressar

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

que é válida em  $|z| < 1$ . Assim, multiplicando a expressão acima por  $-\frac{1}{z}$ , obtemos

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n,$$

e esta expressão é válida para  $0 < |z| < 1$ .

Para a parte (b), temos que construir uma série que converge se  $|\frac{1}{z}| < 1$ ; isto é, se  $1 < |z|$ . Para isso, note que

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

Denotando  $\frac{1}{z}$  por  $w$ , temos

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n;$$

sempre que  $|w| < 1$ ; isto é,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n},$$

e esta expressão é válida para  $|z| > 1$ . Assim, multiplicando esta expressão por  $\frac{1}{z^2}$ , obtemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+2)} = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n,$$

para todo  $z$  com  $|z| > 1$ .

Para o item (c), notemos que podemos escrever  $f(z) = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+(z-1)}$ . Para  $|z-1| < 1$ , temos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Portanto, dividindo a expressão acima por  $\frac{1}{z-1}$ , obtemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n.$$

Finalmente, para o item (d), notemos que  $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$ . Como no item (b), fazendo  $w = \frac{1}{z-1}$ , temos, para  $|w| < 1$

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n;$$

isto é

$$\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n}.$$

Portanto

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-(n+2)} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{-(n+2)} (z-1)^n.$$

**Exemplo 6.3.9.** Encontre a expansão de  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  em série de Laurent, no anel  $1 < |z-2| < 2$ .

**Solução:** Usamos primeiramente a decomposição de  $f$  em frações parciais, para obter

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Sabemos que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + (z-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-2}{2}}.$$

Assim, para  $|z-2| < 2$ , temos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^n.$$

Sabemos também que

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1 + (z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z-2}},$$

e para  $|z-2| > 1$ , temos

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{z-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n},$$

logo

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-(n+1)} (z-2)^n.$$

Juntando as duas expressões, obtemos

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2)^n,$$

onde  $a_n = (-1)^{-(n+1)}$ , para  $n \leq -1$ ,  $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ , para  $n \geq 0$ , e esta expressão é válida para  $1 < |z-2| < 2$ .

**Exemplo 6.3.10.** Encontre a expansão de  $f(z) = \frac{8z+1}{z(1-z)}$  no anel  $0 < |z| < 1$ .

**Solução:** Podemos escrever, utilizando a decomposição em frações parciais:

$$f(z) = \frac{8z+1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{9}{1-z}.$$

Sabemos que para  $|z| < 1$ , temos

$$\frac{9}{1-z} = 9 \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Logo

$$f(z) = \frac{1}{z} + 9 \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n,$$

onde  $a_{-1} = 1$  e  $a_n = 9$ , para  $n \geq 0$ ; e esta expressão é válida para  $0 < |z| < 1$ .

**Exemplo 6.3.11.** Encontre a expansão de  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  no anel  $0 < |z| < \infty$ .

**Solução:** Sabemos, usando o Teorema 6.2.1, que

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

e esta expansão é válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Assim, segue que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n},$$

e esta expansão é válida para  $0 < |z| < \infty$ .

**Observação 6.3.12.** Note que no exemplo acima, a série de Laurent que encontramos para  $f$  está definida para todo  $z \in \mathbb{C}$  (só possui potências não-negativas  $z^n$ ), enquanto que a função  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  não está definida para  $z = 0$ . Para que as duas expressões coincidam em todos os pontos de  $\mathbb{C}$ , podemos definir a função

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{para } z \neq 0 \\ 1, & \text{para } z = 0. \end{cases}$$

Deste modo, temos

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n},$$

e esta expressão é válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 6.3.13.** Encontre a expansão de  $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$  no anel  $0 < |z| < \infty$ .

**Solução:** Sabemos, usando o Teorema 6.2.1, que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

e esta expansão é válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Assim, segue que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n! z^n} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{3^n (-n)!},$$

e esta expansão é válida para  $0 < |z| < \infty$ .

### 6.3.2 Singularidades isoladas

**Definição 6.3.14.** Um ponto  $z_0$  é dito uma **singularidade isolada** para uma função  $f$  se a função não é analítica em  $z_0$ , mas existe um  $r > 0$  tal que a função é analítica em  $0 < |z - z_0| < r$ .

#### Exemplo 6.3.15.

1.  $z_0 = 0$  é uma singularidade isolada de  $f(z) = \frac{1}{z}$ .
2. os pontos  $2i$  e  $-2i$  são singularidades isoladas de  $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$ .
3.  $z_0 = 0$  é uma singularidade isolada de  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ .
4.  $z_0 = 1$  é uma singularidade isolada de  $f(z) = \frac{\sin(z-1)}{(z-1)}$ .

**Observação 6.3.16.** Note que, por exemplo, o ponto  $z_0 = 0$  não é uma singularidade isolada da função logaritmo  $f(z) = \text{Ln}z$ , já que qualquer vizinhança de 0 contém pontos do eixo real negativo, onde  $f$  não é analítica.

### 6.3.3 Classificação de singularidades

**Definição 6.3.17** (Singularidade removível). Uma singularidade isolada de uma função  $f$  é chamada de **singularidade removível** se existe uma função analítica  $g$  numa vizinhança  $|z - z_0| < r$  tal que  $g(z) = f(z)$  para  $0 < |z - z_0| < r$ .

**Definição 6.3.18** (Polo). Dizemos que uma singularidade isolada  $z_0$  de  $f$  é um **polo** se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty;$$

isto é, dado  $M > 0$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|f(z)| > M$  se  $0 < |z - z_0| < \epsilon$ .

**Definição 6.3.19** (Singularidade essencial). Dizemos que uma singularidade isolada  $z_0$  de  $f$  é uma **singularidade essencial** se ela não é nem uma singularidade removível e nem um polo.

É possível mostrar, com um pouco de trabalho, que estas são as únicas três possibilidades para uma singularidade isolada. Agora, a pergunta que surge é: como podemos determinar qual o tipo de singularidade isolada de uma função  $f$ ? Isto é o que vamos responder ao longo desta seção com uma série de resultados.

### Classificação usando séries de Laurent

Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função complexa  $f$ . Então existe  $r > 0$  tal que a função  $f$  é analítica no anel  $0 < |z - z_0| < r$  (também chamado de **disco perfurado** de centro  $z_0$  e raio  $r$ ). Considere a expansão de  $f$  em série de Laurent, dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Temos que  $z_0$  é:

1. uma **singularidade removível** se  $a_n = 0$ , para todo  $n < 0$ ; isto é, se a série de Laurent só possui potências não-negativas de  $z - z_0$ ;
2. um **polo** se existe  $m > 0$  tal que  $a_n = 0$  para  $n < -m$  e  $a_{-m} \neq 0$ ; isto é, a série de Laurent possui somente uma quantidade finita de potências negativas de  $z - z_0$ . O número  $m$  é chamado de **ordem** do polo e dizemos neste caso que  $z_0$  é um **polo de ordem**  $m$ ;
3. uma **singularidade essencial** se dado  $m > 0$  existe  $n > m$  tal que  $a_{-n} \neq 0$ ; isto é, existem infinitas potências negativas de  $z - z_0$  na série de Laurent.

Um polo de ordem 1 é também chamado de **polo simples**. Nos exemplos de 1 a 4 acima, temos **1.** polo simples, **2.** polos simples, **3.** singularidade essencial, **4.** singularidade removível. O ponto  $z_0 = 0$  é um polo de ordem  $m$  da função  $f(z) = \frac{1}{z^m}$ . Na Observação 6.3.12, o ponto  $z = 0$  é uma singularidade removível de  $f$ .

### Singularidades removíveis

Estas singularidades são as mais simples de serem tratadas, como veremos agora. Considere  $f$  analítica num disco perfurado  $D$  dado por  $0 < |z - z_0| < r$  e assuma que  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f$ . Temos então o seguinte resultado de caracterização:

**Teorema 6.3.20.** *Seja  $f$  uma função complexa com uma singularidade isolada  $z_0$ . Então  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f$  se, e somente se,*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Essencialmente, singularidades removíveis não trazem nada de diferente ao estudo de singularidades de funções complexas, já que estas podem ser simplesmente ‘eliminadas’, definindo a função  $f$  em  $z_0$  de maneira apropriada. Assim dito, não nos preocuparemos mais com estas singularidades.

## Polos

Vamos agora estudar os polos, que diferente das singularidades removíveis, trazem uma complicação um pouco maior para o estudo das funções complexas. Juntamente ao estudo de polos está o estudo de zeros de uma função complexa. Começaremos então com este conceito.

**Definição 6.3.21.** Um ponto  $z_0$  é um **zero** de uma função  $f$  se  $f(z_0) = 0$ . Além disso, se  $f$  é uma função analítica, dizemos que  $z_0$  é um **zero de ordem  $m$**  (ou **zero de multiplicidade  $m$** ) se  $f^{(n)}(z_0) = 0$  para todo  $n = 0, \dots, m-1$  e  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ . Um zero de ordem 1 também é chamado de **zero simples**. Diremos que um zero  $z_0$  de  $f$  é **isolado** se existe  $r > 0$  tal que  $f(z) \neq 0$ , para todo  $0 < |z - z_0| < r$ .

Daqui em diante, a não ser que dito o contrário, todos os zeros que estudaremos são isolados. Uma propriedade importante de zeros isolados é a seguinte

**Teorema 6.3.22.** Sejam  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $f$  uma função analítica num disco  $|z - z_0| < r$ . Então  $z_0$  é um zero de multiplicidade  $m$  de  $f$  se, e somente se, existe uma função  $g$  analítica em  $|z - z_0| < r$ , com  $g(z_0) \neq 0$  e

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \text{ em } |z - z_0| < r.$$

**Demonstração:** A implicação ‘se’ é bem simples, e é deixada a cargo do leitor. Provemos o ‘somente se’, e para isto, assuma que  $z_0$  é um zero de multiplicidade  $m$  de  $f$ . Como  $f$  é analítica no disco  $|z - z_0| < r$ , o Teorema 6.2.1 nos dá que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

e como  $f^{(n)}(z_0) = 0$  para  $n = 0, \dots, m-1$ , temos

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m}.$$

Definindo  $g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m}$ , o Teorema 6.1.17 nos diz que  $g$  é analítica (note que só aparecem potências não-negativas de  $z - z_0$ ),  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  em  $|z - z_0| < r$  e

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0,$$

já que, como  $z_0$  é zero de multiplicidade  $m$ , temos  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ . ■



**Exemplo 6.3.23.** Determine a multiplicidade do zero  $z_0 = 0$  da função  $f(z) = z \sin z^2$ .

**Solução:** Note primeiramente que a função  $f$  é inteira. Assim podemos encontrar a série de Taylor de  $f$  centrada em 0. Sabemos que

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

e esta expressão é válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Assim, substituindo  $z$  por  $z^2$  nesta expressão, obtemos

$$\sin z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

e esta expressão é válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Assim, multiplicando ambos os lados por  $z$ , obtemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+3}}{(2n+1)!} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n+1)!}.$$

Assim,  $f(z) = z^3 g(z)$ , onde  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n+1)!}$ , e  $g(0) = 1$ . Portanto  $z_0 = 0$  é um zero com multiplicidade 3 de  $f$ .

