MATHEUS CHEQUE BORTOLAN

# ELEMENTOS DA TEORIA ESPECTRAL

Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

# Elementos da Teoria Espectral

Matheus Cheque Bortolan

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Florianópolis, 2021.

# Introdução

Seguindo as ideias apresentadas nas notas de aula de Análise Funcional II do Prof. Alexandre Nolasco de Carvalho (ICMC-USP), apresentamos aqui um pouco da teoria espectral para operadores fechados em espaços de Banach e de Hilbert, e a teoria de potências fracionárias para operadores de tipo positivo.

Tal estudo é particularmente importante para a resolução de equações diferenciais semilineares em espaços de dimensão infinita. Ao leitor, será necessário conhecimento prévio dos resultados principais das disciplinas de Análise Funcional e Funções de uma Variável Complexa.

*Gostaria de deixar meus agradecimentos aos alunos Carlos Pecorari Neto, Daniella Losso, Izabella Furtado e Maritza Brito, por me ajudarem extensivamente na confecção e melhoria constante deste material.*

Matheus Cheque Bortolan

# Sumário

# CAPÍTULO 1

## Cálculo de Funções Vetoriais

Começaremos nosso estudo analisando as propriedades de funções numa variável complexa a valores num espaço vetorial $X$, chamadas de *funções vetoriais*. Veremos que a maioria destas propriedades é análoga às propriedades de funções numa variável complexa a valores complexos, quando o espaço $X$ for um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos. Para os resultados envolvendo funções complexas de uma variável complexa, indicamos [4], por exemplo.

Denotaremos por $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais, $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos. Além disso, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ denotará o conjunto dos números reais não-negativos, $\mathbb{K}$ denota ambos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e $X$ denota um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ com norma $\|\cdot\|_X$.

Para $Y$ um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_Y$, consideremos um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to Y$, onde $D(A)$ é chamado de **domínio de** $A$, e é um subespaço vetorial de $X$. Dizemos que $A$ é **limitado** se existe uma constante $C \geqslant 0$ tal que

$$\|Ax\|_Y \leqslant C\|x\|_X \quad \text{para todo } x \in D(A). \tag{1.1}$$

Consideramos o conjunto

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{A\colon X \to Y \text{ tal que } A \text{ é um operador linear limitado}\},$$

e quando $Y = X$, denotamos $\mathcal{L}(X, Y)$ simplesmente por $\mathcal{L}(X)$. Quando $Y = \mathbb{K}$ escrevemos $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ para denotar o **espaço dual** de $X$. Em $\mathcal{L}(X, Y)$ definimos

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}. \tag{1.2}$$

**Exercício 1.1.** Mostre que (1.2) define uma norma em $\mathcal{L}(X, Y)$. Mostre ainda que se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ então

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y.$$

**Solução:**

**Exercício 1.2.** Mostre que se $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ então

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \inf\{C \geqslant 0 \colon \|Ax\|_Y \leqslant C\|x\|_X \text{ para todo } x \in X\}.$$

**Exercício 1.3.** Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados, com $X \neq \{0\}$. Mostre que $Y$ é um espaço de Banach se, e somente se, $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach. Em particular, se $X$ é um espaço vetorial normado qualquer sobre $\mathbb{K}$, seu dual $X^*$ é um espaço de Banach.

**Exercício 1.4.** Mostre que, com a operação de composição de operadores, o espaço $\mathcal{L}(X)$ é uma **álgebra de Banach**, isto é, se $A, B \in \mathcal{L}(X)$, então

$$\|AB\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|B\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

**Dica:** Use o Exercício 1.2.

Para $x^* \in X^*$, vamos denotar a sua avaliação num ponto $x \in X$ por $\langle x, x^* \rangle$, isto é, $\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$.

## 1.1 Analiticidade

Se $X$ é um espaço de Banach, $r > 0$ e $x \in X$, então

$$B_r^X(x) = \{z \in X \colon \|z - x\|_X < r\} \quad \text{e} \quad \overline{B}_r^X(x) = \{z \in X \colon \|z - x\|_X \leqslant r\}$$

denotarão as bolas aberta e fechada, respectivamente, de centro em $x$ e raio $r$ em $X$. Quando for claro qual é o espaço $X$, as denotaremos simplesmente por $B_r(x)$ e $\overline{B}_r(x)$, respectivamente.

**Definição 1.1.1** (Função Vetorial Analítica). Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e $X$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, diremos que uma função vetorial $f \colon \Omega \to X$ é **analítica** em $\Omega$ se para cada $\lambda_0 \in \Omega$ existe $f'(\lambda_0) \in X$ tal que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = f'(\lambda_0).$$

O ponto $f'(\lambda_0) \in X$ é chamado **derivada de $f$ em $\lambda_0$**. Denotaremos $f'(\lambda_0)$ também por $\frac{df}{d\lambda}(\lambda_0)$.

**Exercício 1.5.** Mostre que se $f \colon \Omega \to X$ é analítica e $x^* \in X^*$, então $\langle f(\cdot), x^* \rangle \colon \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica (como função complexa) e

$$\frac{d}{d\lambda}\langle f(\lambda_0), x^* \rangle = \langle f'(\lambda_0), x^* \rangle.$$

Surpreendentemente (já que, em geral, convergência fraca não implica convergência forte), a recíproca do Exercício 1.5 acima também é verdadeira, como veremos a seguir.

**Teorema 1.1.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $f\colon \Omega \to X$ uma função vetorial tal que $\langle f(\cdot), x^*\rangle\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica para todo $x^* \in X^*$. Então $f\colon \Omega \to X$ é analítica.*

*Demonstração.* Como $X$ é completo, para mostrar que $f$ é analítica em $\Omega$ é suficiente provar que, para cada $\lambda_0 \in \Omega$, a expressão

$$\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} - \frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0}$$

tende a zero quando $\lambda$ e $\mu$ tendem a $\lambda_0$.

Fixemos então $\lambda_0 \in \Omega$. Como $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, existe $r > 0$ tal que $D = \overline{B}_r^{\mathbb{C}}(\lambda_0) \subset \Omega$. Denotemos por $\gamma$ a fronteira $\partial D$ de $D$ orientada no sentido antihorário, isto é, $\partial D$ pode ser parametrizada pela curva $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por

$$\gamma(t) = \lambda_0 + re^{2\pi i t} \quad \text{para } t \in [0,1].$$

Para cada $x^* \in X^*$ a função $\langle f(\cdot), x^*\rangle\colon D \to \mathbb{C}$ é contínua (pois é analítica em $D$), e portanto limitada em $D$. Assim, existe $M_{x^*} \geqslant 0$ tal que

$$|\langle f(\lambda), x^*\rangle| \leqslant M_{x^*} \quad \text{para todo } \lambda \in D. \tag{1.3}$$

Para cada $\lambda \in D$, defina $T_\lambda\colon X^* \to \mathbb{C}$ por $T_\lambda(x^*) = \langle f(\lambda), x^*\rangle$.

**Exercício 1.6.** Mostre que para cada $\lambda \in D$ temos $T_\lambda \in \mathcal{L}(X^*,\mathbb{C})$ com $\|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(X^*,\mathbb{C})} = \|f(\lambda)\|_X$.

Do exercício acima, de (1.3) e do Teorema de Banach-Steinhaus (ou Princípio da Limitação Uniforme) [2, Theorem II.1], existe uma constante $M \geqslant 0$ tal que

$$\|f(\lambda)\|_X = \|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(X^*,\mathbb{C})} \leqslant M \quad \text{para todo } \lambda \in D. \tag{1.4}$$

Para cada $x^* \in X^*$ e $\zeta \in D_{1/2} = B^{\mathbb{C}}_{r/2}(\lambda_0)$, pela Fórmula Integral de Cauchy [4, (6.1)] obtemos

$$\langle f(\zeta), x^*\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\langle f(\xi), x^*\rangle}{\xi-\zeta}\,d\xi. \tag{1.5}$$

Agora para $\lambda, \mu \in D_{1/2}$, utilizando (1.5) com $\zeta = \lambda$, $\zeta = \mu$ e $\zeta = \lambda_0$, obtemos

$$\left\langle \frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} - \frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0}, x^* \right\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\lambda-\mu)\langle f(\xi), x^*\rangle}{(\xi-\lambda)(\xi-\mu)(\xi-\lambda_0)}\,d\xi. \tag{1.6}$$

Como $\lambda, \mu$ em $D_{1/2}$, obtemos $|\lambda - \xi| \geqslant \frac{r}{2}$ e $|\mu - \xi| \geqslant \frac{r}{2}$ para todo $\xi \in \partial D$. Assim, usando (1.4) e [4, Proposition 1.7(c)], obtemos

$$\left|\left\langle \frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} - \frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0}, x^* \right\rangle\right| \leqslant \frac{4M}{r^2}\|x^*\|_{X^*}|\lambda-\mu|.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-\frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0}\right\|_X &= \sup_{\|x^*\|_{X^*}=1}\left|\left\langle\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-\frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0},x^*\right\rangle\right| \\ &\leqslant \frac{4M}{r^2}|\lambda-\mu|,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

**Exercício 1.7.** Seja $f\colon \Omega \to X$ uma função analítica num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, com valores num espaço de Banach $X$. Use o fato de que toda função analítica a valores complexos tem derivadas de todas as ordens para mostrar que $f$ possui derivadas de todas as ordens.

**Exercício 1.8** (Teorema de Liouville). Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $f\colon \mathbb{C} \to X$ uma função **inteira**, isto é, analítica em $\mathbb{C}$. Mostre que se $f$ é limitada, então $f$ é constante.

Consideramos agora funções de uma variável complexa a valores em $\mathcal{L}(X,Y)$, onde $X$ e $Y$ são espaços de Banach.

**Teorema 1.1.3.** *Sejam $X$, $Y$, espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto. Para $T\colon \Omega \to \mathcal{L}(X,Y)$, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) *Para cada $x \in X$ e $y^* \in Y^*$, a função $\Omega \ni \lambda \mapsto \langle T(\lambda)x, y^*\rangle \in \mathbb{C}$ é analítica.*

(b) *Para cada $x \in X$, a função $\Omega \ni \lambda \mapsto T(\lambda)x \in Y$ é analítica.*

(c) *A função $\Omega \ni \lambda \mapsto T(\lambda) \in \mathcal{L}(X,Y)$ é analítica.*

*Demonstração.* (a) $\Rightarrow$ (b) segue diretamente do Teorema 1.1.2.
(b) $\Rightarrow$ (c) é análoga à prova do Teorema 1.1.2, e fica como exercício ao leitor.
(c) $\Rightarrow$ (a) é imediata. □

Estes resultados fazem com que uma parte significativa da teoria de funções de uma variável complexa possa ser transferida para funções vetoriais, sem muito esforço adicional.

## 1.2 Curvas Retificáveis

Nesta seção relembraremos brevemente a teoria de *curvas retificáveis* em $\mathbb{C}$ e alguns dos seus resultados principais, que serão utilizados mais adiante.

**Definição 1.2.1** (Partições). Para $a, b \in \mathbb{R}$ fixados com $a < b$, uma **partição** $P$ do intervalo $[a, b]$ é uma coleção de pontos $P = \{t_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ satisfazendo $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. A **malha** $\|P\|$ de uma partição $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ de $[a, b]$ é definida por $\|P\| = \max_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1})$.

**Definição 1.2.2** (Curvas em $\mathbb{C}$). Uma função contínua $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ é dita uma **curva**. Considere uma curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

(i) O conjunto $\{\gamma\} = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ é chamado de **traço** de $\gamma$.

(ii) Diremos que $\gamma$ é **fechada** se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(iii) Diremos $\gamma$ é **simples** se $\gamma\colon [a,b) \to \mathbb{C}$ for injetiva.

(iv) Se $\gamma$ é diferenciável e $\gamma'$ é contínua, diremos que $\gamma$ é uma **curva suave**.

(v) Dizemos que $\gamma$ é **suave por partes** se existe uma partição $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$ tal que $\gamma_i\colon [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{C}$, dada por $\gamma_i(t) = \gamma(t)$ para $t \in [t_{i-1}, t_i]$, é uma curva suave para cada $i = 1, \cdots, n$.

(vi) Dizemos que $\gamma$ é uma **poligonal** se existe uma partição $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$ tal que para cada $i = 1, \cdots, n$ temos

$$\gamma(t) = \frac{\gamma(t_{i-1})(t_i - t) + \gamma(t_i)(t - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \quad \text{para } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

(vii) Dizemos que $\gamma$ é **de variação limitada** (ou **retificável**) se existe uma constante $M \geqslant 0$ tal que para toda partição $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$ temos

$$v(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leqslant M.$$

Se $\gamma$ for de variação limitada, a **variação** (ou **variação total**) de $\gamma$ em $[a,b]$ é definita por

$$V(\gamma, [a,b]) = \sup\{v(\gamma, P) : P \text{ é uma partição de } [a,b]\}.$$

Quando não houver confusão quanto ao intervalo $[a,b]$, denotaremos $V(\gamma, [a,b])$ simplesmente por $V(\gamma)$.

Dadas duas partições $P$ e $Q$ de $[a,b]$, diremos que $Q$ é **mais fina** do que $P$, e denotamos $P \subset Q$, se todos os pontos da partição $P$ também estão na partição $Q$. Dizemos que $Q$ é um **refinamento** de $P$. Claramente, se $P \subsetneq Q$, então existe uma sequência finita $\{P_i\}_{i=0}^{m}$ de partições de $[a,b]$ com

$$P = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m = Q,$$

onde $P_i$ é dada pela união de $P_{i-1}$ e um único ponto que não está um $P_{i-1}$, para $i = 1, \cdots, m$.

Dadas duas partições $P$ e $Q$ de $[a,b]$, o conjunto $P \cup Q$ é também uma partição de $[a,b]$ com $P \subset P \cup Q$ e $Q \subset P \cup Q$. Dizemos que $P \cup Q$ é o **refinamento comum** das partições $P$ e $Q$.

**Exercício 1.9.**

(a) Considere uma curva $\gamma$. Se $P$ e $Q$ são partições de $[a,b]$ com $P \subset Q$, então $\nu(\gamma,P) \leqslant \nu(\gamma,Q)$.

(b) Sejam $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ e $\gamma,\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ duas curvas retificáveis. Então $\alpha\gamma + \beta\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definida por $(\alpha\gamma+\beta\sigma)(t) = \alpha\gamma(t) + \beta\sigma(t)$ para $t \in [a,b]$ é retificável e $V(\alpha\gamma+\beta\sigma) \leqslant |\alpha|V(\gamma) + |\beta|V(\sigma)$.

(c) Se $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ for uma curva retificável, então $|\gamma|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $|\gamma|(t) = V(\gamma,[a,t])$ para cada $t \in [a,b]$ também é uma curva retificável e $V(\gamma) = V(|\gamma|)$.

**Dica:** Mostre que se $x \leqslant y \leqslant w$ então $V(\gamma,[x,w]) = V(\gamma,[x,y]) + V(\gamma,[y,w])$. Use esse fato para mostrar que $|\gamma|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função crescente e, com isso, conclua o resultado.

**Proposição 1.2.3.** *Se $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ é uma curva suave por partes então $\gamma$ é retificável e temos*

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

*Demonstração.* Consideremos primeiramente o caso em que $\gamma$ é uma curva suave. Notemos que para cada partição $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ de $[a,b]$ temos

$$\nu(\gamma,P) = \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)dt\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |\gamma'(t)|dt,$$

e consequentemente

$$V(\gamma) \leqslant \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Como $\gamma'$ é contínua no compacto $[a,b]$, $\gamma'$ é uniformemente contínua. Assim dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $t,s \in [a,b]$ com $|t-s| < \delta_1$ temos $|\gamma'(t)-\gamma'(s)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Da definição de integral de Riemann, podemos escolher $\delta_2 > 0$ de modo que para toda partição $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ de $[a,b]$ com malha $\|P\| < \delta_2$ temos

$$\left|\int_a^b |\gamma'(t)|dt - \sum_{i=1}^n |\gamma'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1})\right| < \frac{\epsilon}{2},$$

para qualquer escolha de $\tau_i \in [t_{i-1},t_i]$, $i = 1,\cdots,n$. Deste modo se $\|P\| < \min\{\delta_1,\delta_2\}$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b |\gamma'(t)|dt &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^n |\gamma'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(\tau_i)dt\right| \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)dt\right| + \sum_{i=1}^n \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(\tau_i) - \gamma'(t)]dt\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \epsilon + \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leqslant \epsilon + V(\gamma).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \leqslant V(\gamma),$$

e a prova no caso em que $\gamma$ é suave está completa. A demonstração do caso geral fica a cargo do leitor. $\square$

Se $\gamma$ é uma curva retificável, sua variação $V(\gamma)$ nada mais é do que comprimento do traço $\{\gamma\}$ de $\gamma$. O resultado anterior nos diz que a noção usual de comprimento para o traço de uma curva suave por partes é estendida pela noção de variação às curvas de variação limitada.

## 1.3 A integral de Riemann-Stieltjes

Nesta seção estudaremos a *integral de Riemann-Stieltjes* de uma função vetorial contínua.

Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ uma curva retificável e $f\colon [a,b] \to X$ uma função. Para cada partição $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$, dizemos que uma **marcação** para $P$ é uma escolha qualquer de pontos $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \cdots, n$. Quando fazemos uma marcação de $P$, dizemos que $P$ é uma **partição marcada**, que indicaremos por $P = (\{t_i\}_{i=0}^{n}, \{\tau_i\}_{i=1}^{n})$.

**Observação 1.3.1** (Atenção). Para duas partições marcadas $P = (\{t_i\}_{i=0}^{n}, \{\tau_i\}_{i=1}^{n})$ e $Q = (\{s_i\}_{i=0}^{m}, \{\sigma_i\}_{i=1}^{m})$, escrevemos $P \subset Q$ com o mesmo sentido de partições não-marcadas, isto é, $P \subset Q$ simplesmente indica que todos os pontos $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $P$ aparecem no conjunto $\{s_i\}_{i=0}^{m}$ de $Q$. Esta relação de inclusão não possui nenhuma relação com as marcas das partições envolvidas.

Para uma partição marcada $P = (\{t_i\}_{i=0}^{n}, \{\tau_i\}_{i=1}^{n})$ de $[a,b]$, a **soma de Riemann** (ou **soma de Riemann-Stieltjes**) de $f$ associada à $P$ é definida por

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\big(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\big). \tag{1.7}$$

Começaremos com um lema técnico.

**Lema 1.3.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ uma curva retificável e $f\colon [a,b] \to X$ uma função contínua (e portanto, uniformemente contínua). Sejam $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $t, s \in [a,b]$ e $|t-s| < \delta$ então $\|f(t) - f(s)\|_X < \epsilon$. Então para quaisquer partições marcadas $P = (\{t_i\}_{i=0}^{n}, \{\tau_i\}_{i=1}^{n})$ e $Q = (\{s_i\}_{i=0}^{m}, \{\sigma_i\}_{i=1}^{m})$ de $[a,b]$ com $\|P\|, \|Q\| < \delta$ temos*

$$\|S(f,P) - S(f,Q)\|_X \leqslant 2\epsilon V(\gamma).$$

*Demonstração.* Primeiramente mostremos que para $\|P\| < \delta$ e $P \subset Q$ temos

$$\|S(f,P) - S(f,Q)\|_X \leqslant \epsilon V(\gamma). \tag{1.8}$$

Consideremos o caso no qual Q possui um único ponto a mais do que P (e portanto, em particular, $\|Q\| < \delta$), isto é, $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ e Q é dada por

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_{p-1} < t^* < t_p < \cdots < t_n = b,$$

com marcas $\sigma_1, \cdots, \sigma_{p-1}, \sigma, \sigma', \sigma_{p+1}, \cdots, \sigma_n$. Note que

$$S(f,Q) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} f(\sigma_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) + f(\sigma)(\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})) + f(\sigma')(\gamma(t_p) - \gamma(t^*))$$

e também

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} f(\tau_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) + f(\tau_p)(\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})) + f(\tau_p)(\gamma(t_p) - \gamma(t^*)). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} S(f,P) - S(f,Q) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} \big(f(\tau_i) - f(\sigma_i)\big)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \\ + \big(f(\tau_p) - f(\sigma)\big)(\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})) + \big(f(\tau_p) - f(\sigma')\big)(\gamma(t_p) - \gamma(t^*)), \end{aligned}$$

e portanto

$$\|S(f,P) - S(f,Q)\|_X < \epsilon \nu(\gamma, Q) \leqslant \epsilon V(\gamma),$$

o que conclui a prova de (1.8) quando Q possui um único ponto a mais do que P. O caso geral segue como esse, e os detalhes são deixados como exercício ao leitor.

Se P e Q são duas partições marcadas quaisquer de $[a,b]$ com $\|P\|, \|Q\| < \delta$, então $P \cup Q$ é também uma partição de $[a,b]$ com $P \subset P \cup Q$ e $Q \subset P \cup Q$, e para qualquer marcação de $P \cup Q$, segue de (1.8) que

$$\|S(f,P) - S(f,Q)\|_X \leqslant \|S(f,P) - S(f,P\cup Q)\|_X + \|S(f,P\cup Q) - S(f,Q)\|_X \leqslant 2\epsilon V(\gamma),$$

e a demonstração do lema está completa. □

Agora mostraremos um resultado de existência da *integral* de funções contínuas com respeito a uma curva retificável $\gamma$.

**Teorema 1.3.3.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{K}$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ *uma curva retificável e* $f\colon [a,b] \to X$ *uma função contínua. Então existe um (único) vetor* $u \in X$ *com a seguinte propriedade: dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para qualquer partição marcada* $P = (\{t_i\}_{i=0}^n, \{\tau_i\}_{i=1}^n)$ *de* $[a,b]$ *com* $\|P\| < \delta$ *temos*

$$\|u - S(f,P)\|_X < \epsilon, \tag{1.9}$$

*Tal vetor é denotado por*

$$u = \int_a^b f d\gamma.$$

*Demonstração.* Podemos escolher uma sequência $\{\delta_m\} \subset (0,\infty)$ estritamente decrescente com $\delta_m \to 0$, satisfazendo: se $t,s \in [a,b]$ e $|t-s| < \delta_m$, então $\|f(t)-f(s)\|_X < \frac{1}{m}$ para cada $m \in \mathbb{N}^*$. Para $m \in \mathbb{N}^*$ defina

$$\mathcal{P}_m = \{P\colon P \text{ é partição marcada de } [a,b] \text{ com } \|P\| < \delta_m\},$$

e

$$\mathcal{F}_m = \{S(f,P)\colon P \in \mathcal{P}_m\}.$$

Claramente $\mathcal{P}_m \supset \mathcal{P}_{m+1}$ e $\mathcal{F}_m \supset \mathcal{F}_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Além disso, segue do Lema 1.3.2 que

$$\operatorname{diam}(\overline{\mathcal{F}_m}) = \operatorname{diam}(\mathcal{F}_m) = \sup_{P,Q\in\mathcal{P}_m} \|S(f,P) - S(f,Q)\|_X \leqslant \frac{2}{m}V(\gamma).$$

Deste modo, $\{\overline{\mathcal{F}_m}\}$ é uma sequência de fechados encaixados com $\operatorname{diam}(\overline{\mathcal{F}_m}) \to 0$ quando $m \to \infty$. Assim $\cap_{m\in\mathbb{N}^*}\overline{\mathcal{F}_m}$ consiste num único ponto, que denotaremos por $u$.

Dado $\epsilon > 0$ escolha $m > 2\epsilon^{-1}V(\gamma)$. Como $u \in \overline{\mathcal{F}_m}$, se tomamos $P \in \mathcal{P}_m$ temos

$$\|u - S(f,P)\|_X \leqslant \operatorname{diam}(\overline{\mathcal{F}_m}) \leqslant \frac{2}{m}V(\gamma) < \epsilon,$$

o que conclui a demonstração. □

O vetor $\displaystyle\int_a^b f d\gamma$ é chamado de **integral de $f$ sobre $\gamma$**.

**Proposição 1.3.4.** *Se* $f,g\colon [a,b] \to X$ *são funções contínuas e* $\gamma,\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *são curvas retificáveis, mostre que:*

(a) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, d\gamma = \alpha \int_a^b f\, d\gamma + \beta \int_a^b g\, d\gamma,$

(b) $\displaystyle\int_a^b f\, d(\alpha\gamma + \beta\sigma) = \alpha \int_a^b f\, d\gamma + \beta \int_a^b f\, d\sigma,$

(c) $\displaystyle\int_a^b f\,d\gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i-1}^{t_i} f\,d\gamma,\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b.$

(d) $\displaystyle\left\|\int_a^b f\,d\gamma\right\|_X \leqslant \int_a^b \|f\|_X\,d|\gamma|$

**Exercício 1.10.** Demonstre a Proposição 1.3.4.

**Definição 1.3.5.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva retificável, e $f\colon \{\gamma\} \subset \mathbb{C} \to X$ uma função contínua. A **integral de linha de $f$ ao longo de $\gamma$** é definida por

$$\int_a^b f \circ \gamma\ d\gamma$$

e denotada por

$$\int_\gamma f(z)dz \quad \text{ou simplesmente} \quad \int_\gamma f.$$

Com esta definição, temos um resultado importante que será frequentemente usado.

**Teorema 1.3.6.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva retificável e $f\colon \{\gamma\} \to X$ uma função contínua. Então*

$$T\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = \int_\gamma (T \circ f)(z)dz \tag{1.10}$$

*Demonstração.* Como $T$ é linear, para uma partição qualquer $P$ de $[a,b]$, note que $T(S(f\circ\gamma), P) = S(T \circ f \circ \gamma, P)$. O resultado agora seque da continuidade de $T$, pois ambas as integrais em (1.10) são limites de somas de Riemann. Os detalhes são deixados a cargo do leitor. □

**Teorema 1.3.7.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva suave por partes, e $f\colon \{\gamma\} \to X$ uma função contínua. Então*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

*Demonstração.* Sabemos que o resultado é verdadeiro quando $X = \mathbb{C}$. Consequentemente, usando o Teorema 1.3.6 para $x^* \in X^*$, temos

$$\begin{aligned}\left\langle \int_\gamma f(z)\,dz, x^* \right\rangle &= \int_\gamma \langle f(z), x^*\rangle dz = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), x^*\rangle \gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \langle f(\gamma(t))\gamma'(t), x^*\rangle dt \\ &= \left\langle \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, x^* \right\rangle,\end{aligned}$$

para todo $x^* \in X^*$. O resultado segue do Teorema de Hahn-Banach. □

## 1.4 Teoremas de Cauchy e Expansão em Séries

Queremos estender os resultados de integração e expansão em séries de Laurent de funções complexas para funções vetoriais. Começamos com uma definição.

**Definição 1.4.1** (Domínio de Cauchy). Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um **domínio de Cauchy** se

(i) $\Omega$ é aberto;

(ii) $\Omega$ possui um número finito de componentes conexas;

(iii) o fecho de duas componentes conexas distintas são disjuntos;

(iv) a fronteira de $\Omega$ é composta por um número finito não-negativo de curvas fechadas, retificáveis e simples;

(v) duas curvas distintas que formam a fronteira de $\Omega$ não se intersectam.

A fronteira de $\Omega$ orientada positivamente é denotada por $+\partial\Omega$, e orientada negativamente por $-\partial\Omega$.

Com isto temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.4.2** (Teoremas de Cauchy). *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio de Cauchy limitado e $f\colon \overline{\Omega} \to X$ uma função contínua, que é analítica em $\Omega$. Então*

$$\int_{+\partial\Omega} f(z)dz = 0.$$

*Para $n \in \mathbb{N}$, a $n$-ésima derivada $f^{(n)}$ de $f$ é analítica em $\Omega$ e para todo $\lambda \in \Omega$ temos*

$$f^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{+\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{n+1}}dz$$

*Demonstração.* Primeiramente note que para cada $x^* \in X^*$, a aplicação $\Omega \ni z \mapsto \langle f(z), x^*\rangle \in \mathbb{C}$ é analítica e que sua derivada é $\Omega \ni z \mapsto \langle f'(z), x^*\rangle \in \mathbb{C}$. Como $\Omega \ni z \mapsto \langle f'(z), x^*\rangle \in \mathbb{C}$ é analítica, segue do Teorema 1.1.2 que $\Omega \ni z \mapsto f'(z) \in X$ é analítica. Por indução, $\Omega \ni z \mapsto f^{(n)}(z) \in X$ é analítica para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com isto a prova do resultado é feita utilizando o resultado correspondente para funções a valores complexos, isto é, para cada $x^* \in X^*$ temos

$$\left\langle \int_{+\partial\Omega} f(z)dz, x^* \right\rangle = \int_{+\partial\Omega} \langle f(z), x^*\rangle dz = 0,$$

e para $n \in \mathbb{N}$, a $n$-ésima derivada $\langle f(\cdot), x^*\rangle^{(n)}$ de $\langle f(\cdot), x^*\rangle$ é analítica em $\Omega$ e para $\lambda \in \Omega$ temos

$$\langle f^{(n)}(\lambda), x^*\rangle = \langle f(\lambda), x^*\rangle^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{+\partial\Omega} \frac{\langle f(z), x^*\rangle}{(z-\lambda)^{n+1}}dz$$

$$= \left\langle \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{n+1}} dz, x^* \right\rangle,$$

e o resultado segue do Teorema de Hahn-Banach. □

Com isto temos os seguintes corolários.

**Corolário 1.4.3** (Séries de Taylor). *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$, $\Omega$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to X$ *uma função analítica,* $\lambda_0 \in \Omega$ *e* $r_0 > 0$ *tal que* $D = \overline{B^{\mathbb{C}}_{r_0}}(\lambda_0) \subset \Omega$. *Se* $M = \max\{\|f(z)\|_X \colon z \in D\}$, *então*

$$\|f^{(n)}(\lambda_0)\|_X \leqslant \frac{Mn!}{r_0^n} \quad \textit{para } n \in \mathbb{N},$$

*e consequentemente, para* $r < r_0$ *a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}$$

*converge uniformemente para* $\lambda$ *em* $D$ *e*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} \quad \textit{para todo } \lambda \in D.$$

Para $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$ e $\zeta \in \mathbb{C}$, denote por $A(\zeta, a, b)$ o **anel** centrado em $\zeta$ de raio menor $a$ e raio maior $b$, dado por

$$A(\zeta, a, b) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon a < |\lambda - \zeta| < b\}. \tag{1.11}$$

**Corolário 1.4.4** (Séries de Laurent). *Seja* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$, $\Omega$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{C}$, $f$ *uma função analítica em um anel* $A(\lambda_0, R_1, R_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon 0 \leqslant R_1 < |\lambda - \lambda_0| < R_2\}$. *Sejam* $r, r_1, r_2$ *números reais positivos tais que* $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$ *e considere a curva* $\gamma(t) = \lambda_0 + re^{2\pi i t}$ *para* $t \in [0,1]$. *Defina*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - \lambda_0)^{n+1}} d\xi \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

*Se* $M_{r_1,r_2} = \max\{\|f(z)\|_X \colon z \in \overline{A(\lambda_0, r_1, r_2)}\}$, *então*

$$\|a_n\|_X \leqslant \frac{M_{r_1,r_2}}{r^n} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

*Consequentemente a série*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n a_n$$

*converge uniformemente para* $\lambda$ *em* $\overline{A(\lambda_0, r_1, r_2)}$ *e para* $\lambda \in \overline{A(\lambda_0, r_1, r_2)}$ *temos*

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n a_n.$$

*Demonstração.* A demonstração deste resultado é feita como os demais, e fica a cargo do leitor (veja, por exemplo, [4, Chapter V - 1.11]). □

## 1.5 O Teorema do Módulo Máximo

Terminanos este capítulo com um importante resultado para funções complexas.

**Teorema 1.5.1** (Teorema do Módulo Máximo). *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\Omega$ um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$ e $f\colon \Omega \to X$ uma função analítica em $\Omega$. Se a aplicação $\Omega \ni \lambda \mapsto \|f(\lambda)\|_X \in \mathbb{R}$ não é constante então ela não atinge um máximo absoluto $\Omega$.*

*Demonstração.* Suponha que existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $\|f(\lambda_0)\|_X \geqslant \|f(\lambda)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$. Do Teorema de Hanh-Banach, existe $x^* \in X^*$ com $\|x^*\|_{X^*} = 1$ tal que $\langle f(\lambda_0), x^*\rangle = \|f(\lambda_0)\|_X$. Assim $g(\cdot) = \langle f(\cdot), x^*\rangle$ é uma função analítica em $\Omega$ e para todo $\lambda \in \Omega$ temos

$$|g(\lambda)| = |\langle f(\lambda), x^*\rangle| \leqslant \|f(\lambda)\|_X \leqslant \|f(\lambda_0)\|_X = |g(\lambda_0)|.$$

Do Teorema do Módulo Máximo para funções complexas, $g$ é constante em $\Omega$, e assim $\langle f(\lambda), x^*\rangle = \|f(\lambda_0)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$. Por outro lado, $\|f(\lambda_0)\|_X = \langle f(\lambda), x^*\rangle \leqslant \|f(\lambda)\|_X$ para todo $\lambda \in \Omega$ e chegamos a uma contradição com o fato que $\|f(\lambda)\|_X$ não é constante em $\Omega$. □

# CAPÍTULO 2

## Análise Espectral em Espaços de Banach

Este capítulo visa oferecer uma revisão sobre operadores lineares limitados e não-limitados em espaços de Banach, para melhor entendimento da teoria de semigrupos e seus geradores infinitesimais. Vamos estudar algumas propriedades básicas destes operadores e veremos alguns importantes resultados, que serão utilizados nos capítulos a seguir.

### 2.1 Operador Resolvente

No que segue estudaremos operadores lineares num espaço de Banach $X$, tanto limitados quanto não-limitados, isto é, operadores $A\colon D(A) \subset X \to X$ cujos domínios $D(A)$ podem não ser todo $X$, e que, além disso, podem não satisfazer uma limitação do tipo (1.1).

Neste estudo, um dos objetos fundamentais é o *conjunto resolvente* de um operador, que é definido da seguinte maneira:

**Definição 2.1.1** (Conjunto Resolvente e Operador Resolvente). Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear. O **conjunto resolvente** de $A$, denotado por $\rho(A)$, é o conjunto formado por todos os $\lambda$ em $\mathbb{C}$ tais que

(i) $\lambda - A$ é injetor;

(ii) $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ é denso em $X$ e

(iii) $(\lambda - A)^{-1}\colon \operatorname{Im}(\lambda - A) \subset X \to X$ é um operador limitado.

Para cada $\lambda \in \rho(A)$, o operador

$$(\lambda - A)^{-1}\colon \operatorname{Im}(\lambda - A) \subset X \to X$$

é chamado de **operador resolvente** (de $A$ em $\lambda$). O **espectro** do operador $A$ é definido por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Veja que para cada $\lambda \in \rho(A)$ temos $\mathrm{Im}((\lambda - A)^{-1}) = D(A)$.

**Observação 2.1.2.** Quando $X$ é um espaço de Banach real e $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador linear, definimos $\rho(A) = \rho(A^{\mathbb{C}})$ e $\sigma(A) = \sigma(A^{\mathbb{C}})$. Isto é, o resolvente e o espectro de $A$ são definidos como o resolvente e o espectro da complexificação $A^{\mathbb{C}}$ do operador $A$, respectivamente (veja o Apêndice A.1).

Antes de iniciarmos o estudo do conjunto resolvente e dos operadores resolventes de $A$, demonstraremos dois lemas auxiliares que nos motivam a restringir este estudo a *operadores fechados* (que são definidos a seguir).

**Definição 2.1.3.** Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados. Para um operador $A\colon D(A) \subset X \to Y$, definimos o **gráfico** de $A$ por

$$G(A) = \{(x, Ax) \colon x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Dizemos que um operador $A\colon D(A) \subset X \to Y$ é **fechado** se $G(A)$ é um subconjunto fechado de $X \times Y$.

Dizemos que um operador $A_0\colon D(A_0) \subset X \to Y$ é **fechável** se $\overline{G(A_0)}$ é o gráfico de um operador $A\colon D(A) \subset X \to Y$.

Veja que se $A_0$ é fechável e $A$ é tal que $\overline{G(A_0)} = G(A)$, então $A$ é fechado (por definição).

**Lema 2.1.4.**

(i) *Um operador* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *é fechado se, e somente se, dada sequência* $\{x_n\} \subset D(A)$ *com* $x_n \to x$ *e* $Ax_n \to y$ *então* $x \in D(A)$ *e* $Ax = y$.

(ii) *Um operador* $A_0\colon D(A_0) \subset X \to X$ *é fechável se, e somente se, dada sequência* $\{x_n\} \subset D(A_0)$ *com* $x_n \to 0$ *e* $A_0 x_n \to y$ *então* $y = 0$.

*Demonstração.* (i) Suponha que $A$ é fechado. Se $\{x_n\} \subset D(A)$ é tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ então $G(A) \ni (x_n, Ax_n) \to (x, y)$. Como $G(A)$ é fechado, devemos ter $(x, y) \in G(A)$, isto é, $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Reciprocamente se $G(A) \ni (x_n, Ax_n) \to (x, y)$ então da hipótese $x \in D(A)$ e $Ax = y$, isto é, $(x, y) = (x, Ax) \in G(A)$ e $G(A)$ é fechado. Portanto $A$ é fechado.

(ii) Analogamente, suponha $A_0$ fechável e $A$ fechado com $\overline{G(A_0)} = G(A)$. Se $D(A_0) \ni x_n \to 0$ com $A_0 x_n \to 0$ então $(0, y) \in \overline{G(A_0)} = G(A)$, ou seja $y = A0 = 0$.

Reciprocamente, defina $D(A)$ como o conjunto dos $x \in X$ para os quais existem $y \in X$ e uma sequência $\{x_n\} \subset D(A_0)$ com $x_n \to x$ e $A_0 x_n \to y$. Afirmamos que para cada $x \in D(A)$ existe um único $y$ satisfazendo a propriedade acima. De fato, se $y_1$ e $y_2$ são como acima, para sequências $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}$, respectivamente, então $D(A_0) \ni z_n =$

$x_n^1 - x_n^2 \to 0$ e $A_0 z_n \to y_1 - y_2$. Portanto, da hipótese, $y_1 - y_2 = 0$, isto é, $y_1 = y_2$. Isto nos permite definir

$$Ax = y \quad \text{para cada } x \in D(A).$$

Nos resta mostrar que $\overline{G(A_0)} = G(A)$. Se $G(A_0) \ni (x_n, A_0 x_n) \to (x, y)$ então da definição de $A$ temos $Ax = y$. Agora se $(x, y) \in G(A)$ então por definição de $A$ existe $\{x_n\} \subset D(A_0)$ com $x_n \to x$ e $A_0 x_n \to y$, o que mostra que $(x, y) \in \overline{G(A_0)}$. Isto conclui a prova de que $A_0$ é fechável. □

**Proposição 2.1.5.** *Sejam $A_0 \colon D(A_0) \subset X \to Y$ um operador fechável e $A \colon D(A) \subset X \to Y$ um operador tal que $G(A) = \overline{G(A_0)}$. Então $D(A_0) \subset D(A)$ e para $x \in D(A_0)$ temos $Ax = A_0 x$. Em particular existe um único operador $A$ com $\overline{G(A_0)} = G(A)$.*

*Demonstração.* Se $G(A) = \overline{G(A_0)}$ então para $x \in D(A_0)$ temos $(x, A_0 x) \in G(A_0) \subset G(A)$, e portanto $x \in D(A)$ e $A_0 x = Ax$.

A unicidade é clara, já que operadores com gráficos iguais são iguais. □

Com esta proposição vemos que para um operador fechável $A_0 \colon D(A_0) \subset X \to Y$ existe *um único* operador fechado $A \colon D(A) \subset X \to Y$ tal que $G(A) = \overline{G(A_0)}$. Tal operador $A$ é chamado de **fecho** de $A_0$, e usualmente denotado por $A = \overline{A_0}$.

A seguinte proposição reúne alguns resultados sobre operadores fechados e fecháveis que nos serão úteis mais adiante.

**Proposição 2.1.6.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear injetor. Então*

(a) *$A$ é fechado se, e somente se, $A^{-1}$ é fechado;*

(b) *se $A^{-1}$ é fechável e tem fecho injetivo, então $A$ é fechável;*

(c) *se $A$ é fechado e $A^{-1} \colon \mathrm{Im}(A) \subset X \to X$ é limitado, então $\mathrm{Im}(A)$ é fechado;*

(d) *se $A$ é fechado e $0 \in \rho(A)$ então $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

**Exercício 2.1.** Demonstre a Proposição 2.1.6.

**Exercício 2.2.** Seja $A_0$ um operador linear e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $A_0$ é fechável se, e somente se, $\lambda - A_0$ é fechável. Neste caso $\overline{\lambda - A_0} = \lambda - \overline{A_0}$.

**Exercício 2.3.** Seja $A_0 \colon D(A_0) \subset X \to X$ um operador linear com $\rho(A_0) \neq \varnothing$. Mostre que para todo $\lambda \in \rho(A_0)$ o operador $(\lambda - A_0)^{-1}$ é fechável.

O lema a seguir mostra que se um operador é fechável, então seu conjunto resolvente e o de seu fecho coincidem.

**Lema 2.1.7.** *Se $A_0 \colon D(A_0) \subset X \to X$ é um operador fechável então $\rho(A_0) = \rho(\overline{A_0})$.*

*Demonstração.* Tome $\lambda \in \rho(\overline{A_0})$. Como $\lambda - \overline{A_0}$ coincide com $\lambda - A_0$ em $D(A_0)$, temos $\lambda - A_0$ injetor. Além disso, segue do item (d) da Proposição 2.1.6 (aplicado a $\lambda - \overline{A_0}$) que $(\lambda - \overline{A_0})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Disto segue que $(\lambda - A_0)^{-1} \colon \operatorname{Im}(\lambda - A_0) \to X$ é um operador limitado pois se $y \in \operatorname{Im}(\lambda - A_0)$ e $y = (\lambda - A_0)x = (\lambda - \overline{A_0})x$, com $x \in D(A_0)$, então $x = (\lambda - A_0)^{-1}y = (\lambda - \overline{A_0})^{-1}y$ e logo

$$\|(\lambda - A_0)^{-1}y\| = \|(\lambda - \overline{A_0})^{-1}y\| \leqslant \|(\lambda - \overline{A_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|y\|.$$

Por fim, nos resta mostrar que $\operatorname{Im}(\lambda - A_0)$ é densa em $X$. Para isso, se $y \in X$ e $x = (\lambda - \overline{A_0})^{-1}y$ temos $(\lambda - \overline{A_0})x = y$. Assim $(x, y) \in G(\lambda - \overline{A_0}) = \overline{G(\lambda - A_0)}$ e portanto existe uma sequência $D(A_0) \ni x_n \to x$ com $(\lambda - A_0)x_n \to y$. Logo $y \in \overline{\operatorname{Im}(\lambda - A_0)}$, e portanto $\operatorname{Im}(\lambda - A_0)$ é densa em $X$.

Reciprocamente, assuma que $\lambda \in \rho(A_0)$. Se $x \in D(\overline{A_0})$ e $(\lambda - \overline{A_0})x = 0$, existe sequência $\{x_n\} \subset D(A_0)$ com $x_n \to x$ e $(\lambda - A_0)x_n \to 0$. Como $(\lambda - A_0)^{-1}$ é limitado temos

$$\|x_n\| = \|(\lambda - A_0)^{-1}(\lambda - A_0)x_n\| \leqslant C\|(\lambda - A_0)x_n\| \to 0,$$

e assim $x = 0$. Isto mostra que $(\lambda - \overline{A_0})$ é injetor. Como $\operatorname{Im}(\lambda - \overline{A_0}) \supset \operatorname{Im}(\lambda - A_0)$, temos $\operatorname{Im}(\lambda - \overline{A_0})$ densa em $X$. Mostremos agora que $(\lambda - \overline{A_0})^{-1} \colon \operatorname{Im}(\lambda - \overline{A_0}) \subset X \to X$ é limitado. De fato, se $y \in \operatorname{Im}(\lambda - \overline{A_0})$, existe sequência $\{y_n\} \subset \operatorname{Im}(\lambda - A_0)$ tal que $y_n \to y$ e $(\lambda - A_0)^{-1}y_n \to (\lambda - \overline{A_0})^{-1}y$. Como $\|(\lambda - A_0)^{-1}y_n\| \leqslant C\|y_n\|$ para todo $n$, obtemos

$$\|(\lambda - \overline{A_0})^{-1}y\| \leqslant C\|y\|,$$

o que mostra a afirmação, e também que $\lambda \in \rho(\overline{A_0})$, o que completa a demonstração. $\square$

**Exercício 2.4.** Se $A_0$ é um operador fechável, do Lema 2.1.7 sabemos que $\rho(A_0) = \rho(\overline{A_0})$. Mostre que para $\lambda \in \rho(A_0) = \rho(\overline{A_0})$ temos $\overline{(\lambda - A_0)^{-1}} = (\lambda - \overline{A_0})^{-1}$.

O próximo lema nos dá condições sob as quais um operador que tem conjunto resolvente não-vazio é fechável.

**Lema 2.1.8.** *Seja* $A_0 \colon D(A_0) \subset X \to X$ *um operador linear com* $\rho(A_0) \neq \varnothing$. *Então:*

(i) *para todo* $\lambda \in \rho(A_0)$ *o operador* $(\lambda - A_0)^{-1}$ *é fechável;*

(ii) *se para algum* $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ *temos* $\overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}$ *injetivo, então* $A_0$ *é fechável;*

(iii) *se* $A_0$ *é fechável, então* $\overline{(\lambda - A_0)^{-1}}$ *é injetivo para todo* $\lambda \in \rho(A_0)$.

*Demonstração.* (i) Veja Exercício 2.3.

(ii) Mostremos que $\lambda_0 - A_0$ é fechável, e o resultado segue do Exercício 2.2. Se $\{x_n\} \subset D(A_0)$ é tal que $x_n \to 0$ e $(\lambda_0 - A_0)x_n \to y$, defina $y_n = (\lambda_0 - A_0)x_n$. Temos $y_n \to y$ e $(\lambda_0 - A_0)^{-1}y_n = x_n \to 0$. Assim $\overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}y = 0$, e como $\overline{(\lambda_0 - A_0)^{-1}}$ é injetor segue que $y = 0$, o que mostra que $\lambda_0 - A_0$ é fechável.

(iii) Segue diretamente do Lema 2.1.7 pois, para todo $\lambda \in \rho(A_0) = \rho(\overline{A_0})$, $(\lambda - \overline{A_0})^{-1} = \overline{(\lambda - A_0)^{-1}}$ (veja Exercício 2.4). $\square$

É importante notar que existem operadores que possuem resolvente não-vazio que *não são fecháveis* (veja Exercício 2.5 abaixo). Porém, tendo estes resultados em vista, restringiremos o nosso estudo aos operadores fechados $A\colon D(A) \subset X \to X$, e apenas em alguns casos específicos consideraremos operadores fecháveis.

**Exercício 2.5** (Operador não fechável com resolvente não-vazio). Considere

$$X = \ell^1(\mathbb{C}) = \left\{ \{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\},$$

com a norma $\|\{x_n\}\|_1 = \Sigma_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Considere o operador linear $T\colon D(T) \subset X \to X$ definido por

$$D(T) = \{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon x_n = 0 \text{ exceto para um número finito de índices}\},$$

e para $\{x_n\} \in D(T)$ definimos

$$T\{x_n\} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} x_k \right\}.$$

(a) Mostre que $D(T)$ é denso em $X$.

(b) Mostre que $T$ é injetor e que $\mathrm{Im}(T) = D(T)$.

(c) Mostre que $T$ não é limitado.

(d) Verifique que $T^{-1}\colon D(T) \subset X \to X$ é dada por

$$T^{-1}\{x_n\} = \left\{ x_n - \frac{(n+1)^2}{n^2} x_{n+1} \right\} \qquad \text{para todo } \{x_n\} \in D(T).$$

(e) Mostre que $T^{-1}$ é limitada e conclua que $0 \in \rho(T)$.

(f) Denote por $A$ a extensão de $T^{-1}$ a $X$ (definida pela mesma regra de $T^{-1}$) e mostre que $A\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = 0$ (o que mostra que $A$ não é injetor).

(g) Usando o item (iii) do Lema 2.1.8 conclua que $T$ não é fechável.

Note que se $A\colon D(A) \subset X \to X$ é fechado e $\lambda \in \rho(A)$, segue do item (c) da Proposição 2.1.6 que $\mathrm{Im}(\lambda - A) = X$, o que mostra que $\lambda - A\colon D(A) \subset X \to X$ é bijetor. Ainda se $\lambda - A\colon D(A) \subset X \to X$ é bijetor, segue do Teorema do Gráfico Fechado (veja [2], por exemplo) que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Com isto a definição de conjunto resolvente para operadores fechados pode ser reformulada.

**Definição 2.1.9** (Conjunto resolvente para operadores fechados). Seja $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. O **conjunto resolvente** de $A$ é o subconjunto $\rho(A)$ de todos os $\lambda$ em $\mathbb{C}$ tais que $\lambda - A$ é bijetor.

O espectro $\sigma(A)$ de um operador fechado $A\colon D(A) \subset X \to X$ pode ser decomposto em três partes:

(e1) o conjunto $\sigma_p(A)$ formado pelos *autovalores de* $A$ é chamado de **espectro pontual** de $A$, isto é,

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \colon \lambda - A \text{ não é injetor}\};$$

(e2) o **espectro residual** $\sigma_r(A)$ de $A$ é definido por

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \colon \lambda - A \text{ é injetor e } \overline{\mathrm{Im}(\lambda - A)} \subsetneq X\};$$

(e3) o **espectro contínuo** $\sigma_c(A)$ de $A$ é definido por

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \colon \lambda - A \text{ é injetor, } \mathrm{Im}(\lambda - A) \subsetneq X \text{ e } \overline{\mathrm{Im}(\lambda - A)} = X\}$$

Claramente $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A)$, e esta união é disjunta. Em espaços de dimensão finita, segue do Teorema do Núcleo e Imagem (veja [13], por exemplo) que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, isto é, $\sigma_r(A) = \sigma_c(A) = \varnothing$. Mas em espaços de dimensão infinita isto pode não ser verdadeiro, como mostram os exercícios abaixo:

**Exercício 2.6.** Considere

$$X = \ell^2(\mathbb{C}) = \left\{ \{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty \right\},$$

com a norma $\|\{x_n\}\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\right)^{1/2}$.

(a) Defina $A\colon X \to X$ por $A\{x_n\} = \{0, x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. Mostre que $A$ é injetor, mas sua imagem não é densa (logo $0 \in \sigma_r(A)$).

(b) Defina $A\colon X \to X$ por $A\{x_n\} = \left\{\frac{x_n}{n+1}\right\}$. Mostre que $A$ é injetor, sua imagem é densa mas não existe sequência $\{x_n\} \in \ell^2(\mathbb{C})$ tal que $A\{x_n\} = \{\frac{1}{n+1}\}$ (logo $0 \in \sigma_c(A)$).

**Exercício 2.7.** Considere $X = C([0,1],\mathbb{C})$ o espaço das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{C}$, com a norma do supremo. Defina $D(T)$ como o conjunto das funções em $X$ que são continuamente diferenciáveis, e para $f \in D(T)$ defina $Tf = f'$.

(a) Mostre que $T\colon D(T) \subset X \to X$ é um operador linear fechado com resolvente vazio.

(b) Mostre que a restrição $T_1$ de $T$ a $D(T_1) = \{f \in D(T) \colon f(0) = 0\}$ é um operador fechado e $\rho(T_1) = \mathbb{C}$.

Encerramos essa seção com dois resultados fundamentais de operadores resolventes.

**Teorema 2.1.10.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado. Para* $\lambda, \mu \in \rho(A)$ *temos*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}, \tag{2.1}$$

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}. \tag{2.2}$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1} &= (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} \\ &= (\mu - A)^{-1}[(\mu - A) + (\lambda - \mu)I](\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1},\end{aligned}$$

o que prova (2.1). A prova de (2.2) é imediata de (2.1). □

A equação (2.1) é chamada de **identidade do resolvente**, e é crucial para a teoria espectral de operadores lineares.

**Teorema 2.1.11.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado. Então* $\rho(A)$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{C}$*, e consequentemente* $\sigma(A)$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{C}$*. De fato, se* $\mu \in \rho(A)$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é tal que* $|\mu - \lambda| \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$*, então* $\lambda \in \rho(A)$ *e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-n-1} \tag{2.3}$$

*Demonstração.* Se $\mu \in \rho(A)$, então $(\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, escrevemos

$$(\lambda - A) = (\mu - A)[I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}]$$

e se $|\mu - \lambda| \, \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, segue que[1] $\lambda \in \rho(A)$ e (2.3) está demonstrada. □

**Corolário 2.1.12.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach complexo e* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado. Então, a função* $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ *é analítica e*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n!(\lambda - A)^{-n-1}.$$

*Demonstração.* Fixe $\lambda_0 \in \rho(A)$ e observe que de (2.1) e do fato que (2.3) converge uniformemente para

$$|\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{1}{2\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

a aplicação $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é contínua em $\lambda_0$. Novamente utilizando (2.1) temos $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é derivável em $\lambda_0$ e

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1} = -(\lambda - A)^{-2}.$$

[1] Lembre-se que para $B \in \mathcal{L}(X)$ com $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ temos $I - B$ inversível e $(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$.

O caso geral segue da identidade

$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{-n} - (\mu - A)^{-n} &= \big((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\big) \cdot \\ &\cdot \big[(\mu - A)^{-n+1} + (\mu - A)^{-n+2}(\lambda - A)^{-1} + \cdots + (\lambda - A)^{-n+1}\big],\end{aligned}$$

e de um argumento de indução. □

**Teorema 2.1.13.** *Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, se a série do lado direito de (2.3) é convergente (com algum $\mu \in \rho(A)$ fixado) em $\mathcal{L}(X)$, então $\lambda \in \rho(A)$ e vale (2.3).*

*Demonstração.* Denote por $S(\lambda)$ a série do lado direito de (2.3). Temos

$$\begin{aligned}S(\lambda)(\lambda - A)x &= S(\lambda)(\lambda - \mu)x + S(\lambda)(\mu - A)x \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n+1}(\mu - A)^{-n-1}x + \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n}(\mu - A)^{-n}x = x.\end{aligned}$$

Agora veja que para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $x_k = \sum_{n=0}^{k} (\mu - \lambda)^n(\mu - A)^{-n-1}x \in D(A)$ e $x_k \to S(\lambda)x$ quando $k \to \infty$ e

$$\begin{aligned}(\lambda - A)x_k &= (\lambda - \mu)x_k + (\mu - A)x_k \\ &= -\sum_{n=0}^{k} (\mu - \lambda)^{n+1}(\mu - A)^{-n-1}x + \sum_{n=0}^{k} (\mu - \lambda)^{n}(\mu - A)^{-n}x \\ &= x - (\mu - \lambda)^{k+1}(\mu - A)^{-k-1}x.\end{aligned}$$

Como a série (2.3) converge por hipótese, temos $(\mu - \lambda)^{k+1}(\mu - A)^{-k-1} \to 0$ quando $k \to \infty$, e portanto

$$(\lambda - A)x_k \to x \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Como $A$ é fechado, segue $S(\lambda)x \in D(A)$ e $(\lambda - A)S(\lambda)x = x$. Assim $\lambda - A$ é inversível e $S(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$. □

**Corolário 2.1.14.** *A aplicação $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ tem cada componente conexa de $\rho(A)$ como seu domínio natural, isto é, ela não pode ser estendida analiticamente para além da fronteira de $\rho(A)$.*

**Exercício 2.8.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e $\gamma$ uma curva retificável em $\mathbb{C}$ e $f\colon \{\gamma\} \to X$ uma função contínua satisfazendo:

($\star$) $f(z) \in D(A)$ para todo $z \in \{\gamma\}$;

($\star$) $Af\colon \{\gamma\} \to X$ é contínua.

Então

$$\int_\gamma f(z)dz \in D(A) \quad \text{e} \quad A\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma Af(z)dz.$$

**Definição 2.1.15** (Comutatividade de Operadores). Diremos que um operador $A\colon D(A) \subset X \to X$ **comuta** com $B \in \mathcal{L}(X)$ se $Bx \in D(A)$ para todo $x \in D(A)$ (isto é, $\operatorname{Im}(B) \subset D(A)$) e

$$ABx = BAx \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Escreve-se $BA \subset AB$.

**Exercício 2.9.** Se $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador inversível e comuta com $B \in \mathcal{L}(X)$, então $A^{-1}\colon \operatorname{Im}(A) \subset X \to X$ comuta com $B$.

**Exercício 2.10.** Sejam $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado com resolvente não-vazio, $B \in \mathcal{L}(X)$ e assuma que $(\lambda_0 - A)^{-1}$ comuta com $B$ para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$. Então

(a) $(\lambda - A)^{-1}$ comuta com $B$ para todo $\lambda \in \rho(A)$;

(b) $A$ comuta com $B$.

## 2.2 Operadores Lineares Limitados

Seja $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Nesta seção estudamos algumas particularidades no estudo do espectro de operadores limitados.

**Teorema 2.2.1.** *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n. \tag{2.4}$$

*Consequentemente $\sigma(A)$ é compacto. Além disso, para cada $R > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, a série acima converge uniformemente em $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \geqslant R\}$.*

*Demonstração.* O resultado segue simplesmente notando-se que $(\lambda - A) = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$. □

**Teorema 2.2.2.** *Se $A \in \mathcal{L}(X)$, então $\sigma(A) \neq \varnothing$.*

*Demonstração.* Suponha que $\rho(A) = \mathbb{C}$. Então $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é inteira e, para $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, temos

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}. \tag{2.5}$$

De (2.5), obtemos $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ limitada. Segue do Teorema de Liouville (Exercício 1.8) que $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é constante. Mas de (2.5) segue que $(\lambda - A)^{-1} = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, o que é um absurdo. □

## ∗ Raio Espectral

Se $A \in \mathcal{L}(X)$, vimos que $\sigma(A)$ é não-vazio e compacto. O **raio espectral** $r_\sigma(A)$ de $A$ é definido por

$$r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{2.6}$$

Da compacidade de $\sigma(A)$, o supremo em (2.6) é atingido, ou seja, existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = r_\sigma(A)$.