Podemos dar uma caracterização similar para polos.

**Teorema 6.3.24.** Sejam  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $f$  uma função analítica num disco perfurado  $0 < |z - z_0| < r$ . Então  $z_0$  é um polo de ordem  $m$  de  $f$  se, e somente se, existe uma função  $g$  analítica no disco  $|z - z_0| < r$  com  $g(z_0) \neq 0$  tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \text{ em } 0 < |z - z_0| < r.$$

**Demonstração:** Como no teorema anterior, a parte ‘se’ é bem direta e é deixada a cargo do leitor. Provemos a parte ‘somente se’, e para isto, assuma que  $z_0$  é um polo de ordem  $m$  de  $f$ . Assim,  $f$  tem uma expansão em série de Laurent no disco perfurado  $0 < |z - z_0| < r$ , dada por

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde  $a_{-m} \neq 0$ . Multiplicando ambos os lados por  $(z - z_0)^m$ , obtemos

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n.$$

Como a série do lado direito da expressão acima só possui potências não-negativas de

$z - z_0$  o Teorema 6.1.17 nos dá que  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z - z_0)^n$  define uma função analítica no disco  $|z - z_0| < r$ . Claramente,  $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$  e

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \text{ em } 0 < |z - z_0| < r,$$

o que conclui a demonstração. ■

Vimos então que zeros e polos têm uma caracterização muito parecida, e com isto é natural perguntar: zeros de multiplicidade  $m$  e polos de ordem  $m$  estão relacionados?

A resposta para esta pergunta é sim! Como veremos nos seguintes resultados.

**Teorema 6.3.25.** *Sejam  $h, k$  funções analíticas num disco  $|z - z_0| < r$ . Assuma que  $z_0$  é um zero de multiplicidade  $m$  de  $h$  e que  $k(z_0) \neq 0$ . Então  $z_0$  é um polo de ordem  $m$  da função  $f(z) = \frac{k(z)}{h(z)}$ .*

**Demonstração:** Como  $z_0$  é um zero de multiplicidade  $m$  de  $h$ , o Teorema 6.3.22 garante que existe uma função  $g_1$  analítica no disco  $|z - z_0| < r$  com  $g_1(z_0) \neq 0$  e

$$h(z) = (z - z_0)^m g_1(z).$$

Assim, para  $0 < |z - z_0| < r$  e  $g_2(z) = \frac{k(z)}{g_1(z)}$  temos

$$f(z) = \frac{k(z)}{h(z)} = \frac{g_2(z)}{(z - z_0)^m},$$

onde  $g_2$  é analítica em  $0 < |z - z_0| < r$  (se  $r$  for escolhido suficientemente pequeno) e ainda  $g_2(z_0) = \frac{k(z_0)}{g_1(z_0)} \neq 0$ , e o Teorema 6.3.24 nos dá o resultado. ■

**Corolário 6.3.26.** *Sejam  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $f$  uma função analítica num disco  $|z - z_0| < r$ , com  $f(z) \neq 0$  para todo  $0 < |z - z_0| < r$ . Então  $z_0$  é um zero de multiplicidade  $m$  para  $f$  se, e somente se,  $z_0$  é um polo de ordem  $m$  de  $\frac{1}{f(z)}$ .*

**Exemplo 6.3.27.** *Encontre os polos e suas ordens, para a função*

$$f(z) = \frac{2z + 5}{(z - 1)(z + 5)^3(z - 2)^4}.$$

**Solução:** O denominador tem  $z = 1$ ,  $z = -5$  e  $z = 2$  como zeros. Claramente, como  $2z + 5$  é diferente de zero nestes três pontos, o Teorema 6.3.25 garante que  $z = 1$  é um polo simples,  $z = -5$  é um polo de ordem 3 e  $z = 2$  é um polo de ordem 4.

### Singularidades essenciais

As singularidades essenciais são incrivelmente complicadas, e não faremos um estudo detalhado delas. Só para o leitor ter uma ideia do quão complicada uma função  $f$  pode ficar próximo de uma singularidade essencial, apresentamos sem demonstração, o seguinte resultado.

**Teorema 6.3.28** (Great Picard's Theorem). *Assuma que  $z_0$  é uma singularidade essencial de uma função  $f$ . Então, dado  $\delta > 0$ , a imagem do disco perfurado  $0 < |z - z_0| < \delta$  por  $f$  é todo o plano complexo, com uma única possível exceção. Além disso, cada ponto da imagem é atingido um número infinito de vezes.*

Para ilustrar o resultado acima, mostraremos este teorema num caso bem particular.

**Proposição 6.3.29.** *Dado  $r > 0$ , a imagem de  $0 < |z| < r$  pela função  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  é  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , e cada ponto na imagem é atingido um número infinito de vezes.*

**Demonstração:** Seja  $r > 0$  e  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Mostraremos que existem  $n_0 \in \mathbb{N}$  e uma sequência  $\{z_n\}_{n \geq n_0}$  de números complexos com  $0 < |z_n| < r$  tais que

$$f(z_n) = w, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

De fato, seja  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , assim  $w = re^{i\theta}$ , para algum  $r > 0$  e  $\theta \in [-\pi, \pi)$ . Se  $e^{\frac{1}{z}} = w = re^{i\theta}$ , temos  $e^{\frac{1}{z}} = e^{\text{Ln}w} = e^{\ln|w| + i\text{Arg}w} = e^{\ln r + i\theta}$ . Assim, definindo

$$z_n \doteq \frac{1}{\ln r + i(\theta + 2n\pi)},$$

temos  $z_0 \neq 0$  e  $e^{\frac{1}{z_n}} = w$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora

$$z_n = \frac{\ln r}{(\ln r)^2 + (\theta + 2n\pi)^2} - i \frac{\theta + 2n\pi}{(\ln r)^2 + (\theta + 2n\pi)^2},$$

e portanto

$$|z_n| = \frac{1}{(\ln r)^2 + (\theta + 2n\pi)^2}.$$

Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$  e podemos escolher  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|z_n| < r$ , para todo  $n \geq n_0$ , o que conclui a demonstração. ■

## 6.4 Resíduos

Agora veremos uma ferramenta importantíssima e muito útil para o cálculo de integrais complexas, que é o conhecido *Teorema dos Resíduos*. Antes de enunciá-lo, vamos fazer

alguns resultados preliminares.

Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ , e considere  $r > 0$  tal que  $f$  é analítica no disco perfurado  $0 < |z - z_0| < r$ . Temos então uma expansão em série de Laurent para  $f$  neste disco perfurado dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (6.4.1)$$

onde  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$  e  $\gamma$  é o círculo  $|z - z_0| = r_1 < r$ .

**Lema 6.4.1.** *Temos, para  $\gamma$  acima, que*

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq -1; \\ 2\pi i, & \text{se } n = -1. \end{cases} \quad (6.4.2)$$

**Demonstração:** Uma parametrização para  $\gamma$  é  $\gamma(t) = z_0 + r_1 e^{it}$ , para  $t \in [0, 2\pi]$ . Assim, temos

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r_1^n e^{int} r_1 i e^{it} dt = r_1^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Claramente, se  $n = -1$ , temos  $\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$ . Agora, assuma que  $n \neq -1$ , então

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = r_1^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0,$$

o que conclui a demonstração. ■

Usando o Teorema 6.1.17, aplicado à série de Laurent de  $f$ , concluímos que podemos integrar esta série termo-a-termo. Fazendo esta integração e usando (6.4.2), temos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (6.4.3)$$

Utilizando este fato fazemos a seguinte definição:

**Definição 6.4.2.** *Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$  e considere a expansão de Laurent (6.4.1) de  $f$  no disco perfurado  $0 < |z - z_0| < r$ . O termo  $a_{-1}$  desta expansão é chamado de **resíduo** de  $f$  no ponto  $z_0$ , e denotamos por*

$$a_{-1} \doteq \text{Res}(f, z_0).$$

Agora, a equação (6.4.3) nos dá o *Teorema dos Resíduos*.

**Teorema 6.4.3** (Teorema do Resíduo). *Seja  $f$  uma função analítica no disco perfurado  $0 < |z - z_0| < r$ . Então se  $\gamma$  é uma curva suave por partes, simples e fechada, inteiramente contida em  $0 < |z - z_0| < r$  com  $z_0$  no seu interior, orientada positivamente, temos*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \text{Res}(f, z_0).$$

**Exemplo 6.4.4.** *Encontre o resíduo de  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$  em  $z_0 = 1$ , e use isto para calcular  $\oint_{\gamma} f(z) dz$ , onde  $\gamma$  é o círculo  $|z - 1| = 1$ .*

**Solução:** *Devemos encontrar a expansão em série de Laurent de  $f$  em torno de  $z_0 = 1$ . Sabemos que, para  $|z - 1| < 2$ , temos*

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2-(z-1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

*Assim, para  $0 < |z - 1| < 2$ , temos*

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-2}}{2^{n+1}} = -\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+3}},$$

*e portanto  $a_n = -\frac{1}{2^{n+3}}$ , para  $n \geq -2$ . Assim sendo, o resíduo de  $f$  em  $z_0 = 1$  é*

$$\text{Res}(f, -1) = a_{-1} = -\frac{1}{4}.$$

*Segue então do Teorema do Resíduo (Teorema 6.4.3) que*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, -1) = -\frac{\pi i}{2}.$$

**Exemplo 6.4.5.** *Encontre o resíduo de  $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$  em  $z_0 = 0$  e use-o para calcular  $\oint_{\gamma} f(z) dz$ , onde  $\gamma$  é o círculo  $|z| = 1$ .*

**Solução:** *Sabemos que  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , e que esta expressão é válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Portanto, para  $0 < |z| < \infty$ , temos<sup>1</sup>*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n! z^n} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{3^n (-n)!},$$

<sup>1</sup>Consulte o Exemplo 6.3.13

assim,  $a_n = \frac{1}{3^n(-n)!}$ , para todo  $n \leq 0$ . Portanto  $\text{Res}(f, 0) = 3$  e temos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 6\pi i.$$

Usando o Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos (Teorema 5.3.10), temos o seguinte resultado

**Teorema 6.4.6** (Teorema dos Resíduos). *Seja  $f$  uma função analítica num domínio  $D$ , exceto numa quantidade finita de singularidades isoladas  $z_1, \dots, z_n$ . Seja  $\gamma$  uma curva suave por partes, simples e fechada, inteiramente contida em  $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  contendo  $z_1, \dots, z_n$  no seu interior, orientada positivamente. Então, temos*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

Antes de aplicarmos o Teorema dos Resíduos a algumas funções, vamos mostrar alguns resultados que facilitam (muito!) o cálculo de resíduos para polos, evitando ter que expandir a função em série de Laurent. Claramente, é consequência imediata da definição, que se  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f$ , então  $\text{Res}(f, z_0) = 0$ .