**Teorema 2.2.3.** *Se $A \in \mathcal{L}(X)$, então a série (2.4) é convergente para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > r_\sigma(A)$ e divergente se $|\lambda| < r_\sigma(A)$. Consequentemente*

$$r_\sigma(A) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}. \tag{2.7}$$

*Demonstração.* Como $(\lambda - A)^{-1}$ é analítica em $\rho(A)$, ela tem uma série de Laurent convergente para $|\lambda| > r_\sigma(A)$. Do Teorema 2.2.1, a série de Laurent de $(\lambda - A)^{-1}$ em $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\}$ é dada por (2.4) e segue da unicidade da série de Laurent que (2.4) vale para $|\lambda| > r_\sigma(A)$.

Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n \tag{2.8}$$

é convergente em $\mathcal{L}(X)$ então sua soma é $(\lambda - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n-1} A^n$ é convergente sempre que $|\mu| > |\lambda|$ (veja Exercício 2.11 abaixo). Logo, a série é divergente para $|\lambda| < r_\sigma(A)$ e o raio de convergência desta série é $r_\sigma(A)$, e assim (2.7) também está provada. □

Note que de (2.7) e do Exercício 1.4 obtemos $r_\sigma(A) \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$.

**Exercício 2.11.** Mostre que se a série em (2.8) é convergente em $\mathcal{L}(X)$ então sua soma é $(\lambda - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, e para $|\mu| > |\lambda|$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n-1} A^n$ é convergente.

**Teorema 2.2.4.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. Então $\{\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}. \tag{2.9}$$

*Se $X$ é um espaço de Banach complexo então*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}.$$

*Demonstração.* Se $a_n = \log \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}$, para provar (2.9) é suficiente mostrar que

$$\frac{a_n}{n} \to b = \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}.$$

É fácil ver que $a_{m+n} \leqslant a_n + a_m$. Logo, se $m$ é um inteiro positivo fixo, seja $n = mq + r$, onde $q, r$ são inteiros não-negativos com $0 \leqslant r < m$, temos que $a_n \leqslant q \cdot a_m + a_r$ e

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{q}{n} a_m + \frac{1}{n} a_r.$$

Se $n \to \infty$ e $m$ está fixo, $\frac{q}{n} \to \frac{1}{m}$ pois a variação de $r$ está restrita aos números $0, 1, 2, \cdots, m-1$. Logo, $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}$. Como $m$ é arbitrário temos que $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant b$. Por outro lado, $\frac{a_n}{n} \geqslant b$ e $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \geqslant b$, o que prova o resultado. □

Finalizamos esta subseção notando que para um $\lambda_0 \in \rho(A)$, o raio espectral pode ser usado para determinar, de certa forma, raios de círculos centrados em $\lambda_0$ que seguramente contêm pontos do espectro de $A$. De fato, de (2.3), para $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\lambda_0 \in \rho(A)$, para $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}$ temos $\lambda \in \rho(A)$ e vale

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n-1}. \tag{2.10}$$

Mas o raio de convergência $R$ da série de Taylor (2.10) é dado por

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \|(\lambda_0 - A)^{-n-1}\|^{1/n} = r_\sigma((\lambda_0 - A)^{-1}),$$

ou seja $R = \frac{1}{r_\sigma((\lambda_0 - A)^{-1})}$. Portanto o círculo

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda - \lambda_0| = \frac{1}{r_\sigma((\lambda_0 - A)^{-1})}\right\}$$

deve conter pontos de $\sigma(A)$ (veja [4, Corollary 2.11]).

Agora, do Teorema 2.2.1, para $|\lambda - \lambda_0| > \|\lambda_0 - A\|_{\mathcal{L}(X)}$ temos $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda - A)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^{-n-1} (\lambda_0 - A)^n,$$

e sabemos que o raio de convergência dessa série de Laurent é o raio espectral de $\lambda_0 - A$. Portanto o círculo $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda - \lambda_0| = r_\sigma(\lambda_0 - A)\}$ contém pontos de $\sigma(A)$.

## ∗ Teorema da Aplicação Espectral para Polinômios

Considere $T \in \mathcal{L}(X)$ e $p(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ um polinômio em $\mathbb{C}$. Definimos

$$p(T) = c_0 I + c_1 T + \ldots + c_n T^n,$$

que é um operador em $\mathcal{L}(X)$. Com a regras da álgebra de operadores $\mathcal{L}(X)$, é claro que se o polinômio $p$ é fatorizável, então existe uma forma fatorada correspondente para $p(T)$.

**Teorema 2.2.5.** *Suponha que* $T \in \mathcal{L}(X)$, *onde* $X$ *é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$. *Se* $p$ *é um polinômio, então* $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$, *isto é, o espectro de* $p(T)$ *consiste dos pontos da forma* $p(\lambda)$, *onde* $\lambda \in \sigma(T)$.

*Demonstração.* O caso $n = 0$ é trivial. Assumiremos que $n \geqslant 1$ e que $c_n = 1$. Fixemos $\mu \in \mathbb{C}$ e denotemos por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os zeros complexos (repetidos com suas multiplicidades, se necessário) do polinômio $p(z)-\mu$. Assim $p(z)-\mu = (z-\lambda_1)\dots(z-\lambda_n)$, e portanto

$$p(T) - \mu = (T - \lambda_1)\dots(T - \lambda_n). \tag{2.11}$$

Se $\lambda_i \in \rho(T)$ para $i = 1, \dots, n$ então $\mu \in \rho(p(T))$ e

$$(p(T) - \mu)^{-1} = (T - \lambda_n)^{-1} \dots (T - \lambda_1)^{-1}.$$

Assim, se $\mu \in \sigma(p(T))$ então deve existir $\lambda_i$ tal que $\lambda_i \in \sigma(T)$, e como $p(\lambda_i) = \mu$, isso nos mostra que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$.

Reciprocamente, assuma que algum $\lambda_i$ está em $\sigma(T)$. Se $T - \lambda_i$ não é injetora, trocando a posição de $T - \lambda_i$ com $T - \lambda_n$ em (2.11), vemos que $p(T) - \mu$ também não é injetora, e $\mu \in \sigma(p(T))$. Agora se $T - \lambda_i$ não é sobrejetora, trocando sua posição com $T - \lambda_1$ em (2.11) vemos que $p(T) - \mu$ também não é sobrejetora, e $\mu \in \sigma(p(T))$. Portanto $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$, e a prova está completa. □

## Exercícios Complementares

**Exercício 2.12.** Assuma que $X$ seja um espaço vetorial normado não-completo, com $\hat{X}$ seu completamento. Suponha $T \in \mathcal{L}(X)$ e seja $\hat{T}$ a (única) extensão de $T$ a $\hat{X}$. Mostre que $\rho(\hat{T}) = \rho(T)$.

**Exercício 2.13.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, e $S, T \in \mathcal{L}(X)$.

(a) Se $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$, então os resolventes de $S$ e $T$ satisfazem a equação

$$(\lambda - S)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} = (\lambda - S)^{-1}(S - T)(\lambda - T)^{-1}.$$

(Esta igualdade é chamada *segunda identidade do resolvente*).

(b) Para um $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, defina $\mathcal{L}_{\lambda_0} = \{T \in \mathcal{L}(X) \colon \lambda_0 \in \rho(T)\}$. Mostre que se $T \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ e $S \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\|S - T\|_{\mathcal{L}(X)} \|(\lambda_0 - T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ então $S \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ e

$$(\lambda_0 - S)^{-1} = (\lambda_0 - T)^{-1}\Big\{I + \sum_{n=1}^{\infty} [(S - T)(\lambda_0 - T)^{-1}]^n\Big\}.$$

Em particular, $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ é aberto em $\mathcal{L}(X)$.

(c) (Teorema de Newburgh) Dados um conjunto aberto não-vazio $\Delta \subset \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$ com $\sigma(T) \subset \Delta$, existe $\epsilon > 0$ tal que para $S \in \mathcal{L}(X)$ com $\|S - T\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$ temos $\sigma(S) \subset \Delta$ (dizemos que a aplicação $\mathcal{L}(X) \ni T \mapsto \sigma(T) \in \mathbb{C}$ é uma função semicontínua superiormente).

**Exercício 2.14.** Sejam $\Delta$ um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e $\{\alpha_n\}$ uma sequência de pontos de $\Delta$ que é densa em $\Delta$. Defina $T\colon \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ por

$$T\{x_n\} = \{\alpha_n x_n\}.$$

(a) Mostre que $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$.

(b) Mostre que $\sigma(T) = \Delta$, que $\alpha_n$ é um autovalor de $T$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e que para $\lambda \in \Delta \setminus \{\alpha_n\}$ temos $\lambda \in \sigma_c(T)$.

**Exercício 2.15.** Sejam $A, B, C \in \mathcal{L}(X)$, onde $X$ é um espaço de Banach complexo.

(a) Se $(I - AB)C = C(I - AB) = I$ então $I - BA$ tem uma inversa em $\mathcal{L}(X)$.

**Dica:** Tente $I + BCA$.

(b) Mostre que os pontos não nulos de $\rho(AB)$ e $\rho(BA)$ são os mesmos. Conclua que $r_\sigma(AB) = r_\sigma(BA)$.

(c) Mostre que *não existem* operadores $A, B \in \mathcal{L}(X)$ satisfazendo $AB - BA = I$.

**Exercício 2.16.** Se $X$ é um espaço de Banach complexo e $AB = BA$, com $A, B \in \mathcal{L}(X)$, então $r_\sigma(AB) \leqslant r_\sigma(A) r_\sigma(B)$.

**Exercício 2.17.** Sejam $X$ um espaço de Banach complexo e $T \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que $\lambda(\lambda - T)^{-1}$ converge para $I$ em $\mathcal{L}(X)$.

## 2.3 Operadores Duais

A seguir recordamos a definição de *operador dual*. Para $X$ um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, com dual $X^*$, denotaremos o valor de um funcional $x^* \in X^*$ em um ponto $x \in X$ por $\langle x, x^* \rangle$, isto é, $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$.

Considere um operador $A\colon D(A) \subset X \to Y$ densamente definido. O **operador dual** $A^*\colon D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ de $A$ é o operador linear definido por: $D(A^*)$ é o conjunto dos $y^* \in Y^*$ para os quais existe $z^* \in X^*$ satisfazendo

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, z^* \rangle, \quad \text{para todo } x \in D(A). \tag{2.12}$$

Se $y^* \in D(A^*)$ definimos $A^* y^* = z^*$ onde $z^*$ é o único (veja Exercício 2.18) elemento de $X^*$ satisfazendo (2.12). O operador $A^*\colon D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ é fechado (veja Exercício 2.19).

**Exercício 2.18.** Seja $A\colon D(A) \subset X \to Y$ um operador linear densamente definido. Mostre que se existe $z^* \in X^*$ satisfazendo (2.12), então $z^*$ é único.

**Exercício 2.19.** Se $X$ é um espaço de Banach e $A\colon D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear densamente definido, mostre que $A^*\colon D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ é um operador linear fechado.

**Exercício 2.20.** Mostre que se $A\colon D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear densamente definido então para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos $(\lambda - A)^* = \lambda - A^*$. Mostre ainda que se $\lambda - A$ é injetor e tem imagem densa, então $\mathrm{Im}(\lambda - A^*) \subset D(((\lambda - A)^{-1})^*)$.

Começamos com alguns resultados básicos sobre operadores duais.

**Lema 2.3.1.** *Sejam* $X$ *e* $Y$ *espaços de Banach sobre* $\mathbb{K}$ *e* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Então* $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ *e* $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}$.

*Demonstração.* Para todo $y^* \in Y^*$, $y^* \circ A$ é um funcional linear contínuo e portanto determina um único elemento $z^* \in X^*$ para o qual $\langle x, z^*\rangle = \langle Ax, y^*\rangle$, para todo $x \in X$. Segue que $D(A^*) = Y^*$. Além disso

$$\begin{aligned}\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} &= \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leqslant 1} \|A^*y^*\|_{X^*} = \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leqslant 1} \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} |\langle x, A^*y^*\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \sup_{\|y^*\|_{X^*}\leqslant 1} |\langle Ax, y^*\rangle| = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \|Ax\|_Y = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.\end{aligned}$$

□

Temos um resultado um pouco mais geral, que é deixado como exercício ao leitor.

**Exercício 2.21.** Se $A\colon D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear densamente definido e limitado, então $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

**Lema 2.3.2.** *Seja* $X$ *um espaço de Banach reflexivo sobre* $\mathbb{K}$. *Se* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *é fechado e densamente definido então* $D(A^*)$ *é denso em* $X^*$.

*Demonstração.* Se $D(A^*)$ não é denso em $X^*$, existe um elemento $x_0 \in X$ (pela reflexividade de $X$) tal que $x_0 \neq 0$ e $\langle x_0, x^*\rangle = 0$ para todo $x^* \in D(A^*)$. Como $A$ é fechado, seu gráfico $G(A)$ é fechado e não contém $(0, x_0)$. Do Teorema de Hahn-Banach, existem $x_1^*$ e $x_2^*$ em $X^*$ tais que $\langle x, x_1^*\rangle - \langle Ax, x_2^*\rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$ e $\langle 0, x_1^*\rangle - \langle x_0, x_2^*\rangle \neq 0$.

Assim $\langle x_0, x_2^*\rangle \neq 0$, e também $x_2^* \neq 0$, $x_2^* \in D(A^*)$ e $A^*x_2^* = x_1^*$. Isto implica que $\langle x_0, x_2^*\rangle = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $D(A^*)$ é denso em $X^*$. □

**Exercício 2.22.** Exiba um exemplo de operador fechado e densamente definido $A\colon D(A) \subset X \to X$ tal que $\overline{D(A^*)} \subsetneq X^*$.

**Dica:** Veja [3, Exercise 2.22].

**Lema 2.3.3.** *Seja* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *um operador linear e densamente definido em* $X$. *Se* $\lambda \in \rho(A)$ *então* $\lambda \in \rho(A^*)$ *e*

$$(\lambda - A^*)^{-1} = ((\lambda - A)^{-1})^*. \tag{2.13}$$

*Demonstração.* Do Exercício 2.20 sabemos que $(\lambda - A)^* = \lambda - A^*$. Se $\lambda - A$ é injetor e tem imagem densa, consideremos o operador $B\colon D(B) \subset X \to X$ dado por $D(B) = \mathrm{Im}(\lambda - A)$ e $B = (\lambda - A)^{-1}$. Afirmamos que

(1) $B^*(\lambda - A^*)x^* = x^*$ para todo $x^* \in D(A^*)$;

(2) $(\lambda - A^*)B^*x^* = x^*$ para todo $x^* \in D(B^*)$.

*Prova de (1):* Seja $x^* \in D(A^*)$ e tome $w^* = (\lambda - A^*)x^*$. Para $y \in D(B) = \operatorname{Im}(\lambda - A)$, seja $x = By$ (isto é, $(\lambda - A)x = y$). Assim

$$\langle By, w^* \rangle = \langle x, (\lambda - A^*)x^* \rangle = \langle (\lambda - A)x, x^* \rangle = \langle y, x^* \rangle,$$

o que mostra que $w^* \in D(B^*)$ e $B^*w^* = x^*$, e conclui a prova de (1).
*Prova de (2):* Se $x^* \in D(B^*)$ e $x \in D(A)$, temos $(\lambda - A)x \in \operatorname{Im}(\lambda - A) = D(B)$, $B(\lambda - A)x = x$ e assim

$$\langle (\lambda - A)x, B^*x^* \rangle = \langle B(\lambda - A)x, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle.$$

Portanto $B^*x^* \in D(A^*)$ e $(\lambda - A^*)B^*x^* = x^*$, o que conclui a prova de (2).

Completamos agora a demonstração do teorema: se $\lambda \in \rho(A)$, então $B\colon D(B) \subset X \to X$ é limitado e segue do Exercício 2.21 que $B^* \in \mathcal{L}(X^*)$. De (1) e (2) segue que $\lambda \in \rho(A^*)$ e $(\lambda - A^*)^{-1} = B^*$. □

**Teorema 2.3.4.** *Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Então $\rho(A) = \rho(A^*)$ e vale (2.13) para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

*Demonstração.* Do Lema 2.3.3, sabemos que $\rho(A) \subset \rho(A^*)$ e vale (2.13) para todo $\lambda \in \rho(A)$. Para concluir a demonstração desse teorema, só nos resta mostrar que $\rho(A^*) \subset \rho(A)$.

Para isso, fixemos $\lambda \in \rho(A^*)$. Como $A^*$ é fechado temos $(\lambda - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*)$.

- $\lambda - A$ *é injetivo:* seja $x \in D(A)$ tal que $(\lambda - A)x = 0$. Para $x^* \in D(A^*)$ temos

$$0 = \langle (\lambda - A)x, x^* \rangle = \langle x, (\lambda - A)^* x^* \rangle.$$

Como $\operatorname{Im}(\lambda - A^*) = X^*$ temos $x = 0$, o que mostra que $\lambda - A$ é injetivo.

- $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ *é densa em* $X$*:* considere $x^* \in X^*$ com $0 = \langle y, x^* \rangle$ para todo $y \in \operatorname{Im}(\lambda - A)$. Desse modo, temos

$$\langle (\lambda - A)x, x^* \rangle = 0 \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Isto nos mostra que $x^* \in D(A^*)$ e $(\lambda - A^*)x^* = 0$. Mas $\lambda \in \rho(A^*)$, e portanto $\lambda - A^*$ é injetivo, o que nos dá $x^* = 0$. Logo $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ é densa em $X$.

- $(\lambda - A)^{-1}\colon \operatorname{Im}(\lambda - A) \subset X \to X$ *é limitado:* para cada $y^* \in X^*$ considere $x^* = (\lambda - A^*)^{-1}y^*$, isto é, $(\lambda - A^*)x^* = y^*$. Para $y \in \operatorname{Im}(\lambda - A)$ temos

$$\langle (\lambda - A)^{-1}y, y^* \rangle = \langle (\lambda - A)^{-1}y, (\lambda - A^*)x^* \rangle = \langle y, x^* \rangle = \langle y, (\lambda - A^*)^{-1}y^* \rangle,$$

e portanto

$$|\langle (\lambda - A)^{-1}y, y^* \rangle| \leqslant \|y\|_X \|(\lambda - A^*)^{-1}y^*\|_{X^*} \leqslant \|(\lambda - A^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^*)} \|y\|_X \|y^*\|_{X^*}.$$

Disto segue que $\|(\lambda - A)^{-1}y\| \leqslant \|(\lambda - A^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^*)} \|y\|_X$ para todo $y \in \operatorname{Im}(\lambda - A)$, e portanto $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado, o que completa a demonstração. □

O **anulador** (ou **ortogonal**) de um subconjunto $M \subset X$ é o conjunto

$$M^{\perp} = \{x^* \in X^* \colon \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ para todo } x \in M\},$$

e o **anulador** (ou **ortogonal**) de $N \subset X^*$ é o conjunto

$$N^{\perp} = \{x \in X \colon \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ para todo } x^* \in N\}.$$

**Exercício 2.23.** (a) Mostre que se $M \subset X$ é um espaço vetorial então $M^{\perp}$ é um subespaço vetorial fechado de $X^*$ e $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$. **Dica:** Veja [3, Proposition 1.9].

(b) Se $N \subset X^*$ é um subespaço vetorial então $N^{\perp}$ é um subspaço vetorial fechado de $X$ e que
$$(N^{\perp})^{\perp} \supset \overline{N}.$$
Pode acontecer de que $(N^{\perp})^{\perp}$ seja estritamente maior do que $\overline{N}$ (veja [3, Exercise 1.16]). Se $X$ for reflexivo, mostre que
$$(N^{\perp})^{\perp} = \overline{N}.$$

**Dica:** Veja [3, Proposition 1.9].

(c) Um subconjunto $N \subset X^*$ é dito **total** se $N^{\perp} = \{0\}$. Mostre que se $A \colon D(A) \subset X \to X$ é fechado e densamente definido então $D(A^*)$ é total (cf. Lema 2.3.2).

Notemos que os gráficos de $A$ e $A^*$ estão relacionados por uma simples condição de ortogonalidade. Considere o isomorfismo $\mathcal{I} \colon Y^* \times X^* \to X^* \times Y^*$ dado por

$$\mathcal{I}(y^*, x^*) = (-x^*, y^*).$$

Então
$$\mathcal{I}(G(A^*)) = G(A)^{\perp}. \tag{2.14}$$
De fato, note que para $(y^*, x^*) \in Y^* \times X^*$ temos

$$\begin{aligned}
(y^*, x^*) \in G(A^*) &\Leftrightarrow y^* \in D(A^*) \text{ e } A^*y^* = x^* \\
&\Leftrightarrow \langle x, x^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle \text{ para todo } x \in D(A) \\
&\Leftrightarrow \langle x, -x^* \rangle + \langle Ax, y^* \rangle = 0 \text{ para todo } x \in D(A) \\
&\Leftrightarrow (-x^*, y^*) \in G(A)^{\perp} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I}(y^*, x^*) \in G(A)^{\perp}.
\end{aligned}$$

**Proposição 2.3.5.** *Seja $A \colon D(A) \subset X \to Y$ um operador linear fechado e densamente definido. Então*

(a) $\ker(A) = \operatorname{Im}(A^*)^\perp$;

(b) $\ker(A^*) = \operatorname{Im}(A)^\perp$;

(c) $\ker(A)^\perp \supset \overline{\operatorname{Im}(A^*)}$;

(d) $\ker(A^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im}(A)}$.

*Demonstração.* Primeiramente provemos (b). Se $y^* \in \ker(A^*)$ e $y = Ax \in \operatorname{Im}(A)$ então

$$\langle y, y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle = 0,$$

o que mostra que $y^* \in \operatorname{Im}(A)^\perp$. Reciprocamente se $y^* \in \operatorname{Im}(A)^\perp$ então para todo $x \in D(A)$ temos

$$0 = \langle Ax, y^* \rangle,$$

o que mostra que $y^* \in D(A^*)$ e $A^* y^* = 0$, isto é, $y^* \in \ker(A^*)$, o que completa e prova de (b).

Para (a), veja que se $x \in \ker(A)$ e $x^* \in \operatorname{Im}(A^*)$ então existe $y^* \in Y^*$ tal que $A^* y^* = x^*$ e

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle = 0,$$

logo $x \in \operatorname{Im}(A^*)^\perp$. Para a volta, assumimos por contradição que existe $x_0 \in \operatorname{Im}(A^*)^\perp$ tal que $x_0 \notin \ker(A)$, isto é, $(x_0, 0) \notin G(A)$. Como $A$ é fechado, segue do Teorema de Hahn-Banach que existe $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ tal que $\langle x_0, x^* \rangle \neq 0$ e $\langle x, x^* \rangle - \langle Ax, y^* \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Isto nos dá $y^* \in D(A^*)$ e $A^* y^* = x^*$, e obtemos uma contradição.

A prova de (c) (resp. (d)) segue de (a) (resp. (b)) e do Exercício 2.23. □

O seguinte resultado será necessário adiante, e para sua demonstração, veja [3, Theorem 2.19]

**Proposição 2.3.6.** *Seja* $A \colon D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado e densamente definido. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) $\operatorname{Im}(A)$ *é fechada;*

(b) $\operatorname{Im}(A^*)$ *é fechada;*

(c) $\operatorname{Im}(A) = (\ker(A^*))^\perp$;

(d) $\operatorname{Im}(A^*) = (\ker(A))^\perp$.

## 2.4 Operadores Compactos

No que segue, $X$ e $Y$ serão espaços vetoriais normados. Quando necessários, assumiremos que eles são completos.

**Definição 2.4.1.** Diremos que um operador linear $K \colon X \to Y$ é **compacto** se para cada conjunto limitado $B \subset X$ temos $K(B)$ um subconjunto relativamente compacto de $Y$, isto é, seu fecho é compacto em $Y$. Denotamos por $\mathcal{K}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares compactos $K \colon X \to Y$.

**Exercício 2.24.** Mostre que $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$, isto é, mostre que todo operador linear compacto $K \colon X \to Y$ é limitado.

**Exercício 2.25.** Seja $K\colon X \to Y$ um operador linear. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes:

(a) $K$ é compacto;

(b) $K(B_r^X(x))$ é relativamente compacto em $Y$ para cada $r > 0$ e $x \in X$;

(c) $K(\overline{B}_r^X(x))$ é relativamente compacto em $Y$ para cada $r > 0$ e $x \in X$;

(d) $K(\overline{B}_1^X(0))$ é relativamente compacto em $Y$;

(e) $K(B_1^X(0))$ é relativamente compacto em $Y$;

(f) para cada sequência $\{x_n\}$ limitada em $X$, a sequência $\{Kx_n\}$ contém uma subsequência convergente para algum limite em $Y$.

**Exercício 2.26.** Mostre que se $\dim X < \infty$ ou $\dim Y < \infty$ então $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$. Mostre também e que se $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$ e $\mathcal{L}(X, Y)$ contém alguma aplicação aberta, então $\dim Y < \infty$.

Veja que com esse exercício podemos concluir que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{L}(X)$ se, e somente se, $\dim X < \infty$.

**Exercício 2.27.** Sejam $X = C([a, b], \mathbb{C})$ o conjuntos das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{C}$ com a norma do supremo e $k \in C([a, b] \times [a, b], \mathbb{C})$. Defina $K\colon X \to X$ por

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds \quad \text{para cada } t \in [a, b] \text{ e } x \in X.$$

Usando o Teorema de Arzelá-Ascoli (veja [14, Theorem 7.25], por exemplo), mostre que $K \in \mathcal{K}(X)$.

**Teorema 2.4.2.** *Temos $\mathcal{K}(X, Y)$ subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X, Y)$. Se $Y$ é Banach, então $\mathcal{K}(X, Y)$ é um supespaço fechado de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

*Demonstração.* A primeira afirmação é trivial. Agora suponha $Y$ completo. Se $\mathcal{K}(X, Y) \ni K_n \to K \in \mathcal{L}(X, Y)$ na topologia de $\mathcal{L}(X, Y)$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$K(B_1^X(0)) \subset K_{n_0}(B_1^X(0)) + B_\epsilon^Y(0).$$

Disto segue facilmente que $K(B_1^X(0))$ é totalmente limitado em $Y$, e como $Y$ é completo isto implica que $K(B_1^X(0))$ é relativamente compacto em $Y$. □

**Exercício 2.28.** Seja $X = \ell^2(\mathbb{C})$ e $A\colon X \to X$ como no Exemplo 2.6. Já sabemos que $A$ é limitado e $0 \in \sigma_c(A)$. Mostre que $A$ é compacto.

**Exercício 2.29.** Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Um operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é chamado de **nuclear** se existem sequências $\{x_n\} \subset \overline{B}_1^{X^*}(0)$, $\{y_n\} \subset \overline{B}_1^{Y}(0)$ e $\{\lambda_n\} \in \ell^1(\mathbb{K})$ tal que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle y_n \quad \text{para todo } x \in X.$$

(a) Mostre que a série acima é absolutamente convergente para cada $x \in X$.

(b) Mostre que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(c) Mostre que $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

**Teorema 2.4.3.** *Sejam $X, Y, Z$ espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

(a) *Se $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ ou $B \in \mathcal{K}(Y,Z)$ então $BA \in \mathcal{K}(X,Z)$.*

(b) *Se $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ então $A^* \in \mathcal{K}(Y^*,X^*)$.*

*Demonstração.* A prova de (a) é deixada como exercício. Para provar (b) mostraremos que $A^*(\overline{B}_1^{Y^*}(0))$ é relativamente compacto em $X^*$.

Defina

$$F = \overline{A(\overline{B}_1^{X}(0))},$$

que é compacto em $Y$, já que $A \in \mathcal{K}(X,Y)$. Consideremos então o espaço vetorial $\mathcal{C} = C(F,\mathbb{K})$ das funções contínuas de $F$ em $\mathbb{K}$, com a norma do supremo $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$.

Para $y^* \in \overline{B}_1^{Y^*}(0)$ e $x \in \overline{B}_1^{X}(0)$ temos

$$|\langle Ax, y^*\rangle| \leqslant \|Ax\|_Y \|y^*\|_{Y^*} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \|y^*\|_{Y^*} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Tomando limites obtemos $|\langle z, y^*\rangle| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ para todo $y^* \in \overline{B}_1^{Y^*}(0)$ e $z \in F$.

Além disso, para todo $y^* \in \overline{B}_1^{Y^*}(0)$ e $z_1, z_2 \in F$ temos $|\langle z_1 - z_2, y^*\rangle| \leqslant \|z_1 - z_2\|_Y$. Assim a família

$$\mathcal{F} = \left\{ y^*|_F \colon y^* \in \overline{B}_1^{Y^*}(0) \right\}$$

é uniformemente limitada e equicontínua em $C(F,\mathbb{K})$.

Assim, dada sequência $\{x_n^*\} \subset A^*(\overline{B}_1^{Y^*}(0))$, existe sequência $\{y_n^*\} \subset \overline{B}_1^{Y^*}(0)$ com $x_n^* = A^* y_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, do Teorema de Arzelá-Ascoli, $\{y_n^*|_F\}$ possui uma subsequência $\{y_{n_k}^*|_F\}$ convergente em $\mathcal{C}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\|x_{n_k}^* - x_{n_l}^*\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle x, x_{n_k}^* - x_{n_l}^*\rangle| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle x, A^*(y_{n_k}^* - y_{n_l}^*)\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle Ax, y_{n_k}^* - y_{n_l}^*\rangle| \leqslant \sup_{z \in F} |\langle z, y_{n_k}^* - y_{n_l}^*\rangle| = \|y_{n_k}^*|_F - y_{n_l}^*|_F\|_{\mathcal{C}},
\end{aligned}$$

o que mostra que $\{x_{n_k}^*\}$ é de Cauchy em $X^*$, e portanto convergente em $X^*$, e a demonstração de (b) está completa. □

**Observação 2.4.4.** Veja que se $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ e $\dim X = \infty$, então $A$ não pode ter inversa limitada, pois caso isso fosse verdade, $I = A^{-1}A \in \mathcal{K}(X)$, o que implicaria que $\dim X < \infty$.

Isso implica, em particular, que o operador identidade $I$ de $X$ é compacto se, e somente se, $X$ tem dimensão finita.

**Proposição 2.4.5.** *Se $Y$ é completo, $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ e $\mathrm{Im}(A)$ é um subespaço fechado de $Y$, então $\mathrm{Im}(A)$ tem dimensão finita.*

*Demonstração.* Defina $Y_1 = \mathrm{Im}(A)$ e $A_1 \colon X \to Y_1$ por $A_1x = Ax$ para cada $x \in X$. Claramente $A_1 \in \mathcal{K}(X, Y_1)$. Do Teorema 2.4.3 (b), $A_1^* \in \mathcal{K}(Y_1^*, X^*)$. Como $\mathrm{Im}(A_1) = Y_1$ é completo (pois é fechado em $Y$), segue do Teorema A.2.5 que $A_1^*$ possui uma inversa contínua, e segue da Observação 2.4.4 que $\dim Y_1^* < \infty$. Assim $\dim Y_1 = \dim Y_1^* < \infty$, o que completa a prova. □

## ∗ Teoria de Riesz-Fredholm

**Lema 2.4.6** (Lema de Riesz). *Seja $X$ um espaço vetorial normado e $M \subset X$ um subespaço linear fechado tal que $M \subsetneq X$. Então para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ com $\|x\|_X = 1$ e*
$$\mathrm{dist}(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\| \geqslant 1 - \epsilon.$$

*Demonstração.* Considere $x_0 \in X \setminus M$. Como $M$ é fechado temos $d = \mathrm{dist}(x_0, M) > 0$. Dado $0 < \epsilon < 1$, da definição de $d$, existe $y_0 \in M$ tal que
$$d \leqslant \|x_0 - y_0\|_X < \frac{d}{1-\epsilon}.$$
Claramente $y_0 \neq x_0$ e podemos definir
$$x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|_X}.$$
Então $x \in X$, $\|x\|_X = 1$ e para cada $y \in M$ temos
$$\|x - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|_X} - y \right\| = \frac{\|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\|_X y)\|_X}{\|x_0 - y_0\|_X} \overset{(\star)}{\geqslant} \frac{d}{\|x_0 - y_0\|_X} > 1 - \epsilon,$$
onde em $(\star)$ usamos que $y_0 + \|x_0 - y_0\| y \in M$. Assim
$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\| \geqslant 1 - \epsilon.$$
□

Para o próximo exercício, veja [3, Exercise 1.17].

**Exercício 2.30.** Seja $X$ um espaço vetorial normado e $x^* \in X^*$ com $x^* \neq 0$. Considere $M = \ker x^*$.

(a) Determine $M^\perp$.

(b) Mostre que para cada $x \in X$ temos

$$\operatorname{dist}(x, M) = \frac{|\langle x, x^* \rangle|}{\|x^*\|_{X^*}}.$$

**Dica:** Você pode usar a expressão $\operatorname{dist}(x, M) = \sup_{0 \neq y^* \in M^\perp} \frac{\langle x, y^* \rangle}{\|y^*\|_{X^*}}$.

(c) Assuma que $X = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$, com a norma do supremo, e que

$$\langle f, x^* \rangle = \int_0^1 f(t)dt \quad \text{para toda } f \in X.$$

Prove que

$$\operatorname{dist}(f, M) = \left| \int_0^1 f(t)dt \right| \quad \text{para toda } f \in X.$$

Mostre também que para cada $f \in X \setminus M$, $\inf_{g \in M} \|f - g\|_X$ não é atingido.

Veja que se $X$ é reflexivo, então podemos tomar $\epsilon = 0$ no Lema 2.4.6. De fato, como $M \subseteq X$ e $M$ é fechado, segue do Teorema de Hahn-Banach que existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\|_{X^*} = 1$ e $\langle y, x^* \rangle = 0$ para todo $y \in M$. Como $X$ é reflexivo, existe $x \in X$ com $\|x\|_X = 1$ tal que $\|x^*\|_{X^*} = \langle x, x^* \rangle$. Mas então para todo $y \in M$ temos

$$1 = \|x^*\|_{X^*} = \langle x, x^* \rangle = \langle x - y, x^* \rangle \leqslant \|x - y\|_X,$$

e portanto

$$\operatorname{dist}(x, M) \geqslant 1.$$

O Exercício 2.30 acima nos mostra que isso não é verdade em geral.

**Exercício 2.31.** Mostre que se $M$ é um subespaço finito-dimensional de $X$ então para cada $x \in X$ existe $y_0 \in M$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = \|x - y_0\|_X$.

**Teorema 2.4.7** (Teorema de Riesz). *Seja $X$ um espaço vetorial normado e assuma que $\overline{B}_1^X(0)$ seja compacta. Então $\dim X < \infty$.*

*Demonstração.* Assumimos por contradição que $\dim X = \infty$. Então existe uma sequência $\{E_n\}$ de subespaços de $X$ com $\dim E_n < \infty$ e $E_n \subsetneq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do Lema 2.4.6 existe uma sequência $\{x_n\}$ com $x_n \in E_n$, $\|x_n\|_X = 1$ e $\operatorname{dist}(x_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2$ para todo $n \geqslant 1$. Em particular, para $n > m$, temos $x_m \in E_m \subset E_{n-1}$ e

$$\|x_n - x_m\| \geqslant \operatorname{dist}(x_n, E_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Portanto $\{x_n\}$ não pode possuir subsequências convergentes, o que contraria a compacidade de $\overline{B}_1^X(0)$, e conclui o resultado. $\square$

Considere agora um espaço de Banach $X$. Dizemos que um operador linear $P \in \mathcal{L}(X)$ é uma **projeção** se $P^2 = P$.

**Proposição 2.4.8.** *Uma projeção $P$ está em $\mathcal{K}(X)$ se, e somente se, $\operatorname{Im}(P)$ tem dimensão finita.*

*Demonstração.* Defina $Z = \operatorname{Im}(P)$. O conjunto $P(\overline{B}_1^X(0))$ é limitado de $Z$, e se $Z$ tem dimensão finita, ele é relativamente compacto. Portanto $P \in \mathcal{K}(X)$.

Reciprocamente, note que $\overline{B}_1^Z(0) \subset P(\overline{B}_1^X(0))$, pois se $z \in Z$ e $\|z\|_X \leqslant 1$ então $z = Px$ para algum $x \in X$ e $Pz = P^2x = Px = z$, logo $z = Pz \in P(\overline{B}_1^X(0))$. Como $P \in \mathcal{K}(X)$, $P(\overline{B}_1^X(0))$ é relativamente compacto em $X$ e portanto $\overline{B}_1^Z(0)$ é compacta em $Z$. Segue do Teorema de Riesz que $Z$ tem dimensão finita. □

**Teorema 2.4.9** (Alternativa de Fredholm). *Seja $X$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{K}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então*

(a) $\dim\ker(\lambda - A) < \infty$;

(b) $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ *é fechado, e mais precisamente,* $\operatorname{Im}(\lambda - A) = (\ker(\lambda - A^*))^\perp$;

(c) $\ker(\lambda - A) = \{0\}$ *se, e somente se,* $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$;

(d) $\dim\ker(\lambda - A) = \dim\ker(\lambda - A^*)$.

*Demonstração.* (a) Veja que se $x \in \ker(\lambda - A)$ temos $x = \lambda^{-1}Ax$, e portanto a identidade em $\ker(\lambda - A)$ é um operador compacto. Da Observação 2.4.4 segue que $\dim\ker(\lambda - A) < \infty$.

(b) Assuma que $\{y_n\} \subset \operatorname{Im}(\lambda - A)$ e $y_n \to y \in X$. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $y_n = \lambda x_n - Ax_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $d_n = \operatorname{dist}(x_n, \ker(\lambda - A))$. Como $\ker(\lambda - A)$ tem dimensão finita, segue do Exercício 2.31 que existe $z_n \in \ker(\lambda - A)$ tal que $d_n = \|x_n - z_n\|_X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$y_n = (\lambda - A)x_n - (\lambda - A)z_n = \lambda(x_n - z_n) - A(x_n - z_n). \tag{2.15}$$

Afirmamos que a sequência $\{x_n - z_n\}$ é limitada. Se este não é o caso, extraindo subsequências, se necessário, podemos assumir que $\|x_n - z_n\|_X \to \infty$. Considerando $w_n = (x_n - z_n)/\|x_n - z_n\|_X$ obtemos

$$\frac{y_n}{\|x_n - z_n\|_X} = \lambda w_n - Aw_n,$$

e como $y_n \to y$, obtemos $\lambda w_n - Aw_n \to 0$. Mas $\{w_n\}$ é limitada e $A \in \mathcal{K}(X)$, e podemos assumir (tomando subsequências se necessário) que $Aw_n \to z$. Assim $\lambda w_n \to z$, o que implica que $w_n \to \lambda^{-1}z$, já que $\lambda \neq 0$. Além disso, $z \in \ker(\lambda - A)$. Portanto

$$\operatorname{dist}(w_n, \ker(\lambda - A)) \leqslant \|w_n - \lambda^{-1}z\|_X \to 0.$$

Mas
$$\mathrm{dist}(w_n, \ker(\lambda - A)) = \frac{\mathrm{dist}(x_n, \ker(\lambda - A))}{\|x_n - z_n\|_X} = 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$
o que nos dá uma contradição e mostra que $\{x_n - z_n\}$ é limitada.

Como $A$ é compacto, podemos assumir (extraindo subsequências se necessário) que $A(x_n - z_n) \to w$. Assim de (2.15) segue que $\lambda(x_n - z_n) \to y + w$. Defina $x = \lambda^{-1}(y + w)$. Assim $(\lambda - A)x = y$, o que mostra que $y \in \mathrm{Im}(\lambda - A)$, e portanto $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ é fechada. Isto nos permite também aplicar a Proposição 2.3.6 e obter
$$\mathrm{Im}(\lambda - A) = (\ker(\lambda - A^*))^\perp \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(\lambda - A^*) = (\ker(\lambda - A))^\perp.$$

(c) Suponha que $\ker(\lambda - A) = \{0\}$ e assuma que $E_1 = \mathrm{Im}(\lambda - A) \subsetneq X$. Assim $E_1$ é um espaço de Banach e $AE_1 \subset E_1$. Ainda $A_1 = A|_{E_1} \colon E_1 \to E_1 \in \mathcal{K}(E_1)$ e $E_2 = (\lambda - A)E_1 = \mathrm{Im}(A_1)$ é um subespaço fechado de $E_1$ (do item (b) aplicado a $A_1$). Mais ainda $E_2 \subsetneq E_1$ pois $\ker(\lambda - A) = \{0\}$ e $E_1 \subsetneq X$.

Deste modo, fazendo $E_n = (\lambda - A)^n X$, obtemos uma sequência estritamente decrescente de subespaços fechados de $X$. Usando o Lema de Riesz, podemos construir uma sequência $\{u_n\}$ com $u_n \in E_n$, $\|u_n\|_X = 1$ e $\mathrm{dist}(u_n, E_{n+1}) \geqslant 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim temos
$$\frac{Au_n}{\lambda} - \frac{Au_m}{\lambda} = -u_m + u_n - \frac{(\lambda - A)u_n}{\lambda} + \frac{(\lambda - A)u_m}{\lambda},$$
e para $n > m$, como $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1}$, obtemos
$$u_n - \frac{(\lambda - A)u_n}{\lambda} + \frac{(\lambda - A)u_m}{\lambda} \in E_{m+1},$$
portanto
$$\frac{1}{|\lambda|}\|Au_n - Au_m\|_X \geqslant \mathrm{dist}(u_m, E_{m+1}) \geqslant \frac{1}{2},$$
o que contradiz a compacidade do operador $A$. Assim provamos que $\mathrm{Im}(\lambda - A) = X$.

Para a recíproca, assuma que $\mathrm{Im}(\lambda - A) = X$. Da Proposição 2.3.5 sabemos então que $\ker(\lambda - A^*) = \mathrm{Im}(\lambda - A)^\perp = X^\perp = \{0\}$. Como $A^* \in \mathcal{K}(X^*)$, podemos aplicar o passo acima para concluir que $\mathrm{Im}(\lambda - A^*) = X^*$. Novamente, da Proposição 2.3.5 concluímos que $\ker(\lambda - A) = \mathrm{Im}(\lambda - A^*)^\perp = (X^*)^\perp = \{0\}$.

(d) A prova desse item é deixada como exercício ao leitor (veja [3, Theorem 6.6]) □

A Alternativa de Fredholm lida com a solubilidade da equação
$$(\lambda - A)x = y, \tag{2.16}$$
e diz que:

- ou (2.16) tem solução única para cada $y \in X$;

• ou a equação homogênea $(\lambda - A)x = 0$ possui $n$ soluções linearmente independentes, e neste caso, (2.16) possui solução se, e somente se, $y$ satisfaz $n$ *condições de ortogonalidade*, isto é, se $y \in \ker(\lambda - A^*)^\perp$.

Veja que a propriedade (c) é bem conhecida em espaços de dimensão finita (o Teorema do Núcleo e da Imagem). Contudo, em espaços de dimensão infinita, uma aplicação pode ser injetiva sem ser sobrejetiva, e também pode ser sobrejetiva sem ser injetiva.

**Exemplo 2.4.10.** Considere $X = \ell^2(\mathbb{C})$ e considere os operadores $R_s, L_s \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$ dados por

$$R_s(\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}) = \{0, x_1, x_2, x_3, \cdots\} \quad \text{e} \quad L_s(\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}) = \{x_2, x_3, x_4, \cdots\},$$

chamados the *right-shift* e *left-shift*, respectivamente. Veja que $R_s$ é injetor mas não é sobrejetor, e que $L_s$ é sobrejetor mas não injetor.

## ∗ Teorial Espectral para Operadores Compactos

No que segue, estudaremos o espectro de um operador $A \in \mathcal{K}(X)$. Começamos com o seguinte:

**Teorema 2.4.11.** *Se* $A \in \mathcal{K}(X)$ *e* $\dim X = \infty$ *então* $0 \in \sigma(A)$.

*Demonstração.* De fato, se $0 \in \rho(A)$ então $A$ possui inversa $A^{-1}$ contínua, e segue que o operador identidade $I = A^{-1}A$ está em $\mathcal{K}(X)$. Da Observação 2.4.4 obtemos $\dim X < \infty$, o que nos dá uma contradição. □

**Teorema 2.4.12.** *Seja* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A \in \mathcal{K}(X)$. *Se* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *então para cada inteiro positivo* $n$ *temos* $\dim \ker(\lambda - A)^n < \infty$.

*Demonstração.* O caso $n = 1$ é o item (a) da Alternativa de Fredholm. O caso geral segue do caso anterior observando-se que

$$(\lambda - A)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \binom{n}{k} (-1)^k A^k = \lambda^n - A_\lambda,$$

onde $A_\lambda = -\sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} \binom{n}{k} (-1)^k A^k \in \mathcal{K}(X)$. □

**Exercício 2.32.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que se $\ker(T^{n_0}) = \ker(T^{n_0+1})$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ então $\ker(T^n) = \ker(T^{n+1})$ para todo $n \geqslant n_0$.
**Dica**: Mostre que $\ker(T^{n+1}) = \{x \in X \colon Tx \in \ker(T^n)\}$.

**Teorema 2.4.13.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{K}(X)$ *e* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\ker((\lambda - A)^{n+1}) = \ker((\lambda - A)^n) \quad \textit{para todo } n \geqslant n_0.$$

*Demonstração.* Usando o exercício anterior, basta provar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\ker((\lambda - A)^{n_0+1}) = \ker((\lambda - A)^{n_0})$. Claramente $\ker((\lambda - A)^n)$ é fechado e $\ker((\lambda - A)^n) \subset \ker((\lambda - A)^{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $\ker((\lambda - A)^n) \subsetneq \ker((\lambda - A)^{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do Lema de Riesz, para cada $n \geqslant 2$, existe $x_n \in \ker((\lambda - A)^n)$ tal que $\|x_n\|_X = 1$ e $\operatorname{dist}(x_n, \ker((\lambda - A)^{n-1})) \geqslant \frac{1}{2}$. Assim

$$\frac{Ax_n}{\lambda} - \frac{Ax_m}{\lambda} = x_n - x_m + \frac{(\lambda - A)x_m}{\lambda} - \frac{(\lambda - A)x_n}{\lambda},$$

e para $n > m > 0$ temos

$$-x_m + \frac{(\lambda - A)x_m}{\lambda} - \frac{(\lambda - A)x_n}{\lambda} \in \ker((\lambda - A)^{n-1}).$$

Logo

$$\frac{1}{|\lambda|}\|Ax_n - Ax_m\|_X \geqslant \operatorname{dist}(x_n, \ker((\lambda - A)^{n-1}) \geqslant \frac{1}{2},$$

o que contraria a compacidade de $A$, e conclui a demonstração. $\square$

Quando $\ker(\lambda - A) \neq \{0\}$ então $\lambda$ é um autovalor de $A$, isto é, $\lambda \in \sigma_p(A)$. Neste caso, a **multiplicidade geométrica** de $\lambda$ é a dimensão de $\ker(\lambda - A)$. Nesse caso, existe um menor inteiro *positivo* $n_0$ tal que $\ker((\lambda - A)^{n_0}) = \ker((\lambda - A)^{n_0+1})$. O espaço $\ker((\lambda - A)^{n_0})$ é chamado de **autoespaço generalizado** associado ao autovalor $\lambda$ e que $\dim(\ker((\lambda - A)^{n_0}))$ é a **multiplicidade algébrica** de $\lambda$.

Observe que, se $X$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$, da Alternativa de Fredholm segue que $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$ se, e somente se, $\ker(\lambda - A) = \{0\}$. Logo $\lambda \in \rho(A)$ se, e somente se, $\ker(\lambda - A) = \{0\}$. Segue então que todos os pontos em $\sigma(A) \setminus \{0\}$ são autovalores, isto é, para um operador $A \in \mathcal{K}(X)$ temos

$$\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}.$$

**Lema 2.4.14.** *Sejam $X$ um espaço de Banach com dimensão infinita sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$. Se $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A) \setminus \{0\}$ é uma sequência de números distintos com $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{C}$, então $\lambda = 0$. Em particular, todo ponto de $\sigma(A) \setminus \{0\}$ é isolado.*

*Demonstração.* Como $\lambda_n \in \sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ com $\|x_n\|_X = 1$ tal que $(\lambda_n - A)x_n = 0$. Defina $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$, que é um subespaço finito dimensional de $X$ para cada $n$. Afirmamos que $X_n \subsetneq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e para mostrar isso, basta provar que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponha, por indução, que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores e mostremos que $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ também o é. Se $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+1}\alpha_i x_i = \lambda_{n+1}x_{n+1} = Ax_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i.$$

Disto segue que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i)x_i = 0 \text{ e portanto } \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Com isto $x_{n+1} = 0$, o que é uma contradição, e prova a afirmação.

Notemos ainda que $(\lambda_n - A)X_n \subset X_{n-1}$ (pois $(\lambda_n - A)x_n = 0$). Aplicando o Lema de Riesz, para cada $n \geqslant 2$ existe $y_n \in X_n$, $\|y_n\|_X = 1$ e $\operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Se $2 \leqslant m < n$, então $X_{m-1} \subset X_m \subset X_{n-1} \subset X_n$ e,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Ay_n}{\lambda_n} - \frac{Ay_m}{\lambda_m}\right\| &= \left\|\overbrace{\frac{(\lambda_m - A)y_m}{\lambda_m} - \frac{(\lambda_n - A)y_n}{\lambda_n} - y_m}^{\in X_{n-1}} + y_n\right\| \\ &\geqslant \operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Se $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, então a sequência $\left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ é limitada e, do fato que $A$ é compacto, $\left\{\frac{Ay_n}{\lambda_n}\right\}$ tem uma subsequência convergente, e temos uma contradição, o que mostra que $\lambda = 0$. □

O teorema a seguir sintetiza os resultados obtidos acima para o espectro de um operador compacto.

**Teorema 2.4.15.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$. Então $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$, $\sigma(A)$ contém no máximo uma quantidade enumerável de pontos, e o conjunto dos pontos de acumulação de $\sigma(A)$ é ou vazio ou $\{0\}$.*

**Exercício 2.33.** Considere uma sequência *qualquer* $\{\alpha_n\}$ que converge para $0$ em $\mathbb{C}$, $X = \ell^2(\mathbb{C})$ e defina

$$A\{x_1, x_2, x_3, \cdots\} = \{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \cdots\}.$$

(a) Mostre que $A$ é compacto;

(b) Mostre que $\sigma(A) = \{\alpha_n\} \cup \{0\}$.

(c) Dê exemplo de sequência $\{\alpha_n\}$ de modo que:

- ⋆ $0 \notin \sigma_p(A)$;
- ⋆ $0 \in \sigma_p(A)$ e $\dim\ker(A) < \infty$;
- ⋆ $0 \in \sigma_p(A)$ e $\dim\ker(A) = \infty$.

Frequentemente os operadores compactos surgem como inversa de operadores ilimitados. Estes operadores são os chamados *operadores com resolvente compacto* que definimos a seguir.

**Definição 2.4.16.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e com resolvente não-vazio. Diremos que $A$ tem **resolvente compacto** se para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$ o operador resolvente $(\lambda_0 - A)^{-1}$ está em $\mathcal{K}(X)$.

É uma consequência simples da identidade do resolvente (2.1) que se $A$ tem resolvente compacto então $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

**Exemplo 2.4.17.** Sejam $X = \{f \in C([0,1],\mathbb{K})\colon f(0) = 0\}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ o operador linear definido por $D(A) = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{K}) : f(0) = f'(0) = 0\}$ e $Af = f'$ para $f \in D(A)$. Notamos que $A$ é um operador fechado, densamente definido, $0 \in \rho(A)$ e que $A^{-1}$ é compacto (aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli). Assim $A$ tem resolvente compacto.

Sejam $X, Y$ espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diremos que $Y$ está **compactamente imerso** em $X$, e em geral escrevemos $Y \subset\subset X$, se:

- $Y$ é um subconjunto de $X$;
- a aplicação de inclusão $i\colon Y \to X$ é compacta, isto é, limitados de $Y$ são relativamente compactos em $X$.

Vale notar que sendo a inclusão um operador linear, se $Y \subset\subset X$, então $i$ também é contínua, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|y\|_X \leqslant c\|y\|_Y \quad \text{para todo } y \in Y.$$

**Exercício 2.34.** Sejam $X$ um espaço de Banach e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com $0 \in \rho(A)$. Em $D(A)$ defina a **norma do gráfico**

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Denote por $Y$ o espaço $D(A)$ munido da norma $\|\cdot\|_{D(A)}$. Mostre que $Y$ é um espaço de Banach e que se $Y \subset\subset X$, então $A$ tem resolvente compacto.

## 2.5 Operadores Dissipativos

**Definição 2.5.1** (Aplicação Dualidade)**.** Seja $X$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. A **aplicação dualidade** $J\colon X \to 2^{X^*}$ é a função multivaluada definida por

$$J(x) = \{x^* \in X^* \colon \mathrm{Re}\langle x, x^*\rangle = \|x\|_X^2,\ \|x^*\|_{X^*} = \|x\|_X\}.$$

Sabemos do Teorema de Hahn-Banach que $J(x) \neq \varnothing$ para cada $x \in X$.

**Definição 2.5.2** (Operador Dissipativo)**.** Um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$ é dito **dissipativo** se para cada $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\,\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$.

**Exercício 2.35.** *Um espaço vetorial normado $Y$ é dito **uniformemente convexo** se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|y_1\|_Y = \|y_2\|_Y = 1$ e $\|y_1 - y_2\| \geqslant \epsilon$, então $\|y_1 + y_2\|_Y < 2(1-\delta)$.*

Seja $X$ um espaço vetorial normado com $X^*$ uniformemente convexo. Mostre que para todo $x \in X$, o conjunto $J(x)$ é unitário.

**Lema 2.5.3.** *O operador linear* $A\colon D(A)\subset X\to X$ *é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda-A)x\|_X \geqslant \lambda\|x\|_X \quad \textit{para todo } x\in D(A) \textit{ e } \lambda>0. \tag{2.17}$$

*Demonstração.* Se $A$ é dissipativo, $\lambda>0$, $x\in D(A)$, $x^*\in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax,x^*\rangle\leqslant 0$, temos

$$\|\lambda x-Ax\|_X\|x\|_X\geqslant|\langle\lambda x-Ax,x^*\rangle|\geqslant\mathrm{Re}\langle\lambda x-Ax,x^*\rangle\geqslant\lambda\|x\|_X^2$$

e (2.17) segue. Reciprocamente, dado $x\in D(A)$ suponha que (2.17) vale para todo $\lambda>0$. Se $y_\lambda^*\in J((\lambda-A)x)$ e $g_\lambda^*=y_\lambda^*/\|y_\lambda^*\|_{X^*}$ temos

$$\begin{aligned}\lambda\|x\|_X\leqslant\|\lambda x-Ax\|_X&=\mathrm{Re}\langle\lambda x-Ax,g_\lambda^*\rangle=\lambda\mathrm{Re}\langle x,g_\lambda^*\rangle-\mathrm{Re}\langle Ax,g_\lambda^*\rangle\\&\leqslant\lambda\|x\|_X-\mathrm{Re}\langle Ax,g_\lambda^*\rangle.\end{aligned}$$

Deste modo, para cada $\lambda>0$, obtemos $\mathrm{Re}\langle Ax,g_\lambda^*\rangle\leqslant 0$ e

$$\|x\|_X\leqslant\mathrm{Re}\langle x,g_\lambda^*\rangle-\frac{\mathrm{Re}\langle Ax,g_\lambda^*\rangle}{\lambda}\leqslant\mathrm{Re}\langle x,g_\lambda^*\rangle+\frac{\|Ax\|_X}{\lambda}.$$

Como a bola unitária de $X^*$ é compacta na topologia fraca$^*$, existe $g^*\in X^*$ com $\|g^*\|_{X^*}\leqslant 1$ tal que $g^*$ é um ponto limite da rede $\{g_\lambda^*\}_{\lambda>0}$ (veja o Apêndice A.3). Isto significa que para cada $n\in\mathbb{N}$, ao considerarmos a vizinhança

$$U_n=\left\{f^*\in X^*\colon|\langle z_i,f^*-g^*\rangle|<\frac{1}{n},\ i=1,2\right\},$$

com $z_1=x$ e $z_2=Ax$, de $g^*$ em $X^*$ na topologia fraca$^*$, existe $\lambda_n\geqslant n$ tal que $g_{\lambda_n}\in U_n$. Isso mostra que para cada $n\in\mathbb{N}$ temos

$$|\mathrm{Re}\langle x,g_{\lambda_n}^*-g^*\rangle|\leqslant|\langle x,g_{\lambda_n}^*-g^*\rangle|<\frac{1}{n}\quad\text{e}\quad|\mathrm{Re}\langle Ax,g_{\lambda_n}^*-g^*\rangle|\leqslant|\langle Ax,g_{\lambda_n}^*-g^*\rangle|<\frac{1}{n},$$

ou seja

$$\mathrm{Re}\langle x,g_{\lambda_n}^*\rangle\to\mathrm{Re}\langle x,g^*\rangle\quad\text{e}\quad\mathrm{Re}\langle Ax,g_{\lambda_n}^*\rangle\to\mathrm{Re}\langle Ax,g^*\rangle,$$

quando fazemos $n\to\infty$.