**Proposição 6.4.7.** *Seja  $z_0$  um polo de ordem  $m$  de uma função  $f$  e seja  $g$  uma função analítica em  $|z - z_0| < r$  tal que  $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ , para  $0 < |z - z_0| < r$ . Então*

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

**Demonstração:** Como  $g$  é analítica, podemos fazer sua expansão em série de Taylor, no disco  $|z - z_0| < r$ , dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Assim, a série de Laurent para  $f$  é dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{g^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} (z - z_0)^n,$$

e portanto  $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ . ■

**Observação 6.4.8.** *Para utilizar o resultado acima, definimos primeiramente a função  $h(z) = (z - z_0)^m f(z)$ , para  $0 < |z - z_0| < r$ . Desta maneira, a função analítica  $g$  dada*

no teorema acima é dada por

$$g(z) = \begin{cases} h(z), & \text{em } 0 < |z - z_0| < r, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} h(z), & \text{para } z = z_0. \end{cases}$$

Claramente  $h^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} [(z - z_0)^m f(z)]$  para  $0 < |z - z_0| < r$ . Portanto

$$g^{(k)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^k}{dz^k} [(z - z_0)^m f(z)], \text{ para todo } k \geq 0.$$

**Corolário 6.4.9.** Se  $z_0$  é um polo simples de  $f$ , então

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

**Exemplo 6.4.10.** A função  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$  tem um polo simples em  $z = 3$  e um polo de ordem 2 em  $z = 1$ . Encontre os resíduos de  $f$  nestes pontos.

**Solução:** Sabemos do Corolário 6.4.9 que para o polo simples  $z = 3$  temos

$$\text{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3) f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z - 1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Além disso, aplicando a Proposição 6.4.7 ao polo de ordem 2  $z = 1$ , temos  $g(z) = (z - 1)^2 f(z) = \frac{1}{z-3}$ . Assim,

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{z-3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.$$

**Exemplo 6.4.11.** Calcule  $\oint_{\gamma} f(z) dz$ , onde  $f$  é dada pelo exemplo anterior e  $\gamma$  é o círculo orientado positivamente dado por

(a)  $|z| = 2$

(b)  $|z| = 4$ .

**Solução:** Para o item (a), somente a singularidade  $z = 1$  está no interior do círculo, assim, o Teorema do Resíduo (Teorema 6.4.3) temos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = -\frac{\pi i}{2}.$$

Para o item (b), ambas as singularidades  $z = 1$  e  $z = 3$  estão no interior do círculo. Segue do Teorema dos Resíduos (Teorema 6.4.6) que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, 3)] = 0.$$

## 6.5 Integrais reais impróprias

Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 6.5.1.** *Mostre que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

**Solução:** Considere a função complexa  $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ , que tem quatro polos simples, dados por

$$z_i = e^{i(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2})}, \text{ para } i = 0, 1, 2, 3.$$

Consequentemente, pelo Corolário 6.4.9, temos que

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \dots = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

e também

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Agora seja  $R > 1$  e considere a curva  $\gamma$  dada pela fronteira do semi-círculo centrado em 0 e de raio  $R$  contido no semiplano superior, orientada positivamente, como na figura abaixo.

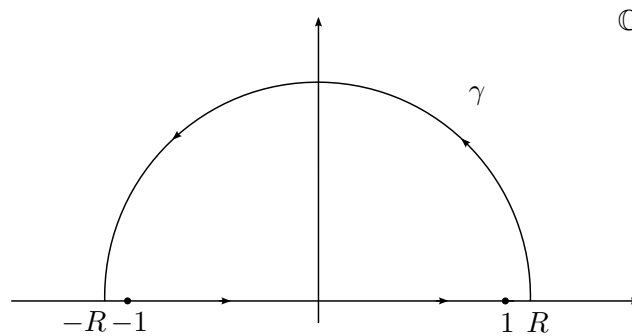


Figura: A curva  $\gamma$ .

Do Teorema dos Resíduos 6.4.6, como  $z_0$  e  $z_1$  estão na região delimitada pela curva  $\gamma$ , temos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) = -i\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

logo obtemos que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Aplicando a definição de integral de linha, temos que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx + i \int_0^{\pi} \frac{R^3 e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt.$$



Mostremos agora que o segundo termo da direita na igualdade acima tende à zero quando  $R \rightarrow \infty$ , o que implicará que

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx,$$

e concluirá o resultado.

De fato, pela Proposição 2.2.4, temos  $|1 + R^4 e^{4it}| \geq R^4 - 1$  e assim, temos

$$\left| i \int_0^\pi \frac{R^3 e^{3it}}{1 + R^4 e^{4it}} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{R^3}{R^4 - 1} dt = \pi \frac{R^3}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

e conclui o resultado.  $\square$

Notemos alguns ‘ingredientes’ que utilizamos para demonstrar este resultado:

1. A função do integrando é um quociente de polinômios (que chamamos de **função racional**).
2. A função que aparece no denominador não pode ter zeros reais, para que a integral esteja bem definida.
3. Note que para que a integral sobre a parte circular da curva convergisse para zero, é importante que apareça uma potência de  $R$  denominador maior do que a que aparece no numerador. Para isto, lembrando que pela definição de integral de linha, aparecerá sempre um  $R$  no numerador, devemos ter o grau do polinômio do numerador maior que o grau do polinômio do denominador mais 2.

Com estas considerações, podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 6.5.2.** *Sejam  $p$  e  $q$  dois polinômios reais. Assuma que*

1.  $q$  não tenha raízes reais (consequentemente, tem grau par);
2.  $\text{grau}(q) \geq \text{grau}(p) + 2$ .

*Sejam também  $z_0, \dots, z_n$  os zeros complexos de  $q$  quem têm parte imaginária positiva.*

*Então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{i=0}^n \text{Res}(f, z_i).$$

**Exemplo 6.5.3.** *Calcule*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

**Solução:** Verifique que todas as condições do Teorema 6.5.2 estão satisfeitas. Os zeros complexos de  $q(x) = x^4 + x^2 + 1$  com parte imaginária positiva são

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

e ambos são polos simples da função complexa  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ . Assim temos os zeros  $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Além disso

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = z_0^2(z_0 - z_1)^{-1}(z_0 - z_2)^{-1}(z_0 - z_3)^{-1} = \frac{1}{4} - i\frac{1}{4\sqrt{3}},$$

e também

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = z_1^2(z_1 - z_0)^{-1}(z_1 - z_2)^{-1}(z_1 - z_3)^{-1} = -\frac{1}{4} - i\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Pelo Teorema 6.5.2 segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx = 2\pi i(\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

---

## Soluções em séries para equações diferenciais ordinárias

---

Neste capítulo, veremos como utilizar séries para resolver equações diferenciais ordinárias de segunda ordem na forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \quad (7.0.1)$$

onde  $P, Q$  e  $R$  são funções contínuas.

Vamos considerar somente o caso homogêneo como acima, pois o caso não-homogêneo

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = S(x),$$

é resolvido similarmente.

Uma ampla classe de problemas em Física Matemática nos leva à equações da forma (7.0.1), onde os coeficientes são funções polinomiais; por exemplo, a *equação de Bessel*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

onde  $\nu$  é uma constante, e a *equação de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

onde  $\alpha$  é uma constante, e também a *equação de Cauchy-Euler*

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.

Queremos resolver (7.0.1) na vizinhança de um ponto  $x_0$  em  $\mathbb{R}$ ; e tal solução está profundamente relacionada com o comportamento de  $P$  nesta vizinhança de  $x_0$ . Vamos nos preocupar com o caso onde  $P(x_0) \neq 0$ ; isto é,  $x_0$  é um **ponto ordinário**. Da continuidade de  $P$ , segue que existe uma vizinhança de  $x_0$  onde  $P$  é sempre diferente de zero e assim, podemos dividir esta equação por  $P(x)$  e obter a equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (7.0.2)$$

onde  $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$  e  $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$  são funções contínuas. Assim, existe um intervalo onde a única solução de (7.0.1) com condições iniciais  $y(x_0) = y_0$  e  $y'(x_0) = y'_0$  existe e está bem definida.

Buscamos uma solução para (7.0.1) que possa se expandida em série de potências, da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

e vamos assumir que esta série é convergente num intervalo  $|x - x_0| < \rho$ , para algum  $\rho > 0$ . Para ilustrar o método que vamos utilizar, vamos começar com um exemplo.

**Exemplo 7.0.4.** *Encontre uma solução em série para a equação*

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

**Solução:** *Sabemos que duas soluções linearmente independentes desta equação são  $y_1(x) = \sin x$  e  $y_2(x) = \cos x$ , logo não precisaríamos utilizar séries para encontrar as soluções desta equação. Mas este exemplo ilustra bem como utilizar séries de potências para encontrar soluções para equações diferenciais ordinárias. Note que  $P(x) \equiv 1$ , logo todo ponto é ordinário.*

*Vamos procurar uma solução para a equação acima na forma de uma série de potências em torno de  $x_0 = 0$*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

*e assumamos que esta série converge em um intervalo  $|x| < \rho$ . Diferenciando a série termo-a-termo, temos*

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

e derivando uma vez mais, temos

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n.$$

Substituindo estas expressões na equação inicial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] x^n = 0,$$

o que nos dá a seguinte **relação de recorrência** para a sequência  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Esta equação nos mostra que os coeficientes ímpares e pares são determinados separadamente. Para os ímpares, temos

$$a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{4 \cdot 5} = \frac{a_1}{5!},$$

e sucessivamente, portanto, esperamos que  $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$ . E provemos este fato usando o princípio de indução. Observemos primeiramente que este resultado é válido para  $k = 1$ . Assuma que ele é verdadeiro para  $k$  e provemos o resultado para  $k + 1$ . Temos

$$a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3} = -\frac{a_{2k+1}}{(2k+3)(2k+2)} = -\frac{(-1)^k}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!} a_1 = -\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} a_1,$$

e portanto o resultado é válido para todo inteiro positivo  $k$ .