Segue então que $\mathrm{Re}\langle Ax,g^*\rangle\leqslant 0$ e $\mathrm{Re}\langle x,g^*\rangle\geqslant\|x\|_X$. Mas $\mathrm{Re}\langle x,g^*\rangle\leqslant|\langle x,g^*\rangle|\leqslant\|x\|_X$ e portanto $\mathrm{Re}\langle x,g^*\rangle=\|x\|_X$. Ainda

$$\|x\|_X=\mathrm{Re}\langle x,g^*\rangle\leqslant\|g^*\|_{X^*}\|x\|_X,$$

e portanto $\|g^*\|_{X^*}\geqslant 1$, ou seja $\|g^*\|_{X^*}=1$. Tomando $x^*=\|x\|_Xg^*$ temos $x^*\in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax,x^*\rangle\leqslant 0$. Portanto, para todo $x\in D(A)$ existe $x^*\in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle Ax,x^*\rangle\leqslant 0$ e $A$ é dissipativo. □

**Teorema 2.5.4** (Lumer). *Suponha que* $A$ *é um operador linear em um espaço de Banach* $X$. *Se* $A$ *é dissipativo e* $\mathrm{Im}(\lambda_0-A)=X$ *para algum* $\lambda_0>0$, *então* $A$ *é fechado,* $\rho(A)\supset(0,\infty)$ *e*

$$\|\lambda(\lambda-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant 1\quad\textit{para todo } \lambda>0.$$

*Demonstração.* Se $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$, do Lema 2.5.3 temos

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geqslant \lambda \|x\|_X \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

o que mostra que $\lambda - A$ é injetivo, para cada $\lambda > 0$. Como $\mathrm{Im}(\lambda_0 - A) = X$, $\lambda_0 - A\colon D(A) \subset X \to X$ é bijetivo. Além disso, como $\|(\lambda_0 - A)x\|_X \geqslant \lambda_0 \|x\|_X$ para todo $x \in D(A)$, obtemos

$$\|(\lambda_0 - A)^{-1}x\|_X \leqslant \lambda_0^{-1}\|x\|_X \quad \text{para todo } x \in X,$$

o que mostra que $\lambda_0$ está no conjunto resolvente de $A$ e $(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Do item (a) - Exercício 2.1.6, $A$ é fechado.

Seja $\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$, que é um conjunto aberto em $(0, \infty)$ já que $\rho(A)$ é aberto. Provemos que $\Lambda$ é também fechado em $(0, \infty)$ para concluir que $\Lambda = (0, \infty)$. Suponha que $\Lambda \ni \lambda_n \to \lambda > 0$, se $n$ é suficientemente grande temos $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \lambda/3$ e assim $\|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant |\lambda_n - \lambda|\lambda_n^{-1} \leqslant 1/2$. Portanto

$$\lambda - A = \left[I + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\right](\lambda_n - A)$$

é bijetor e $\lambda \in \rho(A)$, como queríamos. □

**Corolário 2.5.5.** *Seja $A$ um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos $A$ e $A^*$ são dissipativos, então $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1 \quad \textit{para todo } \lambda > 0.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.5.4 é suficiente provar que $\mathrm{Im}(I - A) = X$. Como $A$ é dissipativo e fechado, $\mathrm{Im}(I - A)$ é um subespaço fechado de $X$. Seja $x^* \in X^*$, tal que $\langle (I - A)x, x^* \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Isto implica que $x^* \in D(A^*)$ e $(I^* - A^*)x^* = 0$. Como $A^*$ é também dissipativo segue do Lema 2.5.3 que $x^* = 0$. Segue que $\mathrm{Im}(I - A)$ é densa em $X$ e, como $\mathrm{Im}(I - A)$ é fechada, $\mathrm{Im}(I - A) = X$. □

Veremos agora algumas propriedades de operadores dissipativos.

**Teorema 2.5.6.** *Seja $A$ um operador dissipativo em $X$.*

(a) *Se para algum $\lambda_0 > 0$, $\mathrm{Im}(\lambda_0 - A) = X$ então $\mathrm{Im}(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

(b) *Se $A$ é fechável, então seu fecho $\overline{A}$ também é dissipativo.*

(c) *Se $\overline{D(A)} = X$ então $A$ é fechável.*

*Demonstração.* A parte (a) segue do Teorema de Lumer. Para provar (b), sejam $x \in D(\overline{A})$ e $y = \overline{A}x$. Então existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y = \overline{A}x$. Do Teorema 2.5.3 segue que $\|\lambda x_n - Ax_n\|_X \geqslant \lambda \|x_n\|_X$ para $\lambda > 0$ e fazendo $n \to \infty$ temos

$$\|\lambda x - \overline{A}x\|_X \geqslant \lambda \|x\|_X, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Como a desigualdade acima vale para todo $x \in D(\overline{A})$, $\overline{A}$ é dissipativo pelo Teorema 2.5.3. Para provar (c) assuma que $A$ não é fechável. Então existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in D(A)$, $x_n \to 0$ and $Ax_n \to y$ com $\|y\|_X = 1$. Do Teorema 2.5.3, segue que para todo $t > 0$ e $x \in D(A)$

$$\left\|(x + \frac{1}{t}x_n) - tA(x + \frac{1}{t}x_n)\right\|_X \geqslant \left\|x + \frac{1}{t}x_n\right\|_X.$$

Fazendo $n \to \infty$ e depois fazendo $t \to 0$, temos $\|x - y\|_X \geqslant \|x\|_X$ para todo $x \in D(A)$. Mas isto é impossível de acontecer se $D(A)$ é denso em $X$ e portanto $A$ é fechável. $\square$

**Teorema 2.5.7.** *Se $X$ é um espaço de Banach reflexivo e $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador linear dissipativo com $\mathrm{Im}(I - A) = X$, então $\overline{D(A)} = X$.*

*Demonstração.* Seja $x^* \in X^*$ tal que $\langle x, x^*\rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Mostraremos que $x^* = 0$. Como $\mathrm{Im}(I - A) = X$ é suficiente mostrar que $\langle x - Ax, x^*\rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$ o que é equivalente a $\langle Ax, x^*\rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Seja $x \in D(A)$ então, pelo Teorema 2.5.6, parte (a), existe um $x_n$ tal que $x = x_n - (1/n)Ax_n$. Como $Ax_n = n(x_n - x) \in D(A)$, $x_n \in D(A^2)$ e $Ax = Ax_n - (1/n)A^2x_n$ ou $(I - (1/n)A)Ax_n = Ax$. Do Lema 2.5.3 segue que $\|Ax_n\|_X \leqslant \|Ax\|_X$. Assim, $\|x_n - x\|_X \leqslant (1/n)\|Ax_n\|_X \leqslant (1/n)\|Ax\|_X$ e $x_n \to x$. Como $X$ é reflexivo, existe uma subsequência $Ax_{n_k}$ de $Ax_n$ tal que $Ax_{n_k} \xrightarrow{w} f$ quando $k \to \infty$. Como $G(A)$ é um subespaço convexo de $X \times X$ e $A$ é fechado, temos $f = Ax$. Finalmente, como $Ax_{n_k} \in D(A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $0 = \langle Ax_{n_k}, x^*\rangle \to \langle Ax, x^*\rangle$, o que conclui o resultado. $\square$

## 2.6 Imagem Numérica

Em muitos exemplos, a técnica utilizada para obter estimativas para o operador resolvente de um operador dado, bem como localizar o seu espectro, é a determinação de sua *imagem numérica*. Se $A$ é um operador linear em um espaço de Banach complexo $X$ a sua **imagem numérica** $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) = \{\langle Ax, x^*\rangle \colon x \in D(A),\ x^* \in X^*, \|x\|_X = \|x^*\|_{X^*} = \langle x, x^*\rangle = 1\}. \tag{2.18}$$

Quando $X$ é um espaço de Hilbert, temos

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle \colon x \in D(A), \|x\| = 1\}.$$

**Teorema 2.6.1.** *Sejam $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e densamente definido, e $W(A)$ sua imagem numérica.*

(a) *Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é injetor, tem imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geqslant d(\lambda, W(A))\|x\|_X, \tag{2.19}$$

*onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de $\lambda$ a $W(A)$. Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$, temos*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))}. \tag{2.20}$$

(b) *Se $\Sigma$ é um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C} \setminus W(A)$ e $\rho(A) \cap \Sigma \neq \varnothing$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e (2.20) está satisfeita para todo $\lambda \in \Sigma$.*

*Demonstração.* Seja $\lambda \notin \overline{W(A)}$. Se $x \in D(A)$, $\|x\|_X = 1$, $x^* \in X^*$, $\|x^*\|_{X^*} = 1$ e $\langle x, x^* \rangle = 1$ então

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leqslant |\lambda - \langle Ax, x^* \rangle| = |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \leqslant \|\lambda x - Ax\|_X \tag{2.21}$$

e portanto $\lambda - A$ é injetor, tem imagem fechada e satisfaz (2.19). Se além disso $\lambda \in \rho(A)$ então (2.21) implica (2.20).

Nos resta mostrar que se $\Sigma$ intercepta $\rho(A)$ então $\rho(A) \supset \Sigma$. Para este fim considere o conjunto $\rho(A) \cap \Sigma$. Este conjunto é obviamente aberto em $\Sigma$. Mas também é fechado já que $\lambda_n \in \rho(A) \cap \Sigma$ e $\lambda_n \to \lambda \in \Sigma$ implica que, para $n$ suficientemente grande, $|\lambda - \lambda_n| \leqslant \frac{d(\lambda_n, W(A))}{2}$. Disto e de (2.20) segue que, para $n$ grande, $|\lambda - \lambda_n| \|(\lambda_n - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{2} < 1$ e, como na prova do Teorema 2.1.11, temos $\lambda \in \rho(A)$ e portanto $\rho(A) \cap \Sigma$ é fechado em $\Sigma$. Segue que $\rho(A) \cap \Sigma = \Sigma$ ou seja $\rho(A) \supset \Sigma$, como queríamos. $\square$

**Exercício 2.36.** Sejam $X$ um espaço de Banach, tal que $X^*$ seja uniformemente convexo, e $A: D(A) \subset X \to X$ um operador fechado, densamente definido e dissipativo. Se $\overline{\operatorname{Im}(I - A)} = X$, mostre que $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ e que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{0, \frac{\pi}{2}}.$$

**Exemplo 2.6.2** (O Operador de Laplace). Seja $\Omega$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Denote por $C_0^2(\Omega, \mathbb{C})$ o espaço das funções $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ que são de classe $C^2$ em $\Omega$, contínuas em $\overline{\Omega}$, com $u_{|\partial\Omega} = 0$. Se $1 < p < \infty$, defina $A_0: D(A_0) \subset L^p(\Omega, \mathbb{C}) \to L^p(\Omega, \mathbb{C})$ onde $D(A_0) = C_0^2(\Omega, \mathbb{C})$ e $A_0 u = \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ se $u \in D(A_0)$.

Se $\|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} = 1$, defina $\xi_u: L^p(\Omega, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ por

$$\langle v, \xi_u \rangle = \int_\Omega \overline{u} |u|^{p-2} v \, dx \quad \text{para todo } v \in L^p(\Omega, \mathbb{C}).$$

Então, $\xi_u$ é um funcional linear contínuo com a propriedade

$$\|\xi_u\|_{[L^p(\Omega,\mathbb{C})]^*} = \|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} = \langle \xi_u, u \rangle = 1.$$

Como $L^p(\Omega, \mathbb{C})$ é uniformemente convexo, segue que este é o único funcional com essas propriedades. Vamos usar esses funcionais para mostrar que $A_0$ é dissipativo e para calcular sua imagem numérica $W(A_0)$.

Primeiramente consideremos o caso $p \geqslant 2$. Temos

$$\int_\Omega \overline{u} |u|^{p-2} \Delta u \, dx = -\int_\Omega J \, dx$$

onde

$$J = |u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \overline{u} + \overline{u} \nabla u \cdot \nabla |u|^{p-2} |u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \overline{u} + (p-2)|u|^{p-4} \overline{u} \nabla u \cdot |u| \nabla |u|.$$

Agora, se $u = u_1 + iu_2$,

$$\begin{aligned} |u|^2\nabla u \cdot \nabla \overline{u} &= \overline{u}\nabla u \cdot u\nabla\overline{u} = (\mathrm{Re}(\overline{u}\nabla u))^2 + (\mathrm{Im}(\overline{u}\nabla u))^2 \\ \overline{u}\nabla u &= u_1\nabla u_1 + u_2\nabla u_2 + i(u_1\nabla u_2 - u_2\nabla u_1) \\ |u|\nabla|u| &= u_1\nabla u_1 + u_2\nabla u_2 = \mathrm{Re}(\overline{u}\nabla u) \end{aligned}$$

e assim,

$$J = |u|^{p-4}\left\{(p-1)(\mathrm{Re}\,\overline{u}\nabla u)^2 + (\mathrm{Im}\,\overline{u}\nabla u)^2 + i(p-2)(\mathrm{Re}\,\overline{u}\nabla u)\cdot(\mathrm{Im}\,\overline{u}\nabla u)\right\}.$$

Logo $\frac{|\mathrm{Im} J|}{\mathrm{Re} J} \leqslant \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}$, e a imagem numérica $W(A_0)$ de $A_0$ satisfaz

$$W(A_0) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\lambda \leqslant 0,\ \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}\mathrm{Re}\,\lambda + |\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant 0\right\}.$$

Por outro lado, se $\lambda > 0$ e $u \in D(A_0)$ com $\|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} = 1$, temos

$$\mathrm{Re}\left(\int_\Omega \overline{u}|u|^{p-2}(\lambda u - \Delta u)dx\right) = \lambda + \int_\Omega \mathrm{Re} J\, dx \geqslant \lambda$$

e, da desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|\lambda u - \Delta u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} \geqslant \mathrm{Re}\left(\int_\Omega \overline{u}|u|^{p-2}(\lambda u - \Delta u)dx\right).$$

Segue, para todo $u \in D(A_0)$, que

$$\|\lambda u - \Delta u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} \geqslant \lambda\|u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{C})}$$

mostrando que $A_0$ é dissipativo.

No caso $1 < p < 2$, devemos ser mais cuidadosos ao aplicarmos o Teorema da Divergência, visto que $\overline{u}|u|^{p-2}$ deixa de ser de classe $C^1$ nos pontos onde $u$ se anula. Em princípio suponhamos $u$ de classe $C^\infty$. Neste caso a aplicação $x \mapsto |u(x)|^2$ é também de classe $C^\infty$, e portanto, pelo Teorema de Sard (enunciado ao final deste exemplo), quase todo $\epsilon > 0$ é valor regular de $|u(\cdot)|^2$, e dessa forma

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega\colon\ |u(x)|^2 > \epsilon\}$$

possui fronteira suave. Podemos agora aplicar o Teorema da Divergência em $\Omega_\epsilon$, obtendo

$$z_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} (A_0 u(x))\overline{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} |u(x)|^{p-2}\,\overline{u}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}d\sigma - \int_{\Omega_\epsilon} J\, dx,$$

onde $\nu$ representa a normal unitária exterior a $\partial\Omega_\epsilon$.

Como visto acima,

$$\operatorname{Re} J \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \frac{|\operatorname{Im} J|}{\operatorname{Re} J} \leqslant \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}.$$

Além disso, como $\nabla(|u|^2) = 2|u|\nabla|u|$ é normal à superfície de nível $\epsilon$, $|u(x)|^2 > \epsilon$ em $\Omega_\epsilon$ e $|u(x)|^2 = \epsilon$ em $\partial\Omega_\epsilon$, vemos que $\nu(x) = -\eta(x)\nabla|u|(x)$, onde $\eta(x) \geqslant 0$ em $\partial\Omega_\epsilon$. Dessa forma

$$\operatorname{Re}\left(\overline{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \operatorname{Re}\left(\overline{u}\nabla u \cdot \nu\right) = |u|\frac{\partial |u|}{\partial \nu} \leqslant 0.$$

Assim, para $u \in C^\infty(\Omega) \cap D(A_0)$, temos

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\Omega_\epsilon} (A_0 u)(x)\overline{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx\right) \leqslant 0,$$

para quase todo $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \to 0^+$ através dos valores regulares de $|u(\cdot)|^2$, obtemos

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\Omega} (A_0 u)(x)\overline{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx\right) \leqslant 0.$$

Agora, tomando-se limites na topologia $C^2$, segue que $A_0$ é um operador dissipativo e densamente definido em $L^p(\Omega)$, para $1 < p < 2$.

Como $D(A_0)$ é denso em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$ temos, do Teorema 2.5.6, $A_0$ fechável. Se $A_p$ denota o fecho de $A_0$, temos:

(i) $A_p$ é dissipativo;

(ii) $W(A_p) \subset \overline{W(A_0)} \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0,\ \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}} \operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant 0\right\}$.

Além disso, $\operatorname{Im}(\lambda - A_p) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$ para algum $\lambda > 0$. De fato, o [3, Theorem 9.5] garante que, se $\partial\Omega$ é de classe $C^{m+2}$ com $m > \frac{n}{2}$, toda função $C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ está em $\operatorname{Im}(I - A_p)$, qualquer que seja $p > 1$. Como $C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ é denso em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$ e $\operatorname{Im}(\lambda - A_p)$ é fechada, segue que $\operatorname{Im}(\lambda - A_p) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$.

Uma outra maneira de obter que $\operatorname{Im}(\lambda - A_p) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$ é utilizar o seguinte resultado:

**Teorema 2.6.3.** *Para* $1 < p < \infty$, $D(A_p) = W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C})$ *e, se* $p' = \frac{p}{p-1}$, *o operador* $A_{p'} \colon D(A_{p'}) \subset L^{p'}(\Omega, \mathbb{C}) \to L^{p'}(\Omega, \mathbb{C})$ *é o adjunto do operador* $A_p \colon D(A_p) \subset L^p(\Omega, \mathbb{C}) \to L^p(\Omega, \mathbb{C})$.

*Demonstração.* Para ver que $D(A_p) = W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C})$ é suficiente mostrar que, dado $u \in W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C})$, existe uma sequência $\{u_n\}$ em $C_0^2(\Omega, \mathbb{C})$ tal que $u_n \to u$ e $\Delta u_n \to \Delta u$ fracamente em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$ (a prova deste fato é deixada como exercício para o leitor). O restante da prova segue facilmente. □

**O Teorema de Sard.:** Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação suficientemente regular. Dizemos que $y \in \mathbb{R}^p$ é um **valor regular** para $f$, se $f'(x)$ for um operador linear sobrejetor para todo $x \in f^{-1}(\{y\})$. Dessa forma, $y \in \mathbb{R}^p$ é um valor regular para $f$ se $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$ ou $f^{-1}(\{y\})$ é uma subvariedade suave de $\mathbb{R}^n$ de codimensão $p$.

Dizemos que $y \in \mathbb{R}^p$ é um **valor singular** de $f$ se não for regular. Nestas condições temos o seguinte:

**Teorema 2.6.4** (Teorema de Sard). *Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ for uma aplicação suficientemente regular, então o conjunto dos valores regulares de $f$ tem medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^p$.*

**Exercício 2.37.** Mostre que o operador $A_2\colon D(A_2) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, com $D(A_2) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, do Exemplo 2.6.2, é um operador autoadjunto tal que $\langle A_2 u, u\rangle_{L^2(\Omega)} \leqslant 0$ para todo $u \in D(A_2)$.

# CAPÍTULO 3

# Cálculo Operacional

Neste capítulo estudaremos a teoria de *cálculo operacional* para operadores lineares, tanto limitados quanto não-limitados. Os resultados apresentados seguem [17, Section V.8].

## 3.1 Operadores Limitados

Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. Já vimos que $\sigma(A)$ é não-vazio e limitado, e que, de fato, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant r_\sigma(A)\}$, onde $r_\sigma(A)$ é o raio espectral de $A$, definido em (2.6).

Para $r > r_\sigma(A)$, considere a curva $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = re^{2\pi i t}$ para $t \in [0,1]$. Para $|\lambda| > r_\sigma(A)$ sabemos que

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n, \tag{3.1}$$

e portanto, para $j \in \mathbb{N}$, temos

$$A^j = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^j (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \tag{3.2}$$

**Observação 3.1.1.** Observe que $\gamma$ pode ser qualquer curva fechada retificável que seja homotópica à curva $\gamma$ em $\rho(A)$. Além disso, podemos também substituir $\gamma$ por várias curvas fechadas, desde que elas não se intersectem, nenhuma delas esteja no interior de outra, e que $\sigma(A)$ esteja na união dos seus interiores.

**Exercício 3.1.** Mostre (3.2).

Assim para um polinômio qualquer $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ temos

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} p(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

**Exercício 3.2.** Sejam $X$ um espaço de Banach complexo e $A \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que se $r > r_\sigma(A)$ e $\gamma(t) = re^{2\pi i t}$ para $t \in [0,1]$, então

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Estas considerações motivam a seguinte definição.

**Definição 3.1.2.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. Uma função $f\colon D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita **analítica em $\sigma(A)$** se o domínio $D(f)$ de $f$ é um aberto que contém $\sigma(A)$, e $f$ é analítica em $D(f)$. A classe das funções analíticas em $\sigma(A)$ é denotada por $\mathcal{U}(A)$.

Algumas considerações sobre a topologia do plano complexo devem ser apresentadas, e as resumimos em forma de resultado. Para a demonstração de tais fatos, consulte, por exemplo [16, Section 3].

**Proposição 3.1.3.** (1) *Sejam $D_1$ e $D_2$ domínios de Cauchy, e assuma que $\overline{D_1} \subset D_2$. Então $D = D_2 \setminus \overline{D_1}$ é um domínio de Cauchy, $+\partial D$ consiste de $+\partial D_2$ e $-\partial D_1$. O domínio $D$ é limitado se ambos $D_1$ e $D_2$ forem ilimitados, ou se $D_2$ for limitado.*

(2) *Seja $D_1$ um domínio de Cauchy e $D_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$. Então $D_2$ é um domínio de Cauchy, e $+\partial D_2 = -\partial D_1$.*

(3) *Assuma $F \subset \Omega$, com $F$ fechado e $\Omega$ aberto. Assuma que $\partial\Omega$ é não vazia e limitada. Então existe um domínio de Cauchy $D$ tal que $F \subset D$, $\overline{D} \subset \Omega$, as curvas formando $\partial D$ são polígonos, e $D$ é ilimitado se $\Omega$ é ilimitado.*

Segue diretamente da proposição acima que se $f$ é analítica em $\sigma(A)$, existe um domínio de Cauchy $D$ satisfazendo $\sigma(A) \subset D$ e $\overline{D} \subset D(f)$. Além disso, como $\sigma(A)$ é compacto, trocando $D(f)$ por um subconjunto aberto limitado de $D(f)$ que contém $\sigma(A)$, se necessário, obtemos $D$ limitado. Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

**Definição 3.1.4.** Para $f \in \mathcal{U}(A)$ definimos um operador $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ por

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \tag{3.3}$$

onde $D$ é um domínio de Cauchy limitado com $\sigma(A) \subset D$ e $\overline{D} \subset D(f)$.

Primeiramente, devemos mostrar que esta definição faz sentido, isto é, independe do domínio de Cauchy limitado escolhido. De fato, se $D_1$ e $D_2$ são domínios de Cauchy com as propriedades acima, então $\sigma(A) \subset D_1 \cap D_2$ e $D_1 \cap D_2$ é aberto. Da Proposição 3.1.3 existe um domínio de Cauchy $D$ com $\sigma(A) \subset D$ com $\overline{D} \subset D_1 \cap D_2$. Além disso, $D_1 \setminus \overline{D}$ é um domínio de Cauchy e $+\partial(D_1 \setminus \overline{D}) = +\partial D_1 - \partial D$. Como $f$ é analítica em $D_1 \setminus \overline{D}$ temos

$$0 = \int_{+\partial(D_1 \setminus \overline{D})} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda - \int_{+\partial D} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

e portanto

$$\int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \int_{+\partial D} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Aplicando o raciocínio análogo para $D_2$ obtemos

$$\int_{+\partial D_2} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \int_{+\partial D} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

o que mostra que (3.3) está bem definida.

**Exercício 3.3.** Mostre que se $f, g \in \mathcal{U}(A)$ coincidem em um aberto que contém $\sigma(A)$, então $f(A) = g(A)$.

Pelo exercício acima, é comum nos referirmos aos membros de $\mathcal{U}(A)$ como *classes de equivalência* de funções que coincidem num aberto que contém $\sigma(A)$.

É claro que, se $f, g \in \mathcal{U}(A)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então $f + g$, $fg$ e $\alpha f$ estão em $\mathcal{U}(A)$. Além disso, é fácil ver que

$$f(A) + g(A) = (f + g)(A) \quad \text{e} \quad \alpha f(A) = (\alpha f)(A).$$

Vamos provar que $f(A)g(A) = (fg)(A)$. Para isso consideremos um domínio de Cauchy limitado $D_2$ satisfazendo $\sigma(A) \subset D_2$ com $\overline{D_2} \subset D(f) \cap D(g)$. Com isso, sabemos que existe um outro domínio de Cauchy $D_1$ satisfazendo $\sigma(A) \subset D_1$ e $\overline{D_1} \subset D_2$. Resumidamente, temos

$$\sigma(A) \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D_2 \subset \overline{D_2} \subset D(f) \cap D(g).$$

Com essa notação, sabemos que:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad \text{e} \quad g(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu.$$

Logo

$$f(A)g(A) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{+\partial D_1} \int_{+\partial D_2} f(\lambda)g(\mu)\,(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}\, d\mu\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{+\partial D_1} \int_{+\partial D_2} f(\lambda) g(\mu) \frac{1}{\mu - \lambda} [(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}] \, d\mu \, d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_1} f(\lambda) g(\lambda) (\lambda - A)^{-1} \, d\lambda = (fg)(A),$$

uma vez que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu = g(\lambda) \quad \text{para } \lambda \in \partial D_1,$$

e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda = 0 \quad \text{para } \mu \in \partial D_2.$$

**Exemplo 3.1.5.** Seja $X = C([0,1], \mathbb{C})$ com a norma do supremo e considere o operador $A \colon X \to X$ definido da seguinte maneira:

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Claramente $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$. É simples verificar, por indução, que

$$(A^{n+1}x)(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n x(s) ds \quad \text{para todos } t \in [0,1] \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

o que nos dá $\|A^{n+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{n!}$, e portanto $r_\sigma(A) = 0$. Portanto $\sigma(A) = \{0\}$. De (2.4), se $\lambda \neq 0$ e $y = (\lambda - A)^{-1}x$ temos

$$y(t) = ((\lambda - A)^{-1}x)(t) = \frac{1}{\lambda} x(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+2}} (A^{n+1}x)(t)$$
$$= \frac{1}{\lambda} x(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+2} n!} \int_0^t (t-s)^n x(s) ds$$
$$= \frac{1}{\lambda} x(t) + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{\lambda^n n!} x(s) ds$$
$$= \frac{1}{\lambda} x(t) + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{(t-s)/\lambda} x(s) ds.$$

Nesse caso, $\mathcal{U}(A)$ consiste das funções analíticas numa vizinhança de $\lambda = 0$. Se $f \in \mathcal{U}(A)$ e $\gamma$ é um círculo $|\lambda| = r$ suficientemente pequeno orientada positivamente, podemos calcular $f(A)$ por

$$(f(A)x)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) ((\lambda - A)^{-1}x)(t) d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) \left\{ \frac{1}{\lambda} x(t) + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{(t-s)/\lambda} x(s) ds \right\} d\lambda$$

$$= f(0)x(t) + \int_0^t x(s) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)e^{(t-s)/\lambda}}{\lambda^2} d\lambda \right\} ds.$$

Escrevemos essa expressão também na forma

$$(f(A)x)(t) = f(0)x(t) + \int_0^t F(t-s)x(s)ds,$$

onde

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)e^{z/\lambda}}{\lambda^2} d\lambda.$$

Para mais detalhes sobre as propriedades de $F$, veja [17, Example 1 - Section V.8].

**Exercício 3.4.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $B \in \mathcal{L}(X)$ com $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ e $A = I + B$. Mostre que se $1 > r > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$, $\alpha > 0$ e $\gamma(t) = 1 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, então

$$A^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+n-1}{n} (-1)^n B^n,$$

onde

$$\binom{\alpha+n-1}{n} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}.$$

Mostre que $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, e estude também as potências positivas $A^\alpha$ de $A$.

Veja que do exercício anterior, em particular, segue que

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B^n \quad \text{e} \quad A^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n B^n.$$

Um dos usos do cálculo operacional é o cálculo da inversa de determinados operadores.

**Teorema 3.1.6.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. Se $f \in \mathcal{U}(A)$ é tal que $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, então $f(A)$ é injetor e sobrejetor em $X$ com inversa $g(A)$ onde $g$ é qualquer função de $\mathcal{U}(A)$ que coincide com $\frac{1}{f}$ em um aberto que contenha $\sigma(A)$.*

*Demonstração.* Se $g = \frac{1}{f}$ em um aberto que contém $\sigma(A)$ então $g \in \mathcal{U}(A)$ e $f(\lambda)g(\lambda) = 1$ em um aberto que contém $\sigma(A)$. Logo

$$f(A)g(A) = g(A)f(A) = (fg)(A) = I.$$

$\square$

**Exercício 3.5.** Mostre que se $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ e $A \in \mathcal{L}(X)$, então $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$, e a série converge em $\mathcal{L}(X)$.

**Exercício 3.6.** Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\Omega$ um aberto de $\mathbb{C}$ contendo $\sigma(A)$. Assuma que $\{f_n\} \subset \mathcal{U}(A)$ é tal que $\Omega \subset D(f_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $f \in \mathcal{U}(A)$ é tal que $\Omega \subset D(f)$. Se $\{f_n\}$ converge para $f$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\Omega$, então $\{f_n(A)\}$ converge para $f(A)$ em $\mathcal{L}(X)$.

**Exercício 3.7.** Suponha que $P \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $P^2 = P$. Encontre uma expressão explícita para $(\lambda - P)^{-1}$ com $\lambda(\lambda - 1) \neq 0$. Use isso para obter uma expressão simples para $f(P)$ quando $f \in \mathcal{U}(P)$.