Analogamente, podemos demonstrar que  $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0$ , e substituindo estes valores na expressão em série para  $y$ , obtemos

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Usando o teste da razão, podemos ver que as séries convergem em  $\mathbb{R}$ , e portanto, todas as etapas anteriores que fizemos são justificadas, para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Assim, vemos facilmente que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x.$$

## 7.1 Equação de Euler

Nesta seção, vamos considerar a **equação de Euler** dada por

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad (7.1.1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais. Vamos procurar soluções pra esta equação no intervalo  $x > 0$ <sup>1</sup> (podemos estender facilmente para o intervalo  $x < 0$ ).

Vamos procurar soluções para (7.1.1) na forma

$$y(x) = x^r.$$

Derivando temos  $y'(x) = r x^{r-1}$  e  $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$  e substituindo em (7.1.1) temos

$$x^r (r(r-1) + \alpha r + \beta) = 0,$$

e como isto deve ser verdade para todo valor de  $x > 0$ , devemos necessariamente ter

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0.$$

As raízes (possivelmente complexas) desta equação são

$$r_1 = \frac{(1 - \alpha) + \sqrt{(1 - \alpha)^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{and} \quad r_2 = \frac{(1 - \alpha) - \sqrt{(1 - \alpha)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Temos três casos a analisar: quando  $r_1, r_2$  são reais e distintas, quando  $r_1, r_2$  são reais e iguais, e quando  $r_1, r_2$  são complexas conjugadas.

**Caso 1:**  $r_1, r_2$  são reais e distintas.

Neste caso, temos as soluções  $y_1(x) = x^{r_1}$  e  $y_2(x) = x^{r_2}$ . Calculando o Wronskiano destas soluções, temos

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{bmatrix} = (r_2 - r_1) x^{r_2+r_1+1},$$

e segue que  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ , para todo  $x > 0$ , e portanto estas soluções são linearmente independentes.

---

<sup>1</sup>Note que  $x_0 = 0$  é um **ponto singular**; isto é, não é um ponto ordinário.

Deste modo, a solução geral para a equação de Euler neste caso é dada por

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, \text{ para } x > 0.$$

**Caso 2:**  $r_1, r_2$  são reais e iguais.

Neste caso, temos  $r_1 = r_2$  e somente uma solução  $y_1(x) = x^{r_1}$ . Para encontrar uma outra solução linearmente independente, podemos utilizar, por exemplo, o método da redução de ordem. Mas faremos de uma outra maneira.

Definindo  $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ , como  $r_1$  é uma raiz com multiplicidade 2, temos  $F(r) = (r - r_1)^2$ ; isto é, não só  $F(r_1) = 0$ , como  $F'(r_1) = 0$ . A equação (7.1.1) pode ser escrita da seguinte maneira para  $y(x) = x^r$

$$x^2 y''(x) + \alpha x y'(x) + \beta y(x) = x^r F(r).$$

Derivando ambos os lados da expressão acima com respeito à variável  $r$ , trocando as ordens das integrações e lembrando que  $\frac{\partial}{\partial r} y = x^r \ln x$ , temos

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} [x^r \ln x] + \alpha x \frac{d}{dx} [x^r \ln x] + \beta x^r \ln x = r x^{r-1} F(r) + x^r F'(r),$$

assim, para  $r = r_1$ , o lado direito da expressão acima é zero, o que nos mostra que  $y_2(x) = x^{r_1} \ln x$ ,  $x > 0$ , também é uma solução para a equação de Euler.

Agora, temos

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_1} \ln x \\ r_1 x^{r_1-1} & x^{r_1-1} (r_1 \ln x + 1) \end{bmatrix} = x^{2r_1-1},$$

e portanto  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para  $x > 0$ , e portanto estas duas soluções são linearmente independentes, e a solução geral para a equação de Euler é dada por

$$y(x) = x^{r_1} (c_1 + c_2 \ln x), \text{ para } x > 0.$$

**Caso 3:**  $r_1, r_2$  são complexas conjugadas.

Assuma, neste caso, que  $r_1 = \lambda + i\mu$  e  $r_2 = \lambda - i\mu$ , com  $\mu \neq 0$ . Lembremo-nos que

$$\begin{aligned} x^{r_1} &= e^{r_1 \ln x} = e^{(\lambda+i\mu) \ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x} (\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)) \\ &= x^\lambda (\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)), \text{ para } x > 0. \end{aligned}$$

Note que estamos buscando soluções reais para a equação de Euler, e para isso, lembremos que qualquer combinação linear de soluções de uma equação linear homogênea é ainda uma solução, portanto, as funções definidas por

$$y_1(x) = \frac{1}{2}x^{r_1} + \frac{1}{2}x^{r_2} = x^\lambda \cos(\mu \ln x), \text{ para } x > 0,$$

e

$$y_2(x) = \frac{1}{2i}x^{r_1} - \frac{1}{2i}x^{r_2} = x^\lambda \sin(\mu \ln x), \text{ para } x > 0,$$

são soluções reais da equação de Euler. Ainda, temos

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \det \begin{bmatrix} x^\lambda \cos(\mu \ln x) & x^\lambda \sin(\mu \ln x) \ln x \\ x^{\lambda-1}(\lambda \cos(\mu \ln x) - \mu \sin(\mu \ln x)) & x^{\lambda-1}(\lambda \sin(\mu \ln x) + \mu \cos(\mu \ln x)) \end{bmatrix} \\ &= \mu x^{2\lambda-1}, \end{aligned}$$

e portanto  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para  $x > 0$ , o que mostra que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções linearmente independentes da equação de Euler, e a solução geral neste caso é dada por

$$y(x) = x^\lambda (c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \sin(\mu \ln x)), \text{ para } x > 0.$$

**Questão:** como fazemos agora para resolver esta equação para  $x < 0$ ? Procederemos da seguinte maneira: consideremos a mudança de variável  $x = -\xi$ , para  $\xi > 0$ , e definamos  $u(\xi) = y(-\xi) = y(x)$ . Assim, temos

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = -\frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

assim, substituindo estes valores na equação de Euler, obtemos

$$\xi^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha \xi \frac{du}{d\xi} + \beta u = 0;$$

isto é,  $u$  é uma solução da equação de Euler para  $\xi > 0$ , e portanto temos

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1 \xi^{r_1} + c_2 \xi^{r_2} \\ \xi^{r_1} (c_1 + c_2 \ln \xi) \\ \xi^\lambda (c_1 \cos(\mu \ln \xi) + c_2 \sin(\mu \ln \xi)), \end{cases}$$

dependendo das raízes de  $F(r)$  serem reais e distintas, reais e iguais, ou complexas conjugadas, respectivamente. Trocando  $\xi$  por  $-x$  e lembrando que  $|x| = -x$  para  $x < 0$ ,



temos

$$y(x) = \begin{cases} c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2} \\ |x|^{r_1}(c_1 + c_2 \ln|x|) \\ |x|^\lambda(c_1 \cos(\mu \ln|x|) + c_2 \sin(\mu \ln|x|)), \end{cases}$$

Lembrando que  $|x| = x$ , para  $x > 0$ , podemos unir todos estes resultados, provando assim o seguinte teorema:

**Teorema 7.1.1** (Equação de Euler). *A solução geral da equação de Euler*

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,$$

*em um intervalo qualquer que não contém a origem é determinada pelas raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação*

$$F(r) = r(r - 1) + \alpha r + \beta = 0.$$

1. *Se as raízes são reais e distintas, então*

$$y(x) = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}.$$

2. *Se as raízes são reais e iguais, então*

$$y(x) = |x|^{r_1}(c_1 + c_2 \ln|x|).$$

3. *Se as raízes são complexas conjugadas, então*

$$y(x) = |x|^\lambda(c_1 \cos(\mu \ln|x|) + c_2 \sin(\mu \ln|x|)),$$

onde  $r_1 = \lambda + i\mu$  e  $r_2 = \lambda - i\mu$ , com  $\mu \neq 0$ .

**Exemplo 7.1.2.** *Encontre a solução geral para a equação de Euler em  $x > 0$ , dada por*

(a)  $2x^2y'' + 3xy' - y = 0.$

(b)  $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0.$

(c)  $x^2y'' + xy' + y = 0.$

**Solução:** *Para o item (a), temos*

$$F(r) = 2r(r - 1) + 3r - 1 = 2r^2 + r - 1 = 2 \left( r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} \right) \\ 2 \left( r - \frac{1}{2} \right) (r + 1),$$

e portanto as raízes  $r_1 = \frac{1}{2}$  e  $r_2 = -1$  são reais e distintas, e a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-1}, \text{ para } x > 0.$$

Para o item (b), note que

$$F(r) = r(r-1) + 5r + 4 = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2,$$

e assim temos duas raízes reais e iguais  $r_1 = r_2 = -2$ , logo a solução geral é dada por

$$y(x) = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x).$$

Para o item (c), vemos que

$$F(r) = r(r-1) + r + 1 = r^2 + 1 = (r+i)(r-i),$$

e assim temos duas raízes complexas conjugadas  $r_1 = i$  e  $r_2 = -i$ , logo a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x).$$

## 7.2 Soluções em séries num ponto singular regular - o método de Frobenius

Nesta seção vamos nos preocupar em resolver a equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{7.2.1}$$

mas numa situação um pouco mais geral do que fizemos acima. Queremos resolver esta equação numa vizinhança da origem  $x_0 = 0$ , mas vamos supor que pelo menos uma das funções  $p(x)$  ou  $q(x)$  não seja analítica numa vizinhança da origem  $x_0 = 0$ ; isto é, não é possível expandir  $p$  ou  $q$  numa série de potências em torno da origem.

Deste modo, não é razoável esperar que possamos resolver a equação acima usando uma expressão em série de potências  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , como fizemos no início deste capítulo. Vamos porém, assumir que  $x_0 = 0$  é um **ponto singular regular**; isto é, que as funções dadas por  $s(x) = xp(x)$  e  $t(x) = x^2q(x)$  são funções analíticas e tem expansões em séries

de potências dadas por

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \quad \text{e} \quad t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

numa vizinhança de  $x_0 = 0$ .

Para que estas funções  $s$  e  $t$  apareçam na equação inicial, vamos multiplicá-la por  $x^2$ , obtendo

$$x^2 y'' + x s(x) y' + t(x) y = 0.$$

Note que se  $s_n = t_n = 0$ , para  $n \geq 1$ , a equação acima se reduz a

$$x^2 y'' + x s_0 y' + t_0 y = 0, \tag{7.2.2}$$

que é uma equação de Euler, e foi discutida na seção anterior. Novamente, vamos nos restringir a encontrar soluções para  $x > 0$  numa vizinhança de  $x_0 = 0$ . Como a equação (7.2.1) é basicamente uma equação de Euler da forma (7.2.2), cuja solução é  $x^r$ , buscaremos uma solução em série na forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

com  $a_0 \neq 0$ , que é chamada **série de Frobenius**.