**Exercício 3.8.** Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $f \in \mathcal{U}(A)$, então $f \in \mathcal{U}(A^*)$ e $f(A^*) = [f(A)]^*$.

**Exercício 3.9.** Denote por $\mathcal{V}$ o conjuntos das funções que são definidas e analíticas no disco unitário $|z| < 1$ de $\mathbb{C}$, e para $h \in \mathcal{V}$ e $0 \leqslant r < 1$ defina

$$\mathfrak{M}_2[h; r] = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2},$$

e

$$H^2 = \{h \in \mathcal{V} \colon \sup_{0 \leqslant r < 1} \mathfrak{M}_2[h; r] < \infty\}.$$

Então $H^2$ é um espaço vetorial, e a função

$$\|h\| = \sup_{0 \leqslant r < 1} \mathfrak{M}_2[h, r]$$

define uma norma em $H^2$. Defina $(Ah)(z) = zh(z)$ para cada $h \in H^2$ e $|z| < 1$. Mostre que $A \in \mathcal{L}(H^2)$, $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| \leqslant 1\}$ e para $f \in \mathcal{U}(A)$ temos $(f(A)h)(z) = f(z)h(z)$ para cada $|z| < 1$.

## 3.2 Operadores Fechados

Seja $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado com resolvente $\rho(A)$ não-vazio. Denotaremos por $\mathcal{U}_\infty(A)$ o conjunto das funções analíticas $f \colon D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisfazem:

(a) $D(f)$ é um aberto que contém $\sigma(A)$;

(b) $D(f)$ contém, para algum $r > 0$, o anel fechado $\overline{A(0, r, \infty)}$;

(c) $f$ é **limitada no infinito**, isto é, existem $M \geqslant 0$ e $R > r$ tais que $|f(\lambda)| \leqslant M$ para $|\lambda| \geqslant R$.

**Exercício 3.10.** Nas condições acima, mostre que existe o limite

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} f(\lambda).$$

**Dica:** Da limitação de $f$ no infinito, mostre que $\lambda = 0$ é uma singularidade removível da função analítica $g \colon B^{\mathbb{C}}_{1/R}(0) \to \mathbb{C}$ dada por $g(\lambda) = f(1/\lambda)$.

Assim, para $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$, denotaremos

$$f(\infty) = \lim_{|\lambda| \to \infty} f(\lambda). \tag{3.4}$$

Podemos aqui também definir em $\mathcal{U}_\infty(A)$ a relação de equivalência $\sim$ dada por: $f \sim g$ se $f$ e $g$ são iguais em um aberto que contém $\sigma(A)$ e também no exterior de uma bola.

Da Proposição 3.1.3, sabemos que existe um domínio de Cauchy $D$ ilimitado com $\sigma(A) \cup \overline{A(0,r,\infty)} \subset D$ e $\overline{D} \subset D(f)$. Para $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e $D$ um domínio de Cauchy ilimitado com

$$\sigma(A) \cup \overline{A(0,r,\infty)} \subset D \subset \overline{D} \subset D(f),$$

$R > r$ e $\xi \in D$ um ponto interior à curva $\gamma_R(t) = Re^{2\pi i t}$ com $t \in [0,1]$, temos

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda, \tag{3.5}$$

pois $+\partial D \cup \gamma_R$ forma uma curva fechada retificável, com $f$ analítica em seu interior, e $\xi$ um ponto de $D$ em seu interior. Fazendo $R \to \infty$ em (3.5) e usando (3.4) obtemos

$$f(\xi) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda \tag{3.6}$$

para todo $\xi$ em $D$. Com um raciocínio parecido com o de cima, se $\xi$ é exterior a $D$, então

$$0 = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda, \tag{3.7}$$

pois a função $\lambda \mapsto \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi}$ é analítica em $+\partial D \cup \gamma_R$ e em seu interior.

Quando $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$, definimos

$$f(A) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \tag{3.8}$$

onde $D$ é um domínio de Cauchy ilimitado tal que $\sigma(A) \cup \overline{A(0,r,\infty)} \subset D \subset \overline{D} \subset D(f)$. Note que $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ mesmo que $A$ não seja um operador limitado.

**Exercício 3.11.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não-vazio.

(a) Mostre que se $f, g \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e $f \sim g$, então $f(A) = g(A)$.

(b) Mostre que se $f(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, então $f(A) = I$.

Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não-vazio. Se $f, g \in \mathcal{U}_\infty(A)$, mostremos que $f(A)g(A) = (fg)(A)$.

Como antes, sejam $D_1$ e $D_2$ domínios de Cauchy tais que $\sigma(A) \cup \overline{A(0,r,\infty)} \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D_2 \subset \overline{D_2} \subset D(f) \cap D(g)$. Com esta notação temos

$$f(A) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

e

$$g(A) = g(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu.$$

Usando (3.6) e (3.7), se $\lambda \in \partial D_1$ e $\mu \in \partial D_2$ temos

$$g(\lambda) = g(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \quad \text{e} \quad 0 = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
f(A)g(A) = {} & f(\infty)g(\infty)I \\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{+\partial D_1}\int_{+\partial D_2} f(\lambda)g(\mu)\,(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}\, d\mu\, d\lambda \\
& + \frac{g(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)\,(\lambda - A)^{-1} d\lambda + \frac{f(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} g(\mu)\,(\mu - A)^{-1} d\mu \\
= {} & f(\infty)g(\infty)I + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{+\partial D_1}\int_{+\partial D_2} f(\lambda)g(\mu)\, \frac{(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}}{\mu - \lambda}\, d\mu\, d\lambda \\
& + \frac{g(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)\,(\lambda - A)^{-1} d\lambda + \frac{f(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} g(\mu)\,(\mu - A)^{-1} d\mu \\
= {} & f(\infty)g(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu\right) d\lambda \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda\right) d\mu \\
& + \frac{g(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)\,(\lambda - A)^{-1} d\lambda + \frac{f(\infty)}{2\pi i}\int_{+\partial D_2} g(\mu)\,(\mu - A)^{-1} d\mu \\
= {} & f(\infty)g(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda = (fg)(A).
\end{aligned}$$

Como no Teorema 3.1.6, vale o seguinte resultado:

**Teorema 3.2.1.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado com resolvente não-vazio. Se* $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$ *é tal que* $f(\lambda) \neq 0$ *para todo* $\lambda \in \sigma(A) \cup \{\infty\}$ *então* $f(A)$ *é injetor e sobrejetor sobre* $X$*, com inversa* $g(A)$*, onde* $g$ *é qualquer função de* $\mathcal{U}_\infty(A)$ *com* $g \sim \frac{1}{f}$*.*

**Exercício 3.12.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que se $f \in \mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}_\infty(A)$ então (3.3) e (3.8) dão origem ao mesmo operador $f(A)$.

**Exercício 3.13.** Sejam $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e $\alpha \in \rho(A)$. Mostre que para cada $n \geqslant 1$, a função $f(\lambda) = (\alpha - \lambda)^{-n}$ está em $\mathcal{U}_\infty(A)$ e que

$$f(A) = (\alpha - A)^{-n}.$$

**Dica:** Para $n = 1$, use (3.8) e a identidade do resolvente.

CAPÍTULO 4

# Conjuntos Espectrais e o Teorema da Aplicação Espectral

## 4.1 Conjuntos Espectrais

**Definição 4.1.1** (Resolvente e Espectro Estendidos). Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente $\rho(A)$ não-vazio. Definimos o **espectro estendido** $\sigma_e(A)$ e o **resolvente estendido** $\rho_e(A)$ de $A$ por:

(i) se $A \in \mathcal{L}(X)$:
$$\sigma_e(A) = \sigma(A) \quad \text{e} \quad \rho_e(A) = \rho(A) \cup \{\infty\}$$

(ii) caso contrário:
$$\sigma_e(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\} \quad \text{e} \quad \rho_e(A) = \rho(A).$$

Uma justificativa para a definição acima é dada pelo seguinte resultado (veja [10, Theorem III.6.13]).

**Teorema 4.1.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Se $\rho(A)$ contém o exterior de um disco, vale uma das seguintes alternativas:*

(i) $A \in \mathcal{L}(X)$, $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ *é holomorfa no infinito e* $\lim_{|\lambda| \to \infty} (\lambda - A)^{-1} = 0$;

(ii) $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ *tem uma singularidade essencial no infinito.*

*Demonstração.* Assuma que $\infty$ não é uma singularidade essencial de $(\lambda - A)^{-1}$. Como $(\lambda - A)^{-1}$ não é identicamente nula, temos uma expansão para $(\lambda - A)^{-1}$ da forma
$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{k} \lambda^n A_n,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, com $A_n \in \mathcal{L}(X)$ para todo $n \leqslant k$ e $A_k \neq 0$, para $|\lambda|$ suficientemente grande. Como $A(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} - I$, temos

$$A(\lambda - A)^{-1} = -I + \sum_{n=-\infty}^{k} \lambda^{n+1} A_n.$$

Mostremos primeiramente que $k \leqslant -1$. Se $k \geqslant 0$, deveríamos ter

$$\lambda^{-k-1}(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{k} \lambda^{n-k-1} A_n \to 0,$$

e

$$A(\lambda^{-k-1}(\lambda - A)^{-1}) = \lambda^{-k-1} A(\lambda - A)^{-1} = -\lambda^{-k-1} + \sum_{n=-\infty}^{k} \lambda^{n-k} A_n \to A_k,$$

quando $\lambda \to \infty$. Como $A$ é fechado obtemos $A_k = 0$, o que nos dá uma contradição. Assim $k \leqslant -1$ e portanto

$$(\lambda - A)^{-1} \to 0 \quad \text{ e } \quad A(\lambda - A)^{-1} \to -1 + (\lim \lambda^{k+1}) A_k.$$

Novamente, o fato de $A$ ser fechado nos dá $-1 + (\lim \lambda^{k+1}) A_k = 0$, o que só é possível se $k = -1$ e $A_{-1} = I$. Finalmente, para cada $x \in X$ obtemos

$$\lambda(\lambda - A)^{-1} x = \sum_{n=\infty}^{-1} \lambda^{n+1} A_n x \to A_{-1} x = x,$$

e também

$$A(\lambda(\lambda - A)^{-1} x) = \lambda A(\lambda - A)^{-1} x = -\lambda x + \sum_{n=-\infty}^{-1} \lambda^{n+2} A_n x = \sum_{n=-\infty}^{-2} \lambda^{n+2} A_n x \to A_{-2} x,$$

quando $\lambda \to \infty$. Novamente, do fato de $A$ ser fechado, obtemos $x \in D(A)$ e $Ax = A_{-2} x$. Portanto $A = A_{-2} \in \mathcal{L}(X)$, e o restante da demonstração segue. □

O seguinte resultado representa um caso especial do *Teorema da Aplicação Espectral* que veremos mais adiante.

**Teorema 4.1.3.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e injetor. Então $\sigma_e(A) \ni \lambda \mapsto \lambda^{-1} \in \sigma_e(A^{-1})$ é bijetora.*

*Demonstração.* Considere $\lambda \in \rho(A)$ com $\lambda \neq 0$, e defina

$$S = A(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} - I \in \mathcal{L}(X).$$

Para cada $x \in X$, temos $Sx = A(\lambda - A)^{-1} x$ e $A^{-1} S x = (\lambda - A)^{-1} x = \lambda^{-1} x + \lambda^{-1} S x$. Portanto

$$-\lambda(\lambda^{-1} - A^{-1}) S x = x,$$

o que mostra que $(\lambda^{-1} - A^{-1})$ é sobrejetor. Claramente $(\lambda^{-1} - A^{-1})$ é injetor, pois se $(\lambda^{-1} - A^{-1})x = 0$ então $(\lambda - A)x = 0$, o que nos dá $x = 0$. Além disso, obtemos

$$(\lambda^{-1} - A^{-1})^{-1} = -\lambda S \in \mathcal{L}(X),$$

e portanto $\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$.

Se $\lambda = 0 \in \rho(A)$ então $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, logo $\infty \in \rho_e(A^{-1})$ por definição. Se $\infty \in \rho_e(A)$ então $A \in \mathcal{L}(X)$ e portanto $0 \in \rho(A^{-1})$. Portanto a aplicação $\rho_e(A) \ni \lambda \mapsto \lambda^{-1} \in \rho_e(A^{-1})$ é uma aplicação injetora. Intercambiando $A$ e $A^{-1}$, o resultado segue. □

No que segue $X$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador linear fechado.

**Definição 4.1.4** (Conjuntos Espectrais). Um subconjunto $\sigma$ de $\sigma_e(A)$ é chamado de **conjunto espectral** para $A$ se ele é aberto e fechado na topologia de $\sigma_e(A)$ induzida do plano complexo estendido.

Claramente um conjunto $\sigma$ é um conjunto espectral para $A$ se, e somente se, ambos $\sigma$ e $\sigma_e(A) \setminus \sigma$ são fechados no plano complexo estendido. Um ponto isolado de $\sigma_e(A)$ é um conjunto espectral. Se $\sigma$ é um conjunto espectral para $A$ e um dentre $\sigma$ e $\sigma_e(A) \setminus \sigma$ contém $\infty$, então o outro é limitado como um subconjunto do plano complexo.

**Exercício 4.1.** Mostre que $\sigma$ é um conjunto espectral limitado (em $\mathbb{C}$) então existe um domínio de Cauchy $D$ limitado com $\partial D \subset \rho(A)$ tal que $\sigma = \sigma_e(A) \cap D$.

Se considerarmos um conjunto espectral $\sigma$, temos as seguintes possibilidades:

(E1) $\sigma = \varnothing$, e nesse caso $\sigma_e(A) \setminus \sigma = \sigma_e(A)$;

(E2) $\sigma = \sigma_e(A)$, e nesse caso $\sigma_e(A) \setminus \sigma = \varnothing$;

(E3) $\varnothing \neq \sigma \subsetneq \sigma_e(A)$, e nesse caso, um dentre $\sigma$ e $\sigma_e(A) \setminus \sigma$ é limitado no plano complexo (portanto, compacto). Assim existem abertos $U_1, U_2$ com $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \varnothing$ com $\sigma \subset U_1$ e $\sigma_e(A) \setminus \sigma \subset U_2$ (um deles limitado e outro ilimitado e contendo um anel fechado $\overline{A(0, r, \infty)}$ para algum $r > 0$, de onde segue que $\partial U_1$ e $\partial U_2$ são ambas limitadas).

Assim, podemos definir respectivamente:

(F1) $D(f_\sigma) = \mathbb{C}$ e $f_\sigma(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ quando $\sigma = \varnothing$;

(F2) $D(f_\sigma) = \mathbb{C}$ e $f_\sigma(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, quando $\sigma = \sigma_e(A)$;

(F3) $D(f_\sigma) = U_1 \cup U_2$, e $f_\sigma(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in U_1$ e $f_\sigma(\lambda) = 0$ para $\lambda \in U_2$.

Note que, em qualquer um dos casos, temos $f_\sigma \in \mathcal{U}_\infty(A)$. Definimos então:

$$P_\sigma(A) = f_\sigma(A) \in \mathcal{L}(X), \tag{4.1}$$

e quando não houver confusão com o operador $A$, usaremos a notação $P_\sigma$ ao invés de $P_\sigma(A)$.

Como $f_\sigma^2 = f_\sigma$, temos claramente $P_\sigma^2 = P_\sigma$. Portanto $P_\sigma$ é uma projeção em $\mathcal{L}(X)$. Além disso, para dois conjuntos espectrais quaisquer $\sigma$ e $\tau$ de $A$ são válidas as seguintes propriedades:

(a) $P_\sigma = 0$ se $\sigma = \varnothing$, já que $f_\sigma \equiv 0$;

(b) $P_\sigma = I$ se $\sigma = \sigma_e(A)$, pois $f_\sigma \equiv 1$;

(c) $P_{\sigma\cap\tau} = P_\sigma P_\tau = P_\tau P_\sigma$, uma vez que $f_{\sigma\cap\tau} = f_\sigma f_\tau = f_\tau f_\sigma$;

(d) $P_{\sigma\cup\tau} = P_\sigma + P_\tau - P_{\sigma\cap\tau} = P_\sigma + P_\tau - P_\sigma P_\tau$, pois $f_{\sigma\cup\tau} = f_\sigma + f_\tau - f_\sigma f_\tau$.

Em particular, para um conjunto espectral $\sigma$ e $\sigma' = \sigma_e(A)\setminus\sigma$, das propriedades acima obtemos

$$\begin{aligned} P_\sigma P_{\sigma'} &= P_{\sigma'} P_\sigma = P_{\sigma\cap\sigma'} = 0, \\ P_\sigma + P_{\sigma'} &= P_{\sigma\cup\sigma'} + P_{\sigma\cap\sigma'} = I + 0 = I, \end{aligned}$$

e definindo

$$X_\sigma = P_\sigma(X) = \operatorname{Im}(P_\sigma) \quad \text{e} \quad X_{\sigma'} = P_{\sigma'}(X) = \operatorname{Im}(P_{\sigma'}) = \operatorname{Im}(I - P_\sigma)$$

temos

$$X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}. \tag{4.2}$$

Se $\sigma$ é um conjunto espectral limitado de $A$, segue do Exercício 4.1 que existe um domínio de Cauchy limitado $D$ tal que $\partial D \subset \rho(A)$, $\sigma \subset D$ e $\sigma' \cap D = \varnothing$, com $\overline{D} \subset U_1$, onde $U_1$ é dado em (F3). Então

$$P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \tag{4.3}$$

**Exercício 4.2.** Mostre que $P_\sigma(X) \subset D(A)$ e que

$$AP_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \lambda(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

**Dica:** Veja o Exercício 2.8.

**Exercício 4.3.** Mostre que para $\xi \in \rho(A)$ temos $(\xi - A)^{-1}P_\sigma = P_\sigma(\xi - A)^{-1}$, e conclua que $P_\sigma$ comuta com $A$.

**Dica:** Para mostrar que $(\xi - A)^{-1}P_\sigma = P_\sigma(\xi - A)^{-1}$, veja o Teorema 1.3.6, e para concluir que $P_\sigma$ comuta com $A$, veja o Exercício 2.10.

Estes exercícios nos dizem que para todo $x \in X_\sigma = P_\sigma(X)$ temos $x \in D(A)$ e $Ax = AP_\sigma x = P_\sigma Ax \in X_\sigma$, o que nos permite definir $A_\sigma \colon X_\sigma \to X_\sigma$ por

$$A_\sigma x = Ax \quad \text{para todo } x \in X_\sigma. \tag{4.4}$$

Para $x \in D(A) \cap X_{\sigma'} = D(A) \cap \operatorname{Im}(I - P_\sigma)$ temos

$$Ax = A(I - P_\sigma)x = Ax - AP_\sigma x = Ax - P_\sigma Ax = (I - P_\sigma)Ax \in \operatorname{Im}(I - P_\sigma),$$

e portanto podemos definir

$$A_{\sigma'} x = Ax \quad \text{para todo } x \in D(A) \cap X_{\sigma'}. \tag{4.5}$$

Assim para $x \in D(A)$ temos $x = x_\sigma + x_{\sigma'}$ com $x_\sigma \in X_\sigma$ e $x_{\sigma'} \in D(A) \cap X_{\sigma'}$ e

$$Ax = A(x_\sigma + x_{\sigma'}) = Ax_\sigma + Ax_{\sigma'} = A_\sigma x_\sigma + A_{\sigma'} x_{\sigma'},$$

isto é, obtemos uma decomposição

$$A = A_\sigma + A_{\sigma'}$$

relativa à decomposição (4.2).

Note que do Exercício 4.2 segue que

$$A_\sigma = AP_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \lambda(\lambda - A)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(X_\sigma).$$

Além disso, vemos que $A_{\sigma'}$ é fechado pois $A$ é fechado e $I - P_\sigma$ está em $\mathcal{L}(X)$.

Agora, veja que para todos $x \in D(A_\sigma) = X_\sigma$ e $y \in D(A_{\sigma'}) = D(A) \cap X_{\sigma'}$ temos

$$(\lambda - A)x = (\lambda - A_\sigma)x \quad \text{e} \quad (\lambda - A)y = (\lambda - A_{\sigma'})y.$$

Assim se $\lambda \in \rho(A)$ vemos que $\lambda - A_\sigma$ é inversível ( e $(\lambda - A_\sigma)^{-1}$ é igual a $(\lambda - A)^{-1} P_\sigma$), o que mostra que $\lambda \in \rho(A_\sigma)$. Analogamente $\lambda \in \rho(A_{\sigma'})$.

Com essas considerações, temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.5.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A \colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Suponha que $\sigma$ é um conjunto espectral não-vazio e limitado de $A$ e seja $\sigma' = \sigma_e(A) \setminus \sigma$. Então temos a decomposição de $X$ dada em (4.2) e a decomposição de $A$ dada em (4.4)-(4.5), com $A_\sigma \in \mathcal{L}(X_\sigma)$. Além disso, temos*

$$\sigma(A_\sigma) = \sigma \quad \text{e} \quad \sigma(A_{\sigma'}) = \sigma'. \tag{4.6}$$

*Demonstração.* Só nos resta mostrar (4.6). Já sabemos que $\rho(A) \subset \rho(A_\sigma) \cap \rho(A_{\sigma'})$, o que mostra que $\sigma(A_\sigma) \cup \sigma(A_{\sigma'}) \subset \sigma(A)$. Agora tome $\xi \in \rho(A_\sigma) \cap \rho(A_{\sigma'})$ e defina o operador $T \in \mathcal{L}(X)$ por

$$T = (\xi - A_\sigma)^{-1} P_\sigma + (\xi - A_{\sigma'})^{-1}(I - P_\sigma).$$

Claramente $T$ é a inversa de $\xi - A$, o que mostra que $\xi \in \rho(A)$. Assim $\rho(A_\sigma) \cap \rho(A_{\sigma'}) \subset \rho(A)$, e logo $\sigma(A) \subset \sigma(A_\sigma) \cup \sigma(A_{\sigma'})$. Concluímos então que

$$\sigma(A) = \sigma(A_\sigma) \cup \sigma(A_{\sigma'}).$$

Afirmamos também que $\sigma(A_\sigma) \subset \sigma$. Como antes, $D$ é um domínio de Cauchy limitado com $\partial D \subset \rho(A)$, $\sigma \subset D$ e $\sigma' \cap D = \varnothing$, com $\overline{D} \subset U_1$, onde $U_1$ é dado em (F3). Assim para cada $\xi \in \rho(A)$ que não está em $\partial D$ temos

$$\begin{aligned}(\xi - A_\sigma)^{-1} = (\xi - A)^{-1} P_\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} (\xi - A)^{-1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{(\xi - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\lambda - \xi} d\lambda.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Se além disso $\xi \notin D$, temos

$$(\xi - A_\sigma)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda - \xi} d\lambda.$$

Como o lado direito da expressão acima é analítico no exterior de $\overline{D}$, segue que $(\xi - A_\sigma)^{-1}$ tem uma continuação analítica ao exterior de $\overline{D}$. Desta forma, pelo Corolário 2.1.14, segue que $\rho(A_\sigma)$ contém o exterior de $D$. Dessa forma $\sigma(A_\sigma) \subset D \cap \sigma(A) = \sigma$.

Para $\xi \in D$, (4.7) nos dá

$$(\xi - A)^{-1} P_\sigma = (\xi - A)^{-1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda - \xi} d\lambda,$$

ou seja

$$(\xi - A_{\sigma'})^{-1} = (\xi - A)^{-1}(I - P_\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda - \xi} d\lambda. \tag{4.8}$$

Como antes, isso mostra que $(\xi - A_{\sigma'})^{-1}$ tem uma continuação analítica em $D$ e, portanto, $D \subset \rho(A'_\sigma)$. Logo $\sigma(A_{\sigma'}) \subset \mathbb{C} \setminus D$, e portanto $\sigma(A_{\sigma'}) \subset \sigma'$.

Logo $\sigma(A_\sigma) = \sigma$ e $\sigma(A_{\sigma'}) = \sigma'$, e a prova está completa. □

**Exercício 4.4.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $A \colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente compacto e $\sigma$ um conjunto espectral limitado de $A$. Mostre que $P_\sigma$ (a projeção espectral associada à $\sigma$) é compacta (e consequentemente tem imagem com dimensão finita).

Os resultados dessa seção podem ser refinados quando $\sigma = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_k$, onde $\sigma_p$ é fechado para cada $p = 1, \cdots, k$ e $\sigma_p \cap \sigma_q = \varnothing$ quando $p \neq q$. Nesse caso, podemos escolher uma coleção finita de curvas fechadas simples retificáveis $\gamma_p$, $p = 1, \cdots, k$ tal que nenhuma delas se intersecte e nem esteja no interior de outra diferente, seus traços estejam inteiramente contidos em $\rho(A)$, $\sigma_p$ esteja no interior de $\gamma_p$ para

$p = 1, \cdots, k$, e $\sigma'$ esteja do lado de fora de todas as curvas $\gamma_p$ para $p = 1, \cdots, k$. Definindo então

$$P_p = P_{\sigma_p} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

temos as seguintes propriedades:

(a) $P_p P_q = \delta_{pq} P_p$ para todos $p, q = 1, \cdots, k$, onde $\delta_{pq} = 1$ se $p = q$ e $\delta_{pq} = 0$ caso contrário;

(b) $A$ comuta com cada $P_p$;

(c) $P_{\sigma'} = I - P_1 - \cdots - P_k$;

Assim, para $X_p = P_p(X)$ para $p = 1, \cdots, k$ e $X_{\sigma'} = P_{\sigma'}$, obtemos uma decomposição

$$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_k \oplus X_{\sigma'}$$

de $X$, e $A$ pode ser decomposto de acordo com essa decomposição de $X$. A parte $A_p$ de $A$ em $X_p$ está em $\mathcal{L}(X_p)$ e tem espectro $\sigma(A_p) = \sigma_p$ para $p = 1, \cdots, k$. A parte $A_{\sigma'}$ de $A$ em $X_{\sigma'}$ é fechada e tem espectro $\sigma(A_{\sigma'}) = \sigma'$.

## 4.2 Pontos Isolados do Espectro

Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado. Suponha que $\sigma(A)$ contém um ponto isolado $\lambda \in \mathbb{C}$. Claramente $\sigma = \{\lambda\}$ e $\sigma' = \sigma_e(A) \setminus \sigma$ são conjuntos espectrais, com $\sigma$ limitado em $\mathbb{C}$.

Com as notações da seção anterior, segue do Teorema 4.1.5 que o operador $A_\sigma \in \mathcal{L}(X_\sigma)$ tem espectro $\sigma(A_\sigma) = \{\lambda\}$, o que implica que $\sigma(\lambda - A_\sigma) = \{0\}$ (do Teorema 2.2.5). Assim do Teorema 2.2.3 segue que

$$(\xi - A_\sigma)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\xi - \lambda)^{-n-1} (\lambda - A_\sigma)^n,$$

para todo $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$, pois $r_\sigma(\lambda - A_\sigma) = 0$. Temos $(\lambda - A_\sigma)P_\sigma = (\lambda - A)P_\sigma$, e para $\xi \in \rho(A)$ temos $(\xi - A)^{-1}P_\sigma = (\xi - A_\sigma)^{-1}P_\sigma$. Logo para $\xi \in \rho(A)$ segue que

$$(\xi - A)^{-1}P_\sigma = \frac{P_\sigma}{\xi - \lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \lambda)^{-n-1}(-1)^n D^n.$$

onde $D$ é definido por

$$D = (\lambda - A)P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - \xi)(\xi - A)^{-1} d\xi,$$

para $\gamma(t) = \lambda + re^{2\pi i t}$ com $t \in [0,1]$ e $r > 0$ tal que $\overline{B}_r^{\mathbb{C}}(\lambda) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$. Note que D está em $\mathcal{L}(X)$ e é quasi-nilpotente, isto é, $\sigma(D) = \{0\}$. Além disso, veja que

$$AP_\sigma = \lambda P_\sigma - D.$$

Por outro lado, como $\lambda \in \rho(A_{\sigma'})$, $(\xi - A_{\sigma'})^{-1}$ é analítica em uma vizinhança (de raio $r > 0$) de $\lambda$ e assim

$$(\xi - A_{\sigma'})^{-1}P_{\sigma'} = (\xi - A)^{-1}P_{\sigma'} = \sum_{n=0}^{\infty}(\xi-\lambda)^n(-1)^n S^{n+1},$$

onde[1]

$$S = (\lambda - A_{\sigma'})^{-1}P_{\sigma'} = \lim_{\zeta\to\lambda}(\zeta - A)^{-1}P_{\sigma'} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\xi-A)^{-1}}{\xi-\lambda}d\xi,$$

onde em $(*)$ usamos (4.8) e depois calculamos o limite quando $\zeta \to \lambda$.

Segue que, se $\xi \in B_r^{\mathbb{C}}(\lambda) \setminus \{\lambda\}$,

$$(\xi - A)^{-1} = \frac{P_\sigma}{\xi - \lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\xi-\lambda)^{-n-1}D^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\xi-\lambda)^n S^{n+1}$$

é a serie de Laurent para $(\xi - A)^{-1}$ em torno da singularidade isolada $\lambda$. Os operadores S e D satisfazem $D = DP_\sigma = P_\sigma D$, $SA \subset AS \in \mathcal{L}(X)$, $(\lambda - A)S = P_{\sigma'}$ e $SP_\sigma = P_\sigma S = 0$.

**Observação 4.2.1.**

(i) Se $\lambda$ é um polo de ordem $m \geqslant 1$, então $D^n = (\lambda - A)^n P_\sigma = 0$ para todo $n \geqslant m$, isto é, D é nilpotente. Como $P_\sigma \neq 0$, devemos ter $\lambda - A$ não injetora, e portanto $\lambda$ é um autovalor de A.

(ii) Se $X_\sigma = P_\sigma(X)$ tem dimensão finita, então D é nilpotente (pois é quasi-nilpotente num espaço de dimensão finita, veja [10, Problem I-5.6]). Portanto $\lambda$ é um polo de ordem finita de $\rho(A) \ni \xi \mapsto (\xi - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, e portanto um autovalor de A. Disto segue que se A tem resolvente compacto então todos os pontos isolados do espectro são autovalores de A (basta ver que $P_\sigma$ será compacta e portanto $X_\sigma$ terá dimensão finita).

(iii) Se $\sigma = \{\lambda\}$ é um conjunto espectral de A então $\lambda$ pode ser um autovalor de A ou uma singularidade essencial da função $\rho(A) \ni \xi \mapsto (\xi - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. No segundo caso, se $\lambda$ é também um autovalor de A então D não é nilpotente e $\dim X_\sigma = \infty$ (veja o exemplo abaixo).

[1] Note que $(\lambda - A)^{-1}$ não existe.

**Exemplo 4.2.2.** Sejam $X = \ell^2(\mathbb{C})$ e $A \in \mathcal{L}(X)$ o operador definido por

$$A\{x_1, x_2, x_3, \cdots\} = \left\{\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \cdots\right\}.$$

Então 0 é um autovalor de $A$, pois $A\{1, 0, \cdots\} = \{0, 0, \cdots\}$. Além disso $A$ é quasi-nilpotente, isto é, $\sigma(A) = \{0\}$ (sabemos assim que $P_{\{0\}} = I$ pois $\sigma(A) = \{0\}$, mas calcule usando (4.3)). Mas $A$ não é nilpotente, pois

$$A^n \neq 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Note que $D = -A$ e, portanto, $\lambda = 0$ é uma singularidade essencial de $\rho(A) \ni \xi \mapsto (\xi - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Podemos estender esse raciocício para $k$ pontos isolados de $\sigma(A)$, usando a extensão apresentada no final da seção anterior. Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ são pontos isolados de $\sigma(A)$, $\sigma_j = \{\lambda_j\}$ para $j = 1, \cdots, k$ e $\sigma_0 = \sigma_e(A) \setminus \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$, temos

$$(\xi - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{P_{\sigma_j}}{\xi - \lambda_j} + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \lambda_j)^{-n-1}(-1)^n D_j^n\right] + (\xi - A_{\sigma_0})^{-1} P_{\sigma_0},$$

onde $P_{\sigma_i} P_{\sigma_j} = \delta_{ij} P_{\sigma_i}$, $P_{\sigma_j} D_j = D_j P_{\sigma_j} = D_j$, $(\lambda_j - A)P_{\sigma_j} = D_j$, $(\xi - A_{\sigma_0})^{-1} P_{\sigma_0}$ é analítica em um aberto que contém $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ e $(\xi - A_{\sigma_0})^{-1} P_{\sigma_0} = \lim_{\zeta \to \xi} (\zeta - A)^{-1} P_{\sigma_0}$. Além disso,

$$AP = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_{\sigma_j} - D_j, \tag{4.9}$$

onde $P = P_{\sigma_1} + \cdots + P_{\sigma_k}$ e os operadores $D_j$ são quasi-nilpotentes com imagem em $X_{\sigma_j} = P_{\sigma_j}(X)$.

**Exercício 4.5.** Complete os detalhes para encontrar a extensão apresentada acima.

## 4.3 O Teorema da Aplicação Espectral

Nesta seção, buscamos estender o Teorema 2.2.5 para contemplar operadores fechados $A \colon D(A) \subset X \to X$ e funções $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$. Suponhamos $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$. Lembremos da seguinte definição:

**Definição 4.3.1.** Dizemos que **$\infty$ é um zero de ordem $m$ de $f$** se $f(\infty) = 0$ e 0 é um zero de ordem $m$ da função $g(\lambda) = f(1/\lambda)$, isto é, se $g$ é uma função analítica numa vizinhança de 0, e podemos escrever $g(\lambda) = \lambda^m h(\lambda)$, onde $h$ é uma função analítica numa vizinhança de 0 com $h(0) \neq 0$.

Assim $\infty$ é um zero de ordem $m$ de $f$ se existe uma função[1] $k$ analítica num anel $A(0, r, \infty)$ tal que $k(\infty) = \lim\limits_{|\lambda|\to\infty} k(\lambda)$ existe e é não-nulo, com

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^m} k(\lambda) \quad \text{para } \lambda \in A(0, r, \infty),$$

ou equivalentemente, se $\lambda^m f(\lambda)$ é uma função analítica num anel $A(0, r, \infty)$ tal que

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^m f(\lambda)$$

existe e é não nulo.

**Exercício 4.6.** Mostre que se $\infty$ é um zero de ordem $m$ de $f$ então para cada $\gamma < m$ temos

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^\gamma f(\lambda) = 0.$$

**Lema 4.3.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não-vazio. Suponha que $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$, $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$ e que $\infty$ seja um zero de ordem $m$ de $f$. Então $f(A)$ é injetor, $\mathrm{Im}(f(A)) = D(A^m)$ e para cada $x \in D(A^m)$ temos*

$$f(A)^{-1}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{(\alpha - A)^{m+1}(\lambda - A)^{-1}x}{f(\lambda)(\alpha - \lambda)^{m+1}}\, d\lambda, \tag{4.10}$$

*onde $\alpha \in \rho(A)$ e $D$ é um domínio de Cauchy ilimitado tal que $\sigma(A) \subset D$, $\overline{D} \subset D(f)$, $\alpha \notin \overline{D}$ e $f(\lambda) \neq 0$ se $\lambda \in \overline{D}$.*

*Demonstração.* Seja $\alpha \in \rho(A)$ e defina $g(\lambda) = (\alpha - \lambda)^m f(\lambda)$. Então $g \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e $g$ não tem zeros[2] em $\sigma_e(A)$. Escolha o domínio de Cauchy ilimitado $D$ de forma que $\sigma(A) \subset D$, $g(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \overline{D} \cup \{\infty\}$, $\alpha \notin \overline{D}$ e $\overline{D} \subset D(f)$. Segue do Teorema 3.2.1 que $g(A)$ tem inversa limitada dada por $(1/g)(A)$. Como

$$g(A)(\alpha - A)^{-m} = (\alpha - A)^{-m} g(A) = f(A), \tag{4.11}$$

obtemos $\mathrm{Im}(f(A)) = D(A^m)$, e para $x \in D(A^m)$ temos

$$f(A)^{-1}x = g(A)^{-1}(\alpha - A)^m x. \tag{4.12}$$

Para $x \in D(A^m)$, usando (4.12) e (3.5) obtemos

$$g(A)^{-1}(\alpha - A)^m x = \frac{1}{g(\infty)}(\alpha - A)^m x + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{(\lambda - A)^{-1}(\alpha - A)^m x}{f(\lambda)(\alpha - \lambda)^m} d\lambda$$

[1]Basta tomar $k(\lambda) = h(1/\lambda)$ num anel $A(0, r, \infty)$ com $r > 0$ suficientemente grande.

[2]Veja que, usando o Exercício 4.6, temos $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} g(\lambda) = (-1)^m \lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \lambda^m f(\lambda)$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{g(\infty)}(\alpha - A)^m x + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{(\alpha - A)^m(\lambda - A)^{-1}x}{f(\lambda)(\alpha-\lambda)^m}d\lambda \\
&= \frac{1}{g(\infty)}(\alpha - A)^m x + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{(\alpha - A)^{m+1}(\alpha - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}x}{f(\lambda)(\alpha-\lambda)^m}d\lambda \\
&= \frac{1}{g(\infty)}(\alpha - A)^m x + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{(\alpha - A)^{m+1}[(\lambda - A)^{-1} - (\alpha - A)^{-1}]x}{f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{m+1}}d\lambda, \\
&= \frac{1}{g(\infty)}(\alpha - A)^m x + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{(\alpha - A)^{m+1}(\lambda - A)^{-1}x}{f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{m+1}}d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{1}{f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{m+1}}d\lambda\ (\alpha - A)^m x.
\end{aligned}
$$

O resultado estará demonstrado se mostrarmos que

$$
\frac{1}{g(\infty)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{1}{f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{m+1}}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{1}{g(\lambda)(\alpha-\lambda)}d\lambda.
$$

Mas note que isso é a expressão (3.7) aplicada à $1/g$. □

**Lema 4.3.3.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$, $A\colon D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado com resolvente não-vazio, e suponha que* $\sigma(A)$ *seja limitado (assim* $\sigma = \sigma(A)$ *é um conjunto espectral não vazio). Então* $\mathrm{Im}(P_{\sigma(A)}) \subset D(A)$.

*Demonstração.* Como $\sigma(A)$ é limitado, temos

$$
P_{\sigma(A)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,
$$

onde $D$ é um domínio de Cauchy limitado com $\sigma(A) \subset D$. Segue diretamente do Exercício 2.8 que $\mathrm{Im}(P_{\sigma(A)}) \subset D(A)$. □

**Lema 4.3.4.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *e* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado com resolvente não-vazio. Suponha que* $\sigma(A)$ *seja limitado e que* $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$ *seja nula no exterior de um disco e não tenha zeros em* $\sigma(A)$*. Então* $\mathrm{Im}(f(A)) = \mathrm{Im}(P_{\sigma(A)})$ *e* $\ker(f(A)) = \ker(P_{\sigma(A)})$*. Em particular, se* $D(A) \subsetneq X$, $f(A)$ *não tem inversa em* $\mathcal{L}(X)$.

*Demonstração.* Se $D(A) \subsetneq X$ e $\sigma(A)$ é limitado, então $\sigma(A)$ é um conjunto espectral e $P_\sigma \neq I$, pois segue do Lema 4.3.3 que $\mathrm{Im}(P_\sigma) \subset D(A)$. Logo a segunda parte desse lema segue da primeira, pois $\mathrm{Im}(f(A)) = \mathrm{Im}(P_{\sigma(A)}) \subset D(A) \subsetneq X$.

Definimos $g$ e $h$ em $D(f)$ da seguinte forma

$$
g(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{na componente conexa ilimitada de } D(f), \\ 1 & \text{no restante de } D(f), \end{cases}
$$

e

$$
h(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{na componente conexa ilimitada de } D(f), \\ f(\lambda) & \text{no restante de } D(f). \end{cases}
$$

Como $f$ é nula no exterior de um disco (e portanto é nula na componente conexa ilimitada de $D(f)$), temos $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$ para todo $\lambda \in D(f)$. Além disso

(i) $P_{\sigma(A)} = g(A)$,

(ii) $h(A)$ tem inversa limitada pelo Teorema 3.2.1 (ou pelo Teorema 3.1.6, se $A \in \mathcal{L}(X)$), pois $h \neq 0$ em $\sigma_e(A)$.

Portanto
$$f(A) = P_{\sigma(A)}h(A) = h(A)P_{\sigma(A)},$$
e o resultado segue do fato que $h(A)$ é bijetor. □

**Lema 4.3.5.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{C}$, $A\colon D(A) \subset X \to X$ *um operador fechado com resolvente não-vazio e* $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$. *Então* $f(A)$ *tem inversa em* $\mathcal{L}(X)$ *se, e somente se,* $f$ *não tem zeros em* $\sigma_e(A)$.

*Demonstração.* Já vimos que se $f$ não tem zeros em $\sigma_e(A)$ então $f(A)$ tem inversa em $\mathcal{L}(X)$ (veja o Teorema 3.1.6 e o Teorema 3.2.1). Reciprocamente, assuma que $f(A)$ tem inversa limitada e que $f(\lambda) = 0$ para algum $\lambda \in \sigma(A)$. Sabemos que existe uma função $g$ analítica em $D(f)$ tal que $f(\xi) = (\lambda - \xi)g(\xi)$ para todo $\xi \in D(f)$ (tome $g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi-\lambda}$ para $\xi \neq \lambda$ e $g(\lambda) = f'(\lambda)$). Note que
$$\lim_{|\xi|\to\infty} g(\xi) = \lim_{|\xi|\to\infty} \frac{f(\xi)}{\lambda - \xi} = 0,$$
e portanto $g \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e $g(\infty) = 0$. Procedendo de maneira análoga como no início da demonstração do Lema 4.3.2 obtemos $\mathrm{Im}(g(A)) \subset D(A)$. Assim, se $D$ é um domínio de Cauchy com $\sigma(A) \subset D \subset \overline{D} \subset D(f)$ temos
$$\begin{aligned}
(\lambda - A)g(A) &= \frac{1}{2\pi i}(\lambda - A)\int_{+\partial D} g(\xi)(\xi - A)^{-1}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} g(\xi)(\lambda - A)(\xi - A)^{-1}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} g(\xi)(\lambda - \xi)(\xi - A)^{-1}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} g(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} f(\xi)(\xi - A)^{-1}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - \lambda}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} f(\xi)(\xi - A)^{-1}d\xi + f(\infty) = f(A),
\end{aligned}$$
onde utilizamos (3.6) e o fato que $f(\lambda) = 0$, além do Exercício 2.8 e contas análogas às apresentadas no final da demonstração do Lema 4.3.2. Além disso, $f(A)x = g(A)(\lambda - A)x$ para todo $x \in D(A)$, pois $g(A)$ comuta com $\lambda - A$. Disto segue que $\lambda \in \rho(A)$, pois caso contrário $\mathrm{Im}(f(A)) \subsetneq X$ ou $f(A)$ não seria injetor. Isto prova que $f$ não se anula em $\sigma(A)$. Se $\infty \in \sigma_e(A)$ temos $D(A) \subsetneq X$, e além disso, se $f(\infty) = 0$ (procedendo como em (4.11)) obtemos $\mathrm{Im}(f(A)) \subset D(A) \subsetneq X$. Portanto $f$ não se anula em $\sigma_e(A)$. □

Com todos esses resultados, apresentamos o *Teorema da Aplicação Espectral*

**Teorema 4.3.6** (Teorema da Aplicação Espectral). *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não-vazio. Se $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$, o espectro de $f(A)$ é exatamente o conjunto dos valores $f(\lambda)$ quando $\lambda$ percorre $\sigma_e(A)$. Simbolicamente, $\sigma(f(A)) = f(\sigma_e(A))$.*

*Demonstração.* Note que $\mu \notin f(\sigma_e(A))$ se, e somente se, $\mu - f(\lambda)$ não se anula em $\sigma_e(A)$. Por outro lado, $\mu - f(\lambda)$ não se anula em $\sigma_e(A)$ se, e somente se, $\mu - f(A)$ tem inversa em $\mathcal{L}(X)$ (ou seja, $\mu \notin \sigma(f(A))$), e a demonstração está completa. □

**Exercício 4.7.** Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com $0 \in \rho(A)$. Então $\sigma(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}\colon \lambda \in \sigma_e(A)\}$, e se $\lambda_0$ é um ponto isolado de $\sigma(A)$ então $P_{\{\lambda_0\}}(A) = P_{\{\lambda_0^{-1}\}}(A^{-1})$.

## ∗ Composição de Funções

Com a ajuda do Teorema da Aplicação Espectral, somos capazes de estender o cálculo operacional e lidar com a composição de funções.

**Teorema 4.3.7.** *Sejam $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado. Assuma que $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$, $T = f(A)$ e $g \in \mathcal{U}_\infty(T)$. Suponha também que $f(\infty) \in D(g)$ (no caso em que $A \in \mathcal{L}(X)$, podemos sempre modificar $f$ próximo a $\infty$, se necessário, para que $f(\infty) \in D(g)$). Defina $h$ por $h(\lambda) = g(f(\lambda))$ se $\lambda \in D(f)$ e $f(\lambda) \in D(g)$. Então $h \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e $h(A) = g(T)$.*

*Demonstração.* É simples mostrar que $D(h) = \{\lambda \in D(f)\colon f(\lambda) \in D(g)\}$ é aberto em $\mathbb{C}$, e a demonstração deste fato fica a cargo do leitor. Agora, segue do Teorema da Aplicação Espectral que $\sigma(f(A)) = f(\sigma_e(A))$. Assim dado $\lambda \in \sigma(A)$ temos $\lambda \in D(f)$ e $f(\lambda) \in \sigma(f(A)) = \sigma(T) \subset D(g)$. Isto nos mostra que $\sigma(A) \subset D(h)$. Como $T = f(A) \in \mathcal{L}(X)$, podemos escolher um domínio de Cauchy limitado $D$ tal que $\sigma(T) \subset D \subset \overline{D} \subset D(g)$ e com $f(\infty) \in D$. Agora, escolhemos um domínio de Cauchy ilimitado $D_1$ com $\sigma(A) \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D(f)$ e satisfazendo $f(\overline{D_1}) \subset D$. Portanto $\sigma(A) \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D(h)$ e

$$\begin{aligned} h(A) &= h(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} h(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= h(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D_1} g(f(\lambda))(\lambda - A)^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Mas note que para $\lambda \in \partial D_1$ temos

$$g(f(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{g(\xi)}{\xi - f(\lambda)} d\xi.$$

Para $\xi \in \partial D$ fixado, considerando $F(\lambda) = \frac{1}{\xi - f(\lambda)}$, vemos que $F(A) = (\xi - T)^{-1}$. Notando também que

$$h(\infty) = g(f(\infty)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{g(\xi)}{\xi - f(\infty)} d\xi$$

e

$$g(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} g(\xi)(\xi - T)^{-1} d\xi,$$

a conclusão do teorema segue com cálculos simples, que deixamos a cargo do leitor.

□

# CAPÍTULO 5

## Análise Espectral em Espaços de Hilbert

A teoria presente neste capítulo está baseada em [17, Chapter VI]. Sejam $H$ um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{K}$ e $A \colon D(A) \subset H \to H$ um operador densamente definido. No que segue, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará também a *dualidade* de $H^*$ em $H$, e pedimos cuidado ao leitor para evitar confusão. Para cada $u \in H$, definimos $\xi_u \colon D(A) \to \mathbb{K}$ por

$$\langle v, \xi_u \rangle = \langle Av, u \rangle.$$

Claramente $\xi_u$ é linear. Assuma que $\xi_u$ é limitado, isto é, existe $c \geqslant 0$ tal que

$$|\langle v, \xi_u \rangle| \leqslant c\|v\|_H \quad \text{para todo } v \in D(A).$$

Do Teorema de Hahn-Banach (ou do fato de que $D(A)$ é denso em $H$), existe uma extensão $\phi_u \in H^*$ de $\xi_u$. Segue do Teorema da Representação de Riesz (veja [3, Theorem 5.5]) que existe um único elemento $u^\bullet \in H$ tal que

$$\langle v, \phi_u \rangle = \langle v, u^\bullet \rangle \quad \text{para todo } v \in H,$$

e portanto

$$\langle Av, u \rangle = \langle v, \xi_u \rangle = \langle v, \phi_u \rangle = \langle v, u^\bullet \rangle \quad \text{para todo } v \in D(A).$$

O **adjunto** $A^\bullet$ de $A$ é definido por

$$D(A^\bullet) = \{u \in H \colon \xi_u \text{ é limitado}\}.$$

e para cada $u \in D(A^\bullet)$, $A^\bullet u = u^\bullet \in H$ é o único elemento de $H$ tal que

$$\langle v, A^\bullet u \rangle = \langle Av, u \rangle, \text{ para todo } v \in D(A).$$

Quando $H$ é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, é simples ver que $A^\bullet = A^*$. Esta relação porém *não é mantida* quando $H$ é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, já que o produto interno *não é linear* na segunda coordenada, mas sim *linear-conjugado*. Vamos deixar essa relação entre $A^\bullet$ e $A^*$ mais clara.

Considere $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, e defina $E\colon H \to H^*$ por

$$\langle v, Eu\rangle = \langle v, u\rangle \quad \text{para todo } v \in H,$$

Sabemos que $E$ é uma isometria linear-conjugada entre $H$ e $H^*$, isto é,

$$E(u_1 + \alpha u_2) = Eu_1 + \overline{\alpha} Eu_2 \quad \text{para todos } u_1, u_2 \in H \text{ e } \alpha \in \mathbb{C},$$

$E$ é bijetora e

$$\|Eu\|_{H^*} = \|u\|_H \quad \text{para todo } u \in H.$$

A identificação entre $H$ e $H^*$ consiste em identificar $u$ com $Eu$, e daqui por diante, entenderemos que $H = H^*$, via essa identificação.

**Proposição 5.0.1.** *Considere* $A^*\colon D(A^*) \subset H^* \to H^*$ *o operador dual de* $A$. *Então* $A^\bullet = E^{-1}A^*E$.

*Demonstração.* De fato, $Eu \in D(A^*)$ e $A^*Eu = Ev$ se e só se

$$\langle Aw, Eu\rangle = \langle w, Ev\rangle \quad \text{para todo } w \in D(A),$$

isto é,

$$\langle Aw, u\rangle = \langle w, v\rangle \quad \text{para todo } w \in D(A),$$

o que ocorre se e só se $u \in D(A^\bullet)$ e $A^\bullet u = v$.

Deste modo $ED(A^\bullet) = D(A^*)$ e

$$A^\bullet u = v = E^{-1}A^*Eu \quad \text{para todo } u \in D(A^\bullet).$$

□

Com essa identificação fica claro que $A^\bullet = E^{-1} \circ A^* \circ E$ é um operador linear, por causa da dupla conjugação (uma de $E$ e outra de $E^{-1}$). Daqui por diante ambos $A^\bullet$ e $A^*$ serão chamados indistintamente de **adjunto de $A$** e denotaremos ambos por $A^*$, mas é importante observar que, se $A = \alpha B$ então $A^\bullet = \overline{\alpha}\, B^\bullet$ enquanto que $A^* = \alpha B^*$. Desta forma, $(\lambda - A)^\bullet = \overline{\lambda} - A^\bullet$ enquanto que $(\lambda - A)^* = \lambda - A^*$.

**Exercício 5.1.** Mostre que se $A \in \mathcal{L}(H)$ tem inversa limitada, então $\mathrm{Im}(A^*) = H$.

## 5.1 Formas Bilineares e Quadráticas

No que segue, $H$ denotará um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e norma associada $\|\cdot\|$.

**Definição 5.1.1** (Forma Bilinear e Quadrática). Uma aplicação $a\colon H\times H\to\mathbb{K}$ é dita uma **forma bilinear** se $a(\cdot,v)$ é um funcional linear para cada $v\in H$ fixo e se $\overline{a(u,\cdot)}$ é um funcional linear para cada $u\in H$ (e nesse caso dizemos que $a(u,\cdot)$ é um funcional linear conjugado).

Com uma forma bilinear $a$ em $H$ definimos o funcional $\phi\colon H\to\mathbb{K}$ por $\phi(u)=a(u,u)$. Dizemos que $\phi$ é a **forma quadrática** associada à forma bilinear $a$.

Note que para uma forma quadrátrica $\phi$, temos $\phi(\alpha u)=|\alpha|^2\phi(u)$ para todo $u\in H$. Uma importante relação entre uma forma bilinear $a$ e sua forma quadrática $\phi$ associada é

$$\phi\left(\frac{u+v}{2}\right)-\phi\left(\frac{u-v}{2}\right)=\frac{1}{2}[a(u,v)+a(v,u)]. \tag{5.1}$$

Quando $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ temos também

$$a(u,v)=\phi\left(\frac{u+v}{2}\right)-\phi\left(\frac{u-v}{2}\right)+i\phi\left(\frac{u+vi}{2}\right)-i\phi\left(\frac{u-vi}{2}\right), \tag{5.2}$$

o que mostra que $a$ é completamente determinada por sua forma quadrátrica associada no caso complexo. No caso real, esse nem sempre é o caso.

**Exemplo 5.1.2.** Considere $a$ uma forma bilinear no espaço vetorial real $H$ com produto interno. Defina

$$b(u,v)=\frac{1}{2}[a(u,v)+a(v,u)].$$

Mostre que $b$ é também uma forma bilinear, cuja forma quadrática associada é igual à de $a$. (Note que, em geral, $b$ não é igual a $a$).

Dizemos que uma forma bilinear $a$ é **limitada** se existe uma constante $c\geqslant 0$ tal que

$$|a(u,v)|\leqslant c\|u\|\|v\| \quad \text{para todo } u,v\in H.$$

**Exercício 5.2.** Mostre que uma forma bilinear $a\colon H\times H\to\mathbb{K}$ é contínua se, e somente se, $a$ é limitada.

Quando uma forma bilinear é contínua, definimos

$$\|a\|=\sup_{\|u\|=\|v\|=1}|a(u,v)|.$$

**Exercício 5.3.** Mostre que $\|a\|$ define uma norma no conjunto das formas bilineares contínuas e limitadas $a$ de $H$. Mostre também que

$$\|a\| = \sup_{\|u\|\leqslant 1,\ \|v\|\leqslant 1} |a(u,v)| = \sup_{u\neq 0,\ v\neq 0} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|}.$$

Para a forma quadrática $\phi$ associada à forma bilinear contínua $a$, definimos

$$\|\phi\| = \sup_{\|u\|=1} |\phi(u)| = \sup_{\|u\|\leqslant 1} |\phi(u)| = \sup_{u\neq 0} \frac{|\phi(u)|}{\|u\|^2},$$

e claramente temos $\|\phi\| \leqslant \|a\|$. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, usando (5.2) e a regra do paralelogramo[1] obtemos $\|a\| \leqslant 2\|\phi\|$. Portanto no caso complexo obtemos

$$\|\phi\| \leqslant \|a\| \leqslant 2\|\phi\|.$$

Uma forma bilinear $a$ é dita **simétrica** se $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$ para todos $u, v \in H$ (no caso complexo, uma forma simétrica é também chamada de **forma Hermitiana**).

**Proposição 5.1.3.** *Se $a$ é uma forma bilinear simétrica e $\phi$ é a forma quadrática associada, então $\|a\| = \|\phi\|$.*

*Demonstração.* Só nos resta mostrar que $\|a\| \leqslant \|\phi\|$. De (5.1) obtemos

$$\operatorname{Re} a(u,v) = \phi\left(\frac{u+v}{2}\right) - \phi\left(\frac{u-v}{2}\right),$$

e portanto da regra do paralelogramo segue que

$$|\operatorname{Re} a(u,v)| \leqslant \frac{\|\phi\|}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o resultado está provado. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, para $u, v \in H$ com $\|u\| = \|v\| = 1$ fixados, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a(u,v) = |a(u,v)|e^{i\theta}$. Definindo $u_1 = e^{-i\theta}u$ temos $\|u_1\| = 1$ e

$$a(u_1, v) = e^{-i\theta}a(u,v) = |a(u,v)| \geqslant 0.$$

Portanto $a(u_1, v) = |\operatorname{Re} a(u_1, v)|$ e assim

$$|a(u,v)| = |\operatorname{Re} a(u_1,v)| \leqslant \|\phi\|,$$

e o resultado está completo. □

Para cada operador linear $A\colon H \to H$, a aplicação $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ define uma forma bilinear.

[1] Lembre-se que num espaço vetorial $H$ com produto interno temos $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\|u\|^2+2\|v\|^2$ para todos $u, v \in H$.

**Teorema 5.1.4.** *Nas condições anteriores, $a$ é contínua se, e somente se, $A \in \mathcal{L}(H)$. Nesse caso, $\|a\| = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$.*

*Demonstração.* Se $A \in \mathcal{L}(H)$ então

$$|a(u,v)| = |\langle Au, v\rangle| \leqslant \|Au\|\|v\| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(H)}\|u\|\|v\|.$$

Reciprocamente, se $a$ é contínua então

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = a(u, Au) \leqslant \|a\|\|u\|\|Au\|,$$

o que mostra que $\|Au\| \leqslant \|a\|\|u\|$, completando o resultado. □

**Teorema 5.1.5.** *Assuma que $H$ é um espaço de Hilbert e que $a$ é uma forma bilinear contínua em $H$. Então existe $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ para todos $u, v \in H$.*

*Demonstração.* Para cada $u \in H$ fixado, a aplicação $\xi_u \colon H \to \mathbb{K}$, dada por $\langle v, \xi_u\rangle = \overline{a(u,v)}$ para cada $v \in H$, é um funcional linear contínuo de $H$. Pelo Teorema de Riesz-Frechét (veja [17, Theorem III.5.1]) existe um único $w_u \in H$ tal que

$$\overline{a(u,v)} = \langle v, w_u\rangle \qquad \text{para todo } v \in H.$$

Defina $Au = w_u$. Assim $A \colon H \to H$ é um operador linear e $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ para todo $v \in H$. Do teorema anterior $A \in \mathcal{L}(H)$ e a prova está completa. □

**Teorema 5.1.6.** *Sejam $a$ e $A$ como no teorema acima. Assuma que exista $m > 0$ tal que*

$$|a(u,u)| \geqslant m\|u\|^2 \qquad \textit{para todo } u \in H. \tag{5.3}$$

*Então $A$ é uma aplicação bijetora e $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.*

*Demonstração.* Note que

$$m\|u\|^2 \leqslant |a(u,u)| = |\langle Au, u\rangle| \leqslant \|Au\|\|u\|,$$

e portanto $m\|u\| \leqslant \|Au\|$ para todo $u \in H$. Assim $A$ é injetora e $A^{-1} \colon \mathrm{Im}(A) \to H$ é limitada. Segue da Proposição 2.1.6 que $\mathrm{Im}(A)$ é fechado em $H$. Deixamos a cargo do leitor provar que $\mathrm{Im}(A)$ é densa em $H$, o que completa a prova. □

Uma forma bilinear que satisfaça (5.3) é chamada de **coerciva**.