Nosso plano para encontrar tal solução é o seguinte:

1. encontrar os valores de  $r$  para os quais a equação (7.2.1) tem uma solução dada por uma série de Frobenius;
2. encontrar e resolver a relação de recorrência para os coeficientes  $a_n$  e
3. encontrar o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

A teoria geral foi feita e provada pelo matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), e é bastante complicada. Ao invés de apresentarmos esta teoria geral, iremos aplicá-la em alguns exemplos, para que possamos ilustrá-la um pouco.

**Exemplo 7.2.1.** *Encontre uma solução para a equação diferencial*

$$2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0. \tag{7.2.3}$$

**Solução:** *Claramente,  $x_0 = 0$  é um ponto regular singular. De fato, temos  $p(x) = -\frac{1}{2x}$  e*

$q(x) = \frac{1+x}{2x^2}$ , e portanto

$$s(x) = xp(x) = -\frac{1}{2} \quad e \quad t(x) = x^2q(x) = \frac{1+x}{2},$$

que já estão escritas em suas séries de potência, já que  $s_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $t_0 = t_1 = \frac{1}{2}$  e todos os outros  $s_n$  e  $t_n$  são zero. A equação de Euler correspondente a equação (7.2.3) é

$$2x^2y'' - xy' + y = 0.$$

Vamos então assumir que temos uma solução  $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  para (7.2.3), com  $a_0 \neq 0$ . Temos

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} \quad e \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2},$$

e substituindo estes valores na equação (7.2.3), temos

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (1+x)y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}. \end{aligned}$$

O último termo do lado direito na expressão acima, pode ser escrito como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n}$ , e podemos combinar os termos para obter

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (1+x)y &= a_0[2r(r-1) - r + 1]x^r \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \{[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n + a_{n-1}\}x^{r+n} = 0. \end{aligned}$$

Se a equação acima deve ser satisfeita para todo  $x$ , então todos os coeficientes dessa série devem ser zero. Do coeficiente de  $x^r$ , uma vez que  $a_0 \neq 0$ , obtemos  $2r(r-1) - r + 1 = 0$ ; isto é,

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0.$$

Esta equação é chamada de **equação indicial** para a equação (7.2.3). Note que esta é exatamente a mesma equação polinomial que obteríamos para a equação de Euler associada à equação (7.2.3). As raízes da equação indicial são  $r_1 = 1$  e  $r_2 = \frac{1}{2}$ . Estes valores são chamados os **expoentes na singularidade** para o ponto singular regular  $x_0 = 0$ .

Agora, os coeficientes de  $x^{r+n}$  nos dão

$$[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n + a_{n-1} = 0,$$

ou equivalentemente

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1} = -\frac{a_{n-1}}{[(r+n) - 1][2(r+n) - 1]}, \text{ para } n \geq 1.$$

Para cada uma das duas raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação indicial, usamos a relação de recorrência acima para encontrar valores para os coeficientes  $a_n$ . Para  $r_1 = 1$ , temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \text{ para } n \geq 1,$$

e podemos mostrar que

$$a_n = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)n!} a_0, \text{ para } n \geq 1.$$

Assim, tomando  $a_0 = 1$ , obtemos uma solução para (7.2.3) dada por

$$y_1(x) = x \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)n!} x^n \right], \text{ para } x > 0.$$

Podemos determinar o raio de convergência para esta série usando o teste da razão, e encontramos que esta série converge para todo  $x$ .

Para a segunda raiz  $r_2 = \frac{1}{2}$ , procedemos da mesma maneira, e encontramos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(n - \frac{1}{2})} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \text{ para } n \geq 1.$$

Portanto, encontramos

$$a_n = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)n!} a_0, \text{ para } n \geq 1,$$

e novamente, tomando  $a_0 = 1$ , obtemos uma segunda solução para esta equação, dada por

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)n!} x^n \right], \text{ para } x > 0,$$

e esta série também converge para todo  $x$ .

Como os termos principais de  $y_1$  e  $y_2$  são  $x$  e  $x^{\frac{1}{2}}$ , respectivamente, segue que estas

soluções são linearmente independentes. Portanto, a solução geral da equação (7.2.3) é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \text{ para } x > 0.$$

### 7.3 Equação de Legendre

Esta seção é um exercício para o leitor encontrar as soluções para a equação de Legendre, dada por

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad (7.3.1)$$

e também algumas de suas propriedades.

1. Note que o ponto  $x_0 = 0$  é um ponto ordinário para (7.3.1).
2. Note que é necessário somente considerar o caso  $\alpha > -1$ , pois se  $\alpha \leq -1$ , então a substituição  $\gamma = \alpha - 1 \geq 0$  nos dá a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma + 1)y = 0.$$

3. Procure uma solução para a equação de Legendre na forma de série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

e como a distância de  $x_0 = 0$  até as singularidades  $1, -1$  da função  $\frac{1}{1-x^2}$  é 1, podemos esperar que esta série de potências tenha raio de convergência pelo menos 1.

4. Mostre que as soluções linearmente independentes para a equação de Legendre para  $|x| < 1$  são

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4) \cdots (\alpha - 2k + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3) \cdots (\alpha + 2k - 1)}{(2k)!} x^{2k},$$

e

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3) \cdots (\alpha - 2k + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4) \cdots (\alpha + 2k)}{(2k + 1)!} x^{2k+1}.$$

5. Mostre que se  $\alpha = 0$  ou se  $\alpha$  é um inteiro positivo par ( $\alpha = 2n$ ), então a solução  $y_1(x)$  se reduz a um polinômio de grau  $2n$  contendo somente potências pares de  $x$ .

6. Mostre que se  $\alpha$  é um inteiro positivo ímpar, então  $y_2(x)$  se reduz a um polinômio de grau  $2n + 1$  contendo somente potências ímpares de  $x$ .
7. Defina o **polinômio de Legendre**  $P_n(x)$  para um inteiro  $n$  como a solução polinomial da equação de Legendre com  $\alpha = n$ , que satisfaz  $P_n(1) = 1$ .
8. Mostre que a equação de Legendre pode ser escrita na forma

$$[(1 - x^2)y']' = -\alpha(\alpha + 1)y.$$

Assim, segue que  $[(1 - x^2)P_n'(x)]' = -n(n + 1)P_n(x)$  e  $[(1 - x^2)P_m'(x)]' = -m(m + 1)P_m(x)$ . Multiplicando a primeira equação por  $P_m(x)$ , a segunda por  $P_n(x)$  e fazendo uma integração por partes, mostre que

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \text{ se } n \neq m.$$

*Nota: é possível mostrar também que se  $n = m$  então a integral acima vale  $\frac{2}{2n+1}$ .*

9. Dado um polinômio qualquer  $p(x)$  de grau  $n$ , sempre é possível escrever  $p$  como uma combinação linear de  $P_0(x), \dots, P_n(x)$ ; isto é, sempre existem constantes  $a_0, \dots, a_k$  tais que

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x).$$

Usando este fato e o item (8), prove que

$$a_k = \frac{2k + 1}{2} \int_{-1}^1 p(x)P_k(x)dx.$$

## 7.4 Equação de Bessel

Vamos nesta seção em procurar uma solução para a *equação de Bessel* de ordem zero, dada por

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \quad (7.4.1)$$

Vemos que  $x_0 = 0$  é um ponto singular regular desta equação, e vamos considerar por simplicidade o caso  $x > 0$ . Queremos encontrar uma série de Frobenius

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+r},$$

onde  $a_0 \neq 0$  e tal que esta série convirja para  $|x| < \rho$ , com  $\rho > 0$ . Temos

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1} \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}.$$

Substituindo estas expressões em (7.4.1), temos

$$\begin{aligned} x^2 y'' + x y' + x^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(r+n)(r+n-1) + (r+n)] x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} \\ &= a_0 [r(r-1) + r] x^r + a_1 [(r+1)r + (r+1)] x^{r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(r+n)(r+n-1) + (r+n)] x^{r+n} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} \\ &= a_0 [r(r-1) + r] x^r + a_1 [(r+1)r + (r+1)] x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n [(r+n)(r+n-1) + (r+n)] + a_{n-2}\} x^{r+n} = 0. \end{aligned}$$

A equação indicial para esta equação é  $F(r) = r(r-1) + r$  (o coeficiente do termo  $a_0$ ), que tem  $r_1 = 0$  como raiz de multiplicidade dois. Neste caso, podemos somente encontrar uma solução para esta equação.

**Observação 7.4.1.** *É possível, com um estudo mais aprofundado, encontrar uma segunda solução para esta equação. Por simplicidade, nos focaremos somente em encontrar uma.*

Assim, esperamos encontrar uma solução da forma  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Com  $r = 0$  na expressão acima, obtemos que  $a_1 = 0$  e também a seguinte relação de recorrência:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Vemos da relação de recorrência que os coeficientes de índices pares e ímpares são encontrados separadamente.

**Caso 1:** índices ímpares.

Neste caso, como  $a_1 = 0$ , a relação de recorrência nos dá que  $a_{2n+1} = 0$ , para todo  $n \geq 0$ .

**Caso 2:** índices pares.



Neste caso, temos

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^4 2^2}, \quad a_6 = -\frac{a_4}{2^6 (3 \cdot 2)^2},$$

e, em geral, esperamos que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} a_0. \quad (7.4.2)$$

Provemos (7.4.2) utilizando o princípio da indução finita. Claramente, como constamos acima, (7.4.2) é válida para  $k = 0, 1, 2$  e  $3$ . Suponhamos que (7.4.2) é válida para um  $k$  arbitrário e provemos ser verdade para  $k + 1$ .

Temos

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{2^2 (k+1)^2} = -\frac{(-1)^k}{2^2 (k+1)^2 \cdot 2^{2k} (k!)^2} a_0 = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2(k+1)} [(k+1)!]^2} a_0,$$

e portanto (7.4.2) é válida para todo  $k \geq 0$ .

Portanto, uma solução para a equação de Bessel tem a forma

$$y_1(x) = a_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \right].$$

A função entre os colchetes é chamada de **função de Bessel do primeiro tipo de ordem zero**, e é denotada por  $J_0(x)$ . Com o teste da razão, podemos concluir que esta série converge para todo  $x$  real.



---

# Equações diferenciais parciais

---

Neste capítulo vamos dar brevemente a definição de uma *equação diferencial parcial* e resolver algumas equações em casos particulares. Começamos nosso estudo com a seguinte definição:

**Definição 8.0.2.** *Uma equação diferencial parcial, ou simplesmente, uma EDP, é uma relação que envolve uma função  $u$  de  $n$ -variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$  e suas derivadas parciais com relação a cada uma dessas variáveis, até uma certa ordem  $k$ .*

**Exemplo 8.0.3.** *Para uma função  $u(t, x)$  ou  $u(x, y)$ , temos as seguintes EDP's:*

1.  $u_{xx} = 0$ .
2.  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , onde  $c$  é uma constante. Esta é chamada a **equação da onda**.
3.  $u_t = k u_{xx}$ , onde  $k > 0$  é uma constante. Esta é chamada a **equação do calor**.
4.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ . Esta é chamada a **equação de Laplace**.

A teoria de resolução de EDP's é consideravelmente mais complicada do que a teoria de EDO's, e a resolução de uma EDP depende não somente da equação em si, mas depende também do 'formato' da região aonde estamos considerando estas equações (isto ficará mais claro ao longo do capítulo).

Nos dedicaremos agora à resolução da equação da onda e da equação de Laplace em alguns casos especiais. Começamos com a resolução da equação de Laplace em um retângulo.

## 8.1 Equação de Laplace

A **equação de Laplace** para uma função  $u(x_1, \dots, x_n)$  é dada por

$$\Delta u \doteq u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} = 0.$$

Uma função que satisfaz a equação de Laplace é chamada de **função harmônica**. Em dimensão um, temos simplesmente  $u_{xx} = 0$ , cujas soluções são da forma  $u(x) = A + Bx$ , onde  $A$  e  $B$  são constantes; mas isto é tão simples que este caso não nos dá absolutamente nenhuma dica do que acontece em dimensões maiores.

Para vermos o que pode acontecer, vamos estudar a equação de Laplace em dimensão 2. Mais precisamente vamos estudar o **problema de Dirichlet**

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (8.1.1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado em  $\mathbb{R}^2$  e  $f$  é uma função dada.

É possível mostrar, sem muitas dificuldades, que nestas condições a equação de Laplace possui no máximo uma solução. Mas as dificuldades aparecem quando queremos responder as seguintes perguntas: será que ela possui uma solução? E se de fato tal solução existe, é possível encontrar uma expressão explícita para ela?

Neste ponto veremos o quanto o domínio  $\Omega$  é importante para respondermos tais perguntas. Começaremos com o caso mais simples, aonde  $\Omega$  é um retângulo.

### 8.1.1 Domínios retangulares

Vamos aqui utilizar o *método da separação de variáveis*, para encontrar a solução do problema de Dirichlet (8.1.1) no caso onde  $\Omega$  é o retângulo

$$\Omega \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < a, 0 < y < b\},$$

e a função  $f$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & \text{para } (x, y) \text{ em } [0, a] \times \{0\}; \\ f_2(y), & \text{para } (x, y) \text{ em } \{a\} \times [0, b]; \\ f_3(x), & \text{para } (x, y) \text{ em } [0, a] \times \{b\}; \\ f_4(y), & \text{para } (x, y) \text{ em } \{0\} \times [0, b], \end{cases}$$

onde  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  são funções dadas, satisfazendo  $f_1(0) = f_4(0)$ ,  $f_1(a) = f_2(0)$ ,  $f_2(b) = f_3(a)$ ,  $f_3(0) = f_4(b)$ .

Como a soma de soluções da equação de Laplace ainda é uma solução, podemos facilmente ver que basta resolver o caso  $f_1 = f_2 = f_4 \equiv 0$ . Os casos  $f_1 = f_3 = f_4 \equiv 0$ ,  $f_2 = f_3 = f_4 \equiv 0$  e  $f_1 = f_2 = f_3 \equiv 0$  são resolvidos analogamente, e o caso geral é obtido pela soma destes quatro casos.

Como mencionamos anteriormente, utilizaremos aqui o **método da separação de**

**variáveis**, que consiste em buscar solução que dependam *separadamente* das variáveis  $x$  e  $y$ ; isto é, buscamos uma solução da equação de Laplace que tenha a forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

onde  $X, Y$  são funções independentes.

Utilizando esta expressão para  $u$ , a equação de Laplace se torna

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

e como estamos procurando soluções não-nulas para o nosso problema, podemos dividir esta expressão por  $X(x)Y(y)$  para obter

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0,$$

ou equivalentemente

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Mas note que na expressão acima, o lado esquerdo é uma função que só depende de  $x$ , enquanto o lado direito é uma função que depende somente de  $Y$ . Isto só é possível quando estas duas funções tem valor constante, que denotamos por  $\lambda$ . Dito de outra maneira, existe um número real  $\lambda$  tal que

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Assim, primeiramente vamos resolver o problema homogêneo

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \quad (8.1.2)$$

**Observação 8.1.1.** *As condições iniciais para  $X$  são obtidas lembrando que  $0 = u(0, y) = X(0)Y(y)$  e  $0 = u(a, y) = X(a)Y(y)$ , para todo  $y \in [0, b]$ , e como buscamos soluções não-nulas para a equação, devemos ter  $X(0) = X(a) = 0$ .*

O polinômio característico de (8.1.2) é dado por  $F(r) = r^2 + \lambda$ , cujas raízes são  $r = \pm i\sqrt{\lambda}$  e assim a solução geral para a equação em (8.1.2) é dada por

$$X(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x},$$

onde  $c_1, c_2$  são constantes arbitrárias. Aplicando as condições iniciais, temos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{i\sqrt{\lambda}a} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}a} = 0, \end{cases} \quad (8.1.3)$$

e assim, obtemos que  $c_1(e^{i\sqrt{\lambda}a} - e^{-i\sqrt{\lambda}a}) = 0$ . Como estamos buscando soluções não-nulas, devemos ter  $c_1 \neq 0$  (pois se  $c_1 = 0$  então  $c_2 = 0$  e assim  $X(x) = 0$ ), o que nos dá que

$$e^{i\sqrt{\lambda}a} - e^{-i\sqrt{\lambda}a} = 0,$$

e assim temos  $e^{2i\sqrt{\lambda}a} = 1$ , portanto  $2i\sqrt{\lambda}a = 2n\pi i$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ ; isto é,  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, a equação (8.1.2) só terá solução não nula se  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , e neste caso, as raízes do polinômio característico são  $r = \pm i\frac{n\pi}{a}$ . A solução geral de (8.1.2) para  $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a}$  com  $n \geq 1$ , que denotamos por  $X_n(x)$  é da forma

$$X_n(x) = c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Para  $n = 0$ , temos  $\lambda = 0$  e a solução geral de (8.1.2) é a da forma

$$X(x) = c_1 + c_2x.$$

Com as condições iniciais  $X(0) = X(a) = 0$ , obtemos que  $X(x) = 0$ , que não nos interessa. Assim, vamos analisar somente as soluções para  $n \geq 1$ .

Agora, para estes valores de  $\lambda$ , vamos encontrar as soluções de

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0. \end{cases} \quad (8.1.4)$$

**Observação 8.1.2.** *Aqui, novamente, a condição inicial é obtida da expressão  $0 = u(x, 0) = X(x)Y(0)$ , e como  $X(x)$  não é nula, devemos ter  $Y(0) = 0$ .*

O polinômio característico deste problema é  $\tilde{F}(r) = r^2 - \lambda$ , que tem raízes  $r = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\frac{n\pi}{a}$ . Logo, a solução geral para (8.1.4) é dada por

$$Y(y) = d_1 e^{\frac{n\pi}{a}y} + d_2 e^{-\frac{n\pi}{a}y}.$$

Aplicando a condição inicial, obtemos

$$d_1 + d_2 = 0,$$

e assim a solução geral  $Y_n$  de (8.1.4) para  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$  é dada por

$$Y_n(y) = d_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Logo, para cada  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$  com  $n \geq 1$ , temos uma solução  $u_n(x, y)$  para a equação de Laplace, com  $c_1 = d_1 = 1$ , dada por

$$u_n(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Usando o princípio da superposição, como combinações lineares de soluções de equações diferenciais lineares ainda são soluções, uma solução para a equação de Laplace é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Para completar o problema, devemos encontrar uma solução que satisfaça a condição  $u(x, b) = f_3(x)$ , para todo  $x \in [0, a]$ . Aplicando esta condição devemos ter

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right), \text{ para todo } x \in [0, a].$$

Vamos agora determinar os coeficientes  $a_n$  para que a expressão acima seja válida.

**Lema 8.1.3.** Para  $n, m \geq 1$  temos

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \frac{a}{2}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Agora, usando o lema acima, multiplicando a expressão a expressão por  $\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$  e integrando de 0 até  $a$ , obtemos

$$\int_0^a f_3(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = a_m \cdot \frac{a}{2} \cdot \sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right),$$

logo temos

$$a_m = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)} \int_0^a f_3(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx,$$

para todo  $m \geq 1$ .

Portanto a solução de (8.1.1) no retângulo  $\Omega$  é

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_3(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right),$$

para  $(x, y) \in \Omega$ .

**Exercício 8.1.4.** *Encontre a solução deste problema quando  $f_3(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ , de maneira que tal solução não esteja mais expressa em forma de séries.*

## 8.1.2 Discos

Nesta seção, veremos como encontrar uma solução para o problema (8.1.1) quando  $\Omega$  é um disco centrado na origem; isto é,  $\Omega \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \rho^2\}$  para algum  $\rho > 0$ , isto é, vamos estudar o problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{em } \Omega \\ u = h(\theta), & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.1.5)$$

Vamos aqui utilizar o método da separação de variáveis novamente. Mas, como estamos trabalhando num disco, é mais conveniente trabalharmos com coordenadas polares. Sendo assim, precisamos verificar como o operador Laplaceno se comporta em coordenadas polares.

Lembremos que em coordenadas polares, descrevemos os pontos do disco  $\Omega$  por  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , onde  $0 \leq r < \rho$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Assim, se escrevemos  $u(x, y) = u(x(r, \theta), y(r, \theta))$ , temos

$$\partial_r u = \partial_x u \cos \theta + \partial_y u \sin \theta \quad \text{e} \quad \partial_\theta u = -\partial_x u \cdot r \sin \theta + \partial_y u \cdot r \cos \theta.$$

Simbolicamente, denotamos isto na forma matricial, para obter a seguinte relação entre os operadores diferenciais

$$\begin{bmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix}$$

Invertendo esta transformação, obtemos

$$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{bmatrix}$$



Agora, usando estas expressões, temos

$$\partial_{xx} = \cos^2 \theta \partial_{rr} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \partial_r \partial_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \partial_{\theta\theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \partial_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r} \partial_r$$

e

$$\partial_{yy} = \sin^2 \theta \partial_{rr} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \partial_r \partial_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \partial_{\theta\theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \partial_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \partial_r.$$

Assim, somando as duas, obtemos a expressão para o operador Laplaceano em coordenadas polares, dada por

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta},$$

para  $0 < r < \rho$ .

**Observação 8.1.5.** *Por enquanto, assumiremos que  $r > 0$ , para podermos utilizar a expressão para o Laplaceano em coordenadas polares. Em alguns passos mais adiante, removeremos esta condição, para encontrar soluções em todo o disco.*

Vamos agora buscar soluções para (8.1.5) da forma  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . Temos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}rR'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0.$$

Como estamos buscando soluções não-nulas para o problema, podemos dividir esta expressão por  $u$ , e multiplicá-la por  $r^2$ , para obter

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0,$$

ou equivalentemente

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Como para o caso de retângulos, a expressão acima só é possível se existe uma constante  $\lambda$  tal que

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda.$$

Utilizando a equação para  $\Theta$ , lembrando que  $\Theta$  deve ser uma função  $2\pi$ -periódica, temos

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), \text{ para } \theta \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.1.6)$$

O polinômio característico desta equação é  $F_\theta(s) = s^2 + \lambda$ , cujas raízes são  $s = \pm i\sqrt{\lambda}$ ,

e assim a solução geral é dada por

$$\Theta(\theta) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\theta) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\theta).$$

**Exercício 8.1.6.** *Mostre que utilizando as condições de contorno para  $\Theta$ , obtemos  $\lambda = n^2$ .*

Com este exercício, obtemos então a solução

$$\Theta_n(\theta) = c_1 \sin(n\theta) + c_2 \cos(n\theta),$$

para cada  $n \geq 0$ . Note que para  $\lambda = 0$ , a solução é  $\Theta_0(\theta) = c_2$ .

**Observação 8.1.7.** *Note que as constantes variam com  $n$ ; isto é,  $c_1 = c_1(n)$  e  $c_2 = c_2(n)$ .*

Agora, para cada  $\lambda = n^2$ ,  $n \geq 0$ , vamos encontrar a solução da equação

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0,$$

que é uma equação de Euler, que tem polinômio característico  $F_r(s) = s(s-1) + s - n^2$ ; de onde obtemos que  $s = \pm n$ .

Assim, para  $n \geq 1$ , temos a solução

$$R_n(r) = d_1 r^n + c_2 r^{-n},$$

e a solução para  $n = 0$  é dada por

$$R_0(r) = d_1 + d_2 \ln r.$$

Como as soluções  $r^{-n}$  e  $\ln r$  tendem a infinito quando  $r \rightarrow 0^+$ , descartamos todos estes termos, e assim obtemos as soluções

$$R_n(r) = d_1 r^n, \text{ para } n \geq 0 \text{ e } 0 \leq r < \rho.$$

Assim, como no caso anterior, multiplicando as soluções  $R_n$  e  $\Theta_n$  e somando para  $n \geq 0$ , obtemos

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

Usando a condição de fronteira, obtemos então

$$h(\theta) = u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

Vamos agora determinar os coeficientes  $a_n, b_n$  para que a expressão acima seja válida e para isso, utilizaremos o seguinte resultado:

**Lema 8.1.8.** *Temos as seguintes relações para  $n, m \geq 1$ :*

$$(i) \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) d\phi = 0;$$

$$(ii) \int_0^{2\pi} \sin(n\phi) d\phi = 0;$$

$$(iii) \int_0^{2\pi} \sin(n\phi) \cos(n\phi) d\phi = 0;$$

$$(iv) \int_0^{2\pi} \sin(n\phi) \sin(m\phi) d\phi = 0; \text{ para } n \neq m;$$

$$(v) \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \cos(m\phi) d\phi = 0; \text{ para } n \neq m;$$

$$(vi) \int_0^{2\pi} \cos^2(n\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2(n\phi) d\phi = \pi.$$

Agora, usando este lema, fica a cargo do leitor demonstrar (utilizando as mesmas ideias do caso de domínios retangulares) que

$$a_n = \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos(n\phi) d\phi, \text{ para } n \geq 0,$$

e também que

$$b_n = \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin(n\phi) d\phi.$$

Portanto a solução para o problema tem a forma

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \int_0^{2\pi} h(\phi) [\cos(n\phi) \cos(n\theta) + \sin(n\phi) \sin(n\theta)] d\phi.$$

Assim, podemos escrever

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos(n(\theta - \phi)) \right\} d\phi.$$

Lembrando que  $2 \cos(n(\theta - \phi)) = e^{in(\theta - \phi)} + e^{-in(\theta - \phi)}$ , temos

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos(n(\theta - \phi)) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n e^{in(\theta - \phi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n e^{-in(\theta - \phi)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho} e^{i(\theta - \phi)}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho} e^{-i(\theta - \phi)}\right)^n = \\ &= 1 + \frac{r e^{i(\theta - \phi)}}{\rho - r e^{i(\theta - \phi)}} + \frac{r e^{-i(\theta - \phi)}}{\rho - r e^{-i(\theta - \phi)}} \\ &= \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \phi) + r^2} \end{aligned}$$

Portanto, a solução para o problema de Dirichlet no disco (8.1.5) é dada pela expressão abaixo, conhecida como a **fórmula de Poisson**:

$$u(r, \theta) = \frac{\rho^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi.$$

**Exercício 8.1.9.** Encontre uma expressão como a fórmula acima, para o caso onde  $\Omega$  é o exterior de um disco; isto é,  $\rho < r < \infty$ . (Dica: neste caso, faça como fizemos nesta seção, mas as soluções a serem descartadas são  $r^n$  e  $\ln r$ )

## 8.2 Equação da onda

Nesta seção, o leitor está convidado a lidar com a **equação da onda** para uma função  $u(x, t)$ , dada por

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Mais especificamente, lidar com o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{para } 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \end{cases} \quad (8.2.1)$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = \phi(x) \text{ e } u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Usando, novamente, utilizar o método da separação de variáveis, buscaremos uma solução de (8.2.1) da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Utilizando esta expressão para  $u$ , temos

$$T''(t)X(x) = c^2 X''(x)T(t),$$

e dividindo esta expressão por  $-c^2 X(x)T(t)$  obtemos

$$\frac{T''(t)}{-c^2 T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Como o lado esquerdo da igualdade acima é uma função que depende somente da variável  $t$  e o lado direito depende somente de  $x$ , estas expressões definem um valor constante  $\lambda$ . Portanto

$$\frac{T''(t)}{-c^2 T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Logo, estas expressões nos dão as seguintes equações

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ e } T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0,$$

cujas soluções gerais são

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

e

$$T(t) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda}ct) + d_2 \sin(\sqrt{\lambda}ct).$$

Para a função  $X(x)$ , devemos ter as condições de contorno  $X(0) = X(l) = 0$ .

**Exercício 8.2.1.** *Mostre que usando estas condições para a função  $X$ , encontramos  $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  para cada  $n \geq 1$ .*

Agora, como fizemos nas seções anteriores, usando estes valores para  $\lambda$ , podemos encontrar as soluções correspondentes para a função  $T(t)$ , multiplicá-las e somar para  $n \geq 1$ , e obtemos o seguinte exercício:

**Exercício 8.2.2.** *Mostre que a solução desta equação é*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

e usando as condições  $u(x, 0) = \phi(x)$  e  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , note que

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

e

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Para encontrarmos os coeficientes  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  explicitamente, aplicamos o raciocínio utilizado nas seções anteriores:

**Exercício 8.2.3.** *Encontre, como nas seções anteriores, a expressão para os coeficientes  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em termos da função  $\phi$ , e dos coeficientes  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em termos dos coeficientes de  $\psi$ .*

**Exercício 8.2.4.** *Encontre a solução para este problema quando  $l = \pi$ ,  $\phi(x) = \sin(3x)$  e  $\psi(x) = \sin(6x)$ , de tal maneira que esta solução não esteja mais expressa em forma de uma série.*

## 8.3 Identidades de Green e funções de Green

A *função de Green*<sup>1</sup> funciona como uma ‘solução universal’ para funções harmônicas em um domínio, no sentido de que qualquer função harmônica pode ser expressa em termos da função de Green. Combinada com *métodos de reflexão*, a função de Green nos leva de uma maneira bem direta à solução para problemas de valores de contorno em alguns domínios com geometria especiais.

### 8.3.1 Notações

A principal ferramenta desta seção é o *Teorema da Divergência*, e assim, a notação vetorial será usada extensivamente. Para isso, fixaremos os conceitos (em três dimensões) que vamos utilizar.

**Definição 8.3.1.** *Se  $u = u(x, y, z)$  é uma função escalar e  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  é uma função vetorial; isto é, cada  $F_i$  é uma função escalar, temos*

$$\begin{aligned} \nabla u &= (u_x, u_y, u_z), \\ \operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}, \\ \Delta u &= \operatorname{div} \nabla u = \nabla \cdot \nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \\ |\nabla u|^2 &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>George Green estava interessado nos novos fenômenos de eletricidade e magnetismo no começo do século XIX.

Se  $\Omega$  é uma região em  $\mathbb{R}^3$ , denotamos a integral de superfície de uma função escalar  $u$  sobre a fronteira  $\partial\Omega$  por

$$\iint_{\partial\Omega} u \, dS.$$

Como mencionamos acima, nossa principal ferramenta será o Teorema da Divergência, que enunciamos abaixo:

**Teorema 8.3.2** (Teorema da Divergência). *Se  $\mathbf{F}$  é uma função vetorial em uma região limitada em  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário que aponta para fora de  $\Omega$ , então*

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

### 8.3.2 Primeira identidade de Green

Começamos aqui com a regra de derivação do produto

$$(vu_x)_x = v_x u_x + v u_{xx},$$

e o mesmo para as derivadas em  $y$  e em  $z$ . Somando estas equações temos

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

Integrando em  $\Omega$  e usando o Teorema 8.3.2 no lado esquerdo, obtemos

$$\iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS = \iiint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} + \iiint_{\Omega} v \Delta u \, d\mathbf{x}, \quad (8.3.1)$$

onde  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$  é a *derivada direcional de  $u$  na direção de  $\mathbf{n}$* . Esta equação (8.3.1) é conhecida como a **primeira identidade de Green**, e é válida para qualquer região sólida limitada  $\Omega$  e par de funções  $u, v$ . Por exemplo, podemos tomar  $v \equiv 1$  para obter

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS = \iiint_{\Omega} \Delta u \, d\mathbf{x}. \quad (8.3.2)$$

Uma aplicação imediata da primeira identidade de Green é a condição de compatibilidade para o *problema de Neumann*, dado por

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.3.3)$$

Usando a equação (8.3.2), devemos ter que

$$\iint_{\partial\Omega} h \, dS = \iiint_{\Omega} f \, d\mathbf{x}.$$

Assim,  $f$  e  $h$  não podem ser escolhidas arbitrariamente para que tenhamos esperança de que o problema de Neumann (8.3.3) tenha solução. Devemos necessariamente ter que  $f$  e  $h$  satisfaçam a condição de compatibilidade dada acima. Neste sentido, o problema de Neumann não é completamente *bem posto*. Mas, com um pouco de trabalho é possível mostrar que sempre que esta condição de compatibilidade é satisfeita o problema tem uma solução, então a situação não é assim tão ruim.

Quanto à unicidade, é fácil ver que se temos uma solução  $u$  para o problema de Neumann, se adicionarmos uma constante qualquer a esta função, obteremos outra solução para o problema, logo nunca teremos unicidade.

### 8.3.3 Segunda identidade de Green

O termo do meio da equação (8.3.1) não se altera quando trocamos  $u$  por  $v$ , assim, escrevendo esta equação com  $u$  e  $v$ , com  $v$  e  $u$  e subtraindo as duas, obtemos

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS, \quad (8.3.4)$$

que é a **segunda identidade de Green**, e como a primeira identidade, é válida para quaisquer pares de funções  $u, v$ .

Isto nos leva a uma definição natural.

**Definição 8.3.3.** Dizemos que uma condição de contorno é dita **simétrica** para o operador  $\Delta$  se o lado direito de (8.3.4) é zero para qualquer par de funções  $u, v$  que satisfazem a dada condição de fronteira.

As condições de contorno clássicas do problema  $\Delta u = f$  em  $\Omega$  são:

1. **condição de Dirichlet:**  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ ;
2. **condição de Neumann:**  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$  em  $\partial\Omega$ ;
3. **condição de Robin:**  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u = 0$  em  $\partial\Omega$ , onde  $\alpha$  é uma constante.

**Exercício 8.3.4.** Mostre que cada uma das três condições de contorno clássicas dada acima é simétrica para  $\Delta$ .



### 8.3.4 Fórmula de representação

Esta fórmula representa qualquer função *harmônica* em um domínio  $D$  como uma integral sobre a sua fronteira. Temos o seguinte resultado:

**Teorema 8.3.5.** *Se  $\Delta u = 0$  em uma região limitada  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^3$ , então para cada  $\mathbf{x}_0 \in D$ , temos*

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left[ -u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS.$$

Para demonstrar este resultado, precisaremos do seguinte lema:

**Lema 8.3.6.** *Seja  $\Omega$  uma região limitada em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Então a função dada por*

$$v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}, \text{ para } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

*é tal que  $\Delta v = 0$  em  $\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ .*

**Demonstração:** A demonstração deste resultado fica a cargo do leitor.

**Demonstração do Teorema 8.3.5:** Para aplicar a segunda identidade de Green ao par de funções  $u$  e  $v$ , com  $v$  dada no lema acima, precisamos primeiramente remover uma pequena esfera de raio  $\epsilon > 0$ , que chamaremos de  $B_\epsilon$ , centrada em  $\mathbf{x}_0$ , da região  $\Omega$ , uma vez que a função  $v$  não está definida em  $\mathbf{x}_0$ .

Por simplicidade de notação, assumiremos que  $\mathbf{x}_0$  é a origem. Assim,  $B_\epsilon$  é uma esfera pequena centrada na origem, que está inteiramente contida na região  $\Omega$ , e consideraremos uma nova região  $\Omega_\epsilon$ , obtida da região  $\Omega$  retirando a esfera  $B_\epsilon$ ; isto é,  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B_\epsilon$ .

Na região  $\Omega_\epsilon$ , a função  $v$  está bem definida e  $\Delta v = 0$ , assim, aplicando a segunda identidade de Green para o par  $u, v$ , obtemos

$$\iint_{\partial\Omega_\epsilon} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = 0.$$

Mas a fronteira  $\partial\Omega_\epsilon$  da região  $\Omega_\epsilon$  é constituída por duas partes: a fronteira da região original  $\Omega$  e também pela fronteira  $\partial B_\epsilon$  da esfera  $B_\epsilon$ . Assim, obtemos

$$\iint_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS + \iint_{\partial B_\epsilon} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = 0.$$

Agora, na fronteira  $\partial B_\epsilon$ , temos  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial r}$ , onde  $r$  é a direção radial. Como  $v(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r}$ , onde  $r = \|\mathbf{x}\|$ , temos  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi r^2}$ . Lembrando que  $r = \epsilon$  em  $\partial B_\epsilon$  e que a área de  $\partial B_\epsilon$  é  $4\pi\epsilon^2$  temos

$$\iint_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} u dS$$

Como  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  e  $u$  são contínuas em  $\Omega$ , e em particular, em  $\partial B_\epsilon$ , segue que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \rightarrow 0$$

e também

$$\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} u dS \rightarrow u(0),$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e portanto, concluímos que

$$u(0) = \iint_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS,$$

onde  $v(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}$ , o que demonstra o resultado.  $\blacksquare$

**Exercício 8.3.7.** A fórmula de representação para uma região limitada  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^2$  é dada por

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ -u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] ds.$$

Demonstre esta expressão.

**Exercício 8.3.8.** Sejam  $\phi$  uma função de classe  $C^2$  definida em  $\mathbb{R}^3$  que se anula no exterior de uma bola. Mostre que

$$\phi(0) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{\mathbf{x}} \Delta \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

onde  $\Omega$  é a região onde  $\phi$  não se anula.

### 8.3.5 Funções de Green

A fórmula de representação dada no Teorema 8.3.5 utilizou duas propriedades básicas da função  $v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$ : que ela é harmônica exceto em  $\mathbf{x}_0$  e que ela possui uma singularidade neste ponto. Nosso objetivo é tentar modificar esta função para que tenhamos uma fórmula de representação, mas que um dos termos da fórmula do Teorema 8.3.5 desapareça. Tal função modificada será chamada de *função de Green* para  $\Omega$ .

**Definição 8.3.9.** A função de Green  $G(\mathbf{x})$  para o operador  $\Delta$  no domínio  $\Omega$  no ponto  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  é uma função definida para todo  $x \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  que satisfaz:

- (i)  $G(\mathbf{x})$  possui derivadas de segunda ordem contínuas e  $\Delta G = 0$  em  $\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ;
- (ii)  $G(\mathbf{x}) = 0$  para  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ;

(iii) a função  $G(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$  é finita em  $\mathbf{x}_0$ , tem derivadas de segunda ordem contínuas em  $\Omega$  e é harmônica em  $\mathbf{x}_0$ .

Pode-se mostrar que uma função de Green sempre existe e é única. A notação usual para esta função de Green é  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ . Temos o primeiro resultado para a função de Green.

**Teorema 8.3.10.** *Se  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  é a função de Green, então a solução para o problema de Dirichlet é dada pela fórmula*

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

**Demonstração:** Defina a função  $H(\mathbf{x}) \doteq G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - v(\mathbf{x})$ , onde  $v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$ , como anteriormente. Então, pela definição da função de Green (itens (i) e (ii) da Definição 8.3.9),  $H$  é uma função harmônica em todo o domínio  $\Omega$ . Assim, escrevendo a segunda identidade de Green para o par  $u, H$  obtemos

$$0 = \iint_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} - H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

Ainda, da fórmula de representação para o par  $u, v$ , temos

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

Somando estas duas igualdades, temos

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

Como  $G = 0$  em  $\partial\Omega$ , pela condição (ii) da Definição 8.3.9, temos

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

o que completa a demonstração. ■

Uma importante característica da função de Green é que ela é **simétrica**; isto é, temos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}), \text{ para todo } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0.$$

**Exercício 8.3.11.** *Usando funções de Green, mostre que a solução para o problema de Poisson dado por*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = h, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

é dada por

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} dS + \iiint_{\Omega} f(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}.$$

### 8.3.6 Função de Green no semi-espaço

Determinaremos nesta seção a função de Green para o semi-espaço  $z > 0$ . Apesar de estarmos aqui lidando com um domínio ilimitado, as ideias envolvendo funções de Green permanecem válidas, se colocarmos uma ‘condição de contorno no infinito’, pedindo que as funções e suas derivadas tendam a 0 quanto  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ .

Escrevemos as coordenadas como  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  e lidaremos com o semi-espaço  $\Omega = \{z > 0\}$ . A ideia aqui é utilizar o **método da reflexão**; isto é, cada ponto  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$  possui um **ponto refletido**  $\mathbf{x}^* = (x, y, -z)$  que não está em  $\Omega$ .

Sabemos que a função  $v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$  satisfaz as condições (i) e (iii) da Definição 8.3.9. Nossa ideia é modificá-la para que tenhamos a condição (ii). Temos o seguinte resultado:

**Teorema 8.3.12.** *A função de Green para  $\Omega$  é dada por*

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} + \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0^*\|},$$

onde  $\mathbf{x}_0^*$  é o ponto refletido de  $\mathbf{x}_0$ .

**Demonstração:** Devemos checar as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 8.3.9. A condição (i) é claramente satisfeita,  $G$  é finita e diferenciável exceto em  $\mathbf{x}_0$  e temos  $\Delta G = 0$  em  $\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ .

A condição (ii) segue do fato de que se  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , então  $z = 0$  e assim  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$  e portanto  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ .

Para (iii) é fácil ver que como  $\mathbf{x}_0^*$  está fora de  $\Omega$ , a função  $\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0^*\|}$  não possui nenhuma singularidade em  $\Omega$  e portanto tem suas derivadas de segunda ordem e é harmônica em  $\mathbf{x}_0$ . ■

Vamos agora usar esta função de Green para resolver o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega \\ u(x, y, 0) = h(x, y). \end{cases}$$

Usaremos o Teorema 8.3.10. Note que  $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial G}{\partial z}$  em  $\partial\Omega$ , já que  $\mathbf{n}$  aponta para baixo. Ainda mais

$$-\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{z+z_0}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0^*\|^3} - \frac{z-z_0}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^3} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{z_0}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^3},$$

em  $\partial\Omega$ . Portanto a solução do problema de Dirichlet é

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{z_0}{2\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} dS.$$



# Referências Bibliográficas

---

- [1] Boyce, W.E. & DiPrima, R.C.: *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 8ed (2006).
- [2] Strauss, W.A.: *Partial differential equations: an introduction*. John Wiley & Sons, 2ed (2008).
- [3] Zill, F. & Shanahan, P.D.: *Curso introdutório à análise complexa com aplicações*. LTC, 2ed (2009).