**Teorema 5.1.7** (Lax-Milgram). *Sejam $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $a$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Então para cada $\xi \in H^*$, existe um único $v \in H$ tal que*

$$\langle u, \xi\rangle = a(u,v) \qquad \textit{para todo } u \in H.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema de Riesz-Frechét (veja [17, Theorem III.5.1]), existe $w \in H$ tal que

$$\langle u, \xi \rangle = \langle u, w \rangle \qquad \text{para todo } u \in H.$$

Do Teorema 5.1.6, o operador $A$ associado à $a$ possui inversa $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Do Teorema A.2.4, $\operatorname{Im}(A^*) = H$ e portanto $w = A^* v$ para algum $v \in H$. Então temos

$$\langle u, \xi \rangle = \langle u, w \rangle = \langle u, A^* v \rangle = \langle Au, v \rangle = a(u, v).$$

A unicidade de $v$ fica a cargo do leitor, e a demonstração está completa. □

**Exercício 5.4.** Seja $H$ um espaço vetorial complexo com produto interno. Uma forma bilinear $a$ em $H$ é simétrica se, e somente se, sua forma quadrática $\phi$ é tal que $\phi(H) \subset \mathbb{R}$.

**Dica:** Se $\phi(H) \subset \mathbb{R}$, defina $a_1(u, v) = \overline{a(v, u)}$, e observe que $\phi$ é também a forma quadrática associada à $a_1$.

**Exercício 5.5.** Seja $H$ um espaço vetorial complexo com produto interno.

(a) Se $A \colon H \to H$ é linear e $\langle Au, u \rangle = 0$ para todo $u \in H$ então $A = 0$. Isto é válido também se $H$ for um espaço vetorial *real* com produto interno?

(b) Se $A, B \colon H \to H$ são operadores lineares tais que $\langle Au, u \rangle = \langle Bu, u \rangle$ para todo $u \in H$, então $A = B$.

## 5.2 Operadores Adjuntos, Simétricos e Autoadjuntos

**Definição 5.2.1.** Seja $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diremos que um operador $A \colon D(A) \subset H \to H$ é **simétrico** se $A$ é densamente definido e $A \subset A^*$, isto é, para cada $y \in D(A)$ temos $y \in D(A^*)$ e $A^* y = Ay$, ou seja

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \qquad \text{para todos } x, y \in D(A).$$

Diremos que $A$ é **autoadjunto** se $D(A) = D(A^*)$ e $A = A^*$.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, um operador simétrico também é chamado de *operador Hermitiano*.

Sabemos do Exercício 2.19 que para um espaço de Hilbert $H$ e um operador linear densamente definido $A \colon D(A) \subset H \to H$, seu adjunto $A^* \colon D(A^*) \subset H \to H$ é fechado. Além disso, sabemos do Lema 2.3.2 que se $A$ é fechado, então $A^*$ é densamente definido, já que $H$ é reflexivo (pois é um espaço de Hilbert).

**Exercício 5.6.** Seja $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Mostre que, se $A \colon D(A) \subset H \to H$ é simétrico e $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de $A$, então $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, mostre que

$$\inf_{\|u\|_H = 1} \langle Au, u \rangle \leqslant \lambda \leqslant \sup_{\|u\|_H = 1} \langle Au, u \rangle,$$

e que se $\lambda, \mu$ são autovalores distintos de $A$ e $u, v$ são os respectivos autovetores associados, então $u$ e $v$ são ortogonais, isto é, $\langle u, v \rangle = 0$.

Note que, no exercício acima, as hipóteses de que

$$\inf_{\|u\|_H=1} \langle Au, u\rangle = -\infty \quad \text{ou} \quad \sup_{\|u\|_H=1} \langle Au, u\rangle = \infty$$

não estão descartadas.

**Exercício 5.7.** Seja $H = \mathbb{C}^n$ com o produto interno usual. Se $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ é uma matriz com coeficientes complexos que representa um operador linear em $A \in \mathcal{L}(H)$, encontre $A^\bullet$ e $A^*$.

**Exercício 5.8.** Sejam $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador densamente definido. Mostre que

$$G(A^*) = \{(-Ax, x)\colon x \in D(A)\}^\perp,$$

onde $M^\perp$ representa o ortogonal de $M$.

**Proposição 5.2.2.** *Seja $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se $A\colon D(A) \subset H \to H$ é um operador autoadjunto, injetor e com imagem densa, então $A^{-1}$ é autoadjunto.*

*Demonstração.* Veja que

$$G(A^{-1}) = \{(Ax, x)\colon x \in D(A)\} \overset{(\star)}{=} \{(x, -Ax)\colon x \in D(A)\}^\perp,$$

onde em $(\star)$ usamos o fato de $A$ ser autoadjunto. Como $A$ é injetor temos

$$\{(x, -Ax)\colon x \in D(A)\}^\perp = \{(-A^{-1}x, x)\colon x \in \mathrm{Im}(A)\}.$$

Como $A^{-1}\colon \mathrm{Im}(A) \subset H \to H$ é densamente definido, segue do Exercício 5.8 que

$$G((A^{-1})^*) = \{(-A^{-1}x, x)\colon x \in \mathrm{Im}(A)\}^\perp = G(A^{-1}),$$

o que mostra que $A^{-1} = (A^{-1})^*$. □

**Exercício 5.9.** Se $A \in \mathcal{L}(H)$ é simétrico então $A$ é autoadjunto.

**Teorema 5.2.3.** *Seja $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se $A\colon D(A) \subset H \to H$ é um operador simétrico e sobrejetor, então $A$ é autoadjunto.*

*Demonstração.* Primeiramente mostremos que $A$ e $A^*$ são injetores. Se $x \in D(A)$ e $Ax = 0$, temos $0 = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todo $y \in D(A)$ e consequentemente, do fato que $\mathrm{Im}(A) = H$ temos $x = 0$. Para ver que $A^*$ é injetor procedemos da mesma forma.

Agora mostremos que $A$ é fechado. De fato, se $D(A^*) \supset D(A) \ni x_n \to x \in H$ e $Ax_n = A^*x_n \to y$, então $x \in D(A^*)$ e $A^*x = y$. Como $A$ é sobrejetor, existe $w \in D(A)$ tal que $Aw = y$. Mas assim $A^*w = Aw = y = A^*x$, e da injetividade de $A^*$ temos $w = x$. Com isto $x \in D(A)$ e $Ax = y$, mostrando que $A$ é fechado.

Segue que do Teorema do Gráfico Fechado que $A$ tem inversa $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Do Exercício 5.9 temos $A^{-1}$ autoadjunto, e segue da Proposição 5.2.2 que $A$ é autoadjunto. □

Deste resultado, segue o seguinte corolário.

**Corolário 5.2.4.** *Seja* $H$ *um espaço de Hilbert sobre* $\mathbb{K}$ *com produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*. Se* $A\colon D(A) \subset H \to H$ *é um operador simétrico e existe* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$ *tal que* $\operatorname{Im}(\lambda_0 - A) = H$ *então* $A$ *é autoadjunto.*

*Demonstração.* Claramente $\lambda_0 - A\colon D(A) \subset H \to H$ é também simétrico, pois $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\lambda_0 - A$ é sobrejetor, segue o Teorema 5.2.3 que $\lambda_0 - A$ é autoadjunto. Disso segue facilmente que $A$ é autoadjunto. □

**Exercício 5.10.** Seja $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$, e considere $a\colon H \times H \to \mathbb{K}$ uma forma linear na primeira variável, linear-conjugada na segunda variável, contínua, simétrica e satisfazendo $a(u,u) \geqslant 0$ para todo $u \in H$. Mostre que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $a$, isto é

$$|a(u,v)| \leqslant a(u,u)^{1/2} a(v,v)^{1/2} \quad \text{para todos } u, v \in H.$$

**Definição 5.2.5.** Sejam $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Dizemos que $A$ é:

(a) **limitado superiormente** por $\alpha \in \mathbb{R}$ se

$$\langle Au, u\rangle \leqslant \alpha \|u\|_H^2 \quad \text{para todo } u \in D(A);$$

(b) **limitado inferiormente** por $\alpha \in \mathbb{R}$ se

$$\langle Au, u\rangle \geqslant \alpha \|u\|_H^2 \quad \text{para todo } u \in D(A);$$

(c) **positivo** se é limitado inferiormente por 0;

(d) **estritamente positivo** se

$$\langle Au, u\rangle > 0 \quad \text{para todo } u \in D(A) \setminus \{0\}.$$

**Exercício 5.11.** Em $H = \ell^2(\mathbb{C})$ defina o operador $T\colon H \to H$ por

$$T\{x_n\} = \left\{\frac{x_n}{n}\right\}.$$

Mostre que $T$ é estritamente positivo, mas que não existe $\alpha > 0$ tal que $T$ é limitado inferiormente por $\alpha$.

Usando os resultados de imagem numérica, somos capazes de localizar o espectro de um operador autoadjunto limitado superiormente, e obter estimativas para o seu resolvente.

**Exemplo 5.2.6.** Sejam $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador autoadjunto (em particular, $A$ é densamente definido e fechado) e limitado superiormente por $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\mathbb{C} \setminus (-\infty, \alpha] \subset \rho(A)$ e para cada $0 < \varphi < \pi$ existe uma constante $M \geqslant 1$ tal que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M}{|\lambda - \alpha|},$$

para todo $\lambda \in G_{\alpha,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\arg(\lambda - \alpha)| \leqslant \varphi\} \setminus \{\alpha\}$ (veja Figura 5.1). Note que

$$W(A) = \{\langle Au, u\rangle : u \in D(A) \text{ e } \|u\|_H = 1\} \subset (-\infty, \alpha],$$

e também $A - \alpha = A^* - \alpha$ são dissipativos. Do Corolário 2.5.5, $\rho(A - \alpha) \supset (0, \infty)$. Do Teorema 2.6.1 temos $\mathbb{C} \setminus (-\infty, \alpha] \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, \alpha])}.$$

Além disso, se $\lambda \in G_{\alpha,\varphi}$, temos

$$\frac{1}{d(\lambda, (-\infty, \alpha])} \leqslant \frac{1}{\sin\varphi}\frac{1}{|\lambda - \alpha|},$$

e o resultado segue.

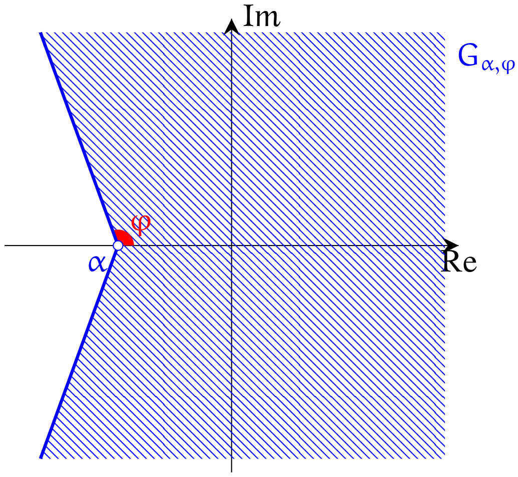



Figura 5.1: O conjunto $G_{\alpha,\varphi}$ para $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ e $\alpha < 0$.

**Proposição 5.2.7.** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto. Se*

$$m = \inf_{\|u\|_H = 1} \langle Au, u\rangle \quad e \quad M = \sup_{\|u\|_H = 1} \langle Au, u\rangle,$$

*então $\{m, M\} \subset \sigma(A) \subset [m, M]$.*

*Demonstração.* Da definição de $M$ temos $\langle Au, u\rangle \leqslant M\|u\|_H^2$ para todo $u \in H$. Do Exemplo 5.2.6, sabemos que $\mathbb{C} \setminus (-\infty, M] \subset \rho(A)$.

Mostremos que $M \in \sigma(A)$. A forma bilinear $a(u, v) = \langle Mu - Au, v\rangle$ é linear na primeira variável, linear-conjugada na segunda variável, contínua, simétrica e $a(u, u) \geqslant 0$, para todo $u \in H$. Logo do Exercício 5.10 vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $a$. Segue assim que

$$\begin{aligned} |\langle Mu - Au, v\rangle| &\leqslant \langle Mu - Au, u\rangle^{1/2}\langle Mv - Av, v\rangle^{1/2} \\ &\leqslant C\langle Mu - Au, u\rangle^{1/2}\,\|v\|_H \quad \text{para todos } u, v \in H, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|Mu - Au\|_H \leqslant C\langle Mu - Au, u\rangle^{1/2} \quad \text{para todo } u \in H. \tag{5.4}$$

Seja $\{u_n\}$ uma sequência de vetores com $\|u_n\|_H = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $\langle Au_n, u_n\rangle \to M$. De (5.4) segue que $\|(M - A)u_n\|_H \to 0$. Se $M \in \rho(A)$ então

$$u_n = (M - A)^{-1}(M - A)u_n \to 0$$

o que contradiz o fato de que $\|u_n\|_H = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $M \in \sigma(A)$.

Do resultado acima aplicado a $-A$ obtemos $\mathbb{C} \setminus (m, \infty) \subset \rho(A)$ e $m \in \sigma(A)$, e o resultado está completo. □

**Lema 5.2.8.** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto, então*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|u\|_H = \|v\|_H = 1} |\langle Au, v\rangle| = \sup_{\|u\|_H = 1} |\langle Au, u\rangle|.$$

*Demonstração.* Sabemos que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|u\|_H = 1} \|Au\|_H = \sup_{\|u\|_H = \|v\|_H = 1} |\langle Au, v\rangle|,$$

e que

$$\sup_{\|u\|_H = 1} |\langle Au, u\rangle| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

Para concluir o resultado basta mostrar que

$$\sup_{\|u\|_H = \|v\|_H = 1} |\langle Au, v\rangle| \leqslant \sup_{\|u\|_H = 1} |\langle Au, u\rangle| := a.$$

Se $u, v' \in H$ com $\|u\|_H = \|v'\|_H = 1$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle Au, v'\rangle = |\langle Au, v'\rangle|\, e^{i\alpha}.$$

Para $v = e^{i\alpha}v'$ temos $\|v\|_H = 1$ e

$$\begin{aligned} |\langle Au, v'\rangle| = \langle Au, v\rangle &= \frac{1}{4}[\langle A(u + v), u + v\rangle - \langle A(u - v), u - v\rangle] \\ &\leqslant \frac{a}{4}[\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2] = a, \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

**Corolário 5.2.9.** *Sejam* $H$ *um espaço vetorial com produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *e* $A \in \mathcal{L}(H)$ *um operador autoadjunto com* $\sigma(A) = \{0\}$*, então* $A = 0$*.*

*Demonstração.* Pela Proposição 5.2.7, como $\{m, M\} \subset \sigma(A) = \{0\}$, temos $m = M = 0$, e assim $\langle Au, u\rangle = 0$, para todo $u \in H$ com $\|u\|_H = 1$ (e consequentemente para todo $u \in H$). Do Lema 5.2.8, $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = 0$ e portanto $A = 0$. □

## ∗ O Teorema de Friedrichs

Antes de enunciar e provar o Teorema de Friedrichs, apresentamos alguns resultados que facilitarão a sua demonstração. Sejam $X$ um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador simétrico tal que

$$\langle Ax, x\rangle \geqslant \|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in D(A). \tag{5.5}$$

Definimos a aplicação

$$D(A) \times D(A) \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle_* = \langle Ax, y\rangle \in \mathbb{K}. \tag{5.6}$$

**Exercício 5.12.** A aplicação em (5.6) define um produto interno em $D(A)$.

Com esse exercício, temos uma norma $\|x\|_* = \langle x, x\rangle_*^{\frac{1}{2}} = \langle Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ em $D(A)$, que satisfaz $\|x\| \leqslant \|x\|_*$, tendo em vista (5.5).

Consideremos então o completamento $Z = (Z, \|\cdot\|_Z)$ de $Y = (D(A), \|\cdot\|_*)$. Lembremos que os elementos de $Z$ são classes de equivalência de sequências de Cauchy em $Y$, denotadas por $[\{x_n\}]$, com a relação de equivalência $\sim$ dada por

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \text{se e só se} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_* = 0.$$

Além disso, a norma $\|\cdot\|_Z$ em $Z$ é dada por

$$\|[\{x_n\}]\|_Z = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_*.$$

Sabemos ainda que a aplicação $\varphi\colon Y \to Z$, dada por $\varphi(x) = [\{x\}]$ (isto é, que a cada $x \in D(A)$ associa a sequência de Cauchy constante $\{x\}$), é uma isometria linear[1] com $\varphi(Y)$ é denso em $Z$.

**Lema 5.2.10.** *Com as hipóteses acima, existe uma aplicação* $\phi\colon Z \to X$ *que é linear e injetora.*

*Demonstração.* Se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_*$, ela também é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|$. Como $X$ é completo, existe um único $x \in X$ tal que $\|x_n - x\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Além disso, se $\{z_n\} \sim \{x_n\}$, então $\|z_n - x\| \to 0$

[1] Isto é, $\varphi$ é linear e $\|\varphi(x)\|_Z = \|x\|_*$ para todo $x \in D(A)$.

quando $n \to \infty$. Assim, $x$ independe do representante de $[\{x_n\}]$ e definimos $\phi\colon Z \to X$ por

$$\phi[\{x_n\}] = x \text{ para cada } [\{x_n\}] \in Z.$$

Claramente $\phi$ é linear.

Agora, note que se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_*$, então a sequência $\{\|x_n\|_*\}$ é uma sequência de Cauchy em $[0,\infty)$, e portanto $\|x_n\|_* \to a$, para algum $a \geqslant 0$. Com isso em mente, mostraremos a injetividade de $\phi$. Se $\phi([\{x_n\}]) = 0$ então isso quer dizer, por definição de $\phi$, que $\|x_n\| \to 0$. Se $\|x_n\|_* \to a$ quando $n \to \infty$, temos

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\langle Ax_n, x_m\rangle &= \langle Ax_n, x_n\rangle + \langle Ax_m, x_m\rangle - \langle A(x_n - x_m), (x_n - x_m)\rangle \\ &= \|x_n\|_*^2 + \|x_m\|_*^2 - \|x_n - x_m\|_*^2 \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 2a^2. \end{aligned}$$

Mas notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, temos $\langle Ax_n, x_m\rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, uma vez que $\|x_m\| \to 0$ quando $m \to \infty$. Deste modo, obtemos $a = 0$ e portanto $[\{x_n\}] = 0$ em $Z$, e a injetividade de $\phi$ está provada. □

Denotamos agora

$$X^{\frac{1}{2}} = \phi(Z) \subset X. \tag{5.7}$$

Claramente $D(A) \subset X^{\frac{1}{2}}$. Em $X^{\frac{1}{2}}$, definimos $\|x\|_{\frac{1}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_*$, onde $x = \phi([\{x_n\}])$.

**Exercício 5.13.** Mostre que $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ define uma norma em $X^{\frac{1}{2}}$, que para $x \in D(A)$ temos $\|x\|_{\frac{1}{2}} = \|x\|_*$. Além disso, mostre que para $x \in X^{\frac{1}{2}}$, temos $\|x\| \leqslant \|x\|_{\frac{1}{2}}$.

**Lema 5.2.11.** *$D(A)$ é denso em $(X^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$.*

*Demonstração.* Veja que dados $x = \phi[\{x_n\}] \in X^{\frac{1}{2}}$ e $\epsilon > 0$, como $\{x_n\}$ é de Cauchy em $Y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_{n_0}\|_* < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geqslant n_0$. Assim $\phi[\{x_n - x_{n_0}\}] = x - x_{n_0}$, $x_{n_0} \in D(A)$ e

$$\|x - x_{n_0}\|_{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n_0}\|_* \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

o que conclui a demonstração. □

Agora, se $x, y \in X^{\frac{1}{2}}$, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset D(A)$ são sequências com $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\frac{1}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\|_{\frac{1}{2}} = 0$, definimos

$$\langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle_* = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, y_n\rangle. \tag{5.8}$$

Note que, uma vez que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sequências de Cauchy em $\|\cdot\|_*$, temos

$$|\langle x_n, y_n\rangle_* - \langle x_m, y_m\rangle_*| \leqslant \|x_n - x_m\|_* \|y_n\|_* + \|x_m\|_* \|y_n - y_m\|_* \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja, o limite em (5.8) existe. Com o mesmo raciocício, mostramos que o limite independe da escolha das sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que convergem, respectivamente, para $x$ e $y$ na norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$.

**Exercício 5.14.** Mostre que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\frac{1}{2}}$ define um produto interno em $X^{\frac{1}{2}}$, cuja norma associada é $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$.

**Lema 5.2.12.** *Para cada* $x \in D(A)$ *e* $y \in X^{\frac{1}{2}}$*, temos*

$$\langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle Ax, y\rangle .$$

*Demonstração.* De fato, se $\{y_n\} \subset D(A)$ e $\|y_n - y\|_{\frac{1}{2}} \to 0$ quando $n \to \infty$, temos

$$\langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \langle Ax, y_n\rangle .$$

Mas $\|y_n - y\| \leqslant \|y_n - y\|_{\frac{1}{2}} \to 0$ (veja o Exercício 5.13) e portanto

$$|\langle Ax, y_n\rangle - \langle Ax, y\rangle| \leqslant \|Ax\|\|y_n - y\| \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty,$$

o que completa a demonstração. □

**Lema 5.2.13.** $(X^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$ *é completo, e é, portanto, um espaço de Hilbert.*

*Demonstração.* Considere $\{x_n\} \in X^{\frac{1}{2}}$ uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$. Como $D(A)$ é denso em $X^{\frac{1}{2}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in D(A)$ tal que $\|x_n - z_n\|_{\frac{1}{2}} < \frac{1}{n}$. Assim, $\{z_n\} \subset D(A)$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$, e portanto, na norma $\|\cdot\|_*$. Assim $[\{z_n\}] \in Z$, e podemos definir $x = \phi[\{z_n\}]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, temos

$$\|z_n - x\|_{\frac{1}{2}} = \lim_{k\to\infty} \|z_n - z_k\|_*.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, escolhemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0\epsilon > 2$ e para $n, k \geqslant n_0$ tenhamos $\|z_n - z_k\|_* < \frac{\epsilon}{4}$. Assim para $n \geqslant n_0$ temos

$$\|z_n - x\|_{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{2}$$

e, portanto,

$$\|x_n - x\|_{\frac{1}{2}} \leqslant \|x_n - z_n\|_{\frac{1}{2}} + \|z_n - x\|_{\frac{1}{2}} < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

o que mostra que $\{x_n\}$ converge em $X^{\frac{1}{2}}$, e completa a prova. □

Além disso, também temos

$$\lim_{n,m\to\infty} \langle Ax_n, y_m\rangle = \lim_{n,m\to\infty} \langle x_n, y_m\rangle_* = \langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}}, \tag{5.9}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_m\rangle_* - \langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}}| &= |\langle x_n, y_m\rangle_{\frac{1}{2}} - \langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}}| \\ &\leqslant \|x_n - x\|_{\frac{1}{2}}\|y_m\|_{\frac{1}{2}} + \|x\|_{\frac{1}{2}}\|y_m - y\|_{\frac{1}{2}} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

**Definição 5.2.14.** Seja $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Diremos que um operador linear $B\colon D(B) \subset X \to X$ é um **extensão** de $A$, e denotamos $A \subset B$, se $D(A) \subset D(B)$ e $Bx = Ax$ para todo $x \in D(A)$.

O teorema a seguir, juntamente[1] com o Teorema 5.2.3, constituem as principais ferramentas para a obtenção de operadores autoadjuntos.

**Teorema 5.2.15** (Teorema de Friedrichs). *Sejam $X$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador simétrico para o qual existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle Ax, x\rangle \leqslant \alpha\|x\|^2 \quad \text{ou} \quad \langle Ax, x\rangle \geqslant \alpha\|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in D(A), \tag{5.10}$$

*isto é, $A$ é limitado superiormente (ou inferiormente) por $\alpha$. Então $A$ admite uma extensão autoadjunta que preserva a limitação (5.10).*

*Demonstração.* Vamos fazer a prova apenas no caso em que $\langle Ax, x\rangle \geqslant \alpha\|x\|^2$ para todo $x \in D(A)$ e para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. O outro caso pode ser deduzido deste considerando o operador $-A$. Também consideraremos apenas o caso $\alpha = 1$ pois o caso geral pode ser deduzido deste considerando o operador $A + (1-\alpha)I$.

Defina $\tilde{D} = D(A^*) \cap X^{\frac{1}{2}}$, com $X^{\frac{1}{2}}$ definido em (5.7). Como $D(A) \subset D(A^*)$ (pois $A$ é simétrico) e $D(A) \subset X^{\frac{1}{2}}$, obtemos $D(A) \subset \tilde{D} \subset D(A^*)$. Definimos $\tilde{A}$ tomando a restrição de $A^*$ a $\tilde{D}$ e mostraremos que $\tilde{A}$ é autoadjunto.

Mostremos primeiramente que $\tilde{A}$ é simétrico. Para $x, y \in \tilde{D} \subset X^{\frac{1}{2}}$, sejam $\{x_n\}, \{y_n\} \subset D(A)$ com $\|x_n - x\|_{\frac{1}{2}} \to 0$ e $\|y_n - y\|_{\frac{1}{2}} \to 0$ quando $n \to \infty$ (com isto, segue que $\|x_n - x\| \to 0$ e $\|y_n - y\| \to 0$ quando $n \to \infty$). Desta forma, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\langle Ax_n, y_m\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, \tilde{A}y\rangle = \langle x, \tilde{A}y\rangle$$
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, y_m\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle x, Ay_m\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle \tilde{A}x, y_m\rangle = \langle \tilde{A}x, y\rangle.$$

Mas, de (5.9), ambos os limites são iguais (uma vez que o limite duplo existe), o que mostra que $\tilde{A}$ é simétrico. Além disso, do provado e de (5.9), segue que para todo $x \in \tilde{D}$, temos $\langle \tilde{A}x, x\rangle = \langle x, x\rangle_{\frac{1}{2}} \geqslant \|x\|^2$, e a limitação (5.10) está preservada.

Mostremos agora que $\tilde{A}$ é sobrejetor. Tome $y \in X$ e considere o funcional $f\colon D(A) \to \mathbb{K}$ dado por $f(x) = \langle x, y\rangle$. Então $f$ é um funcional linear contínuo relativamente à norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$, pois

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \leqslant \|x\|_{\frac{1}{2}}\|y\| \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Assim, $f$ pode ser estendido a um funcional linear contínuo de $X^{\frac{1}{2}}$, pelo Teorema de Hahn-Banach. Do Teorema de Representação de Riesz, existe $\tilde{y} \in X^{\frac{1}{2}}$ tal que

$$\langle x, y\rangle = f(x) = \langle x, \tilde{y}\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle Ax, \tilde{y}\rangle, \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

[1]Note que o Teorema de Friedrichs também faz uso do Teorema 5.2.3 na sua demonstração.

onde a última igualdade segue do Lema 5.2.12. Isso nos mostra que $\tilde{y} \in D(A^*)$ e $A^*\tilde{y} = y$. Então $\tilde{y} \in D(A^*) \cap X^{\frac{1}{2}} = \tilde{D}$ e $\tilde{A}\tilde{y} = A^*\tilde{y}$, mostrando que $\tilde{A}$ é sobrejetor. Portanto, do Teorema 5.2.3, $\tilde{A}\colon \tilde{D} \subset X \to X$ é autoadjunto, e o resultado está demonstrado. $\square$

**Exemplo 5.2.16.** Neste exemplo, mostraremos que o operador Laplaciano em $C_0^2(0,\pi)$, o conjunto das funções reais duas vezes continuamente diferenciáveis e que tem suporte compacto em $(0,\pi)$, dado por

$$(A_0\phi)(x) = -\phi''(x) \quad \text{para } x \in (0,\pi), \tag{5.11}$$

possui uma extensão autoajunta, e caracterizaremos o domínio desta extensão.

Sejam $X = L^2(0,\pi)$ com o seu produto interno usual, isto é, para $u, v \in L^2(0,\pi)$ temos $\langle u, v\rangle = \int_0^\pi u(x)v(x)dx$. Tome $D(A_0) = C_0^2(0,\pi)$ e defina $A_0\colon D(A_0) \subset X \to X$ como em (5.11).

É fácil ver que $A_0$ é simétrico. Agora, se $\phi \in D(A_0)$, temos

$$\langle A_0\phi, \phi\rangle = -\int_0^\pi \phi''(x)\phi(x)dx = \int_0^\pi \phi'(x)^2dx,$$

e também, como $\phi(x) = \int_0^x \phi'(y)dy$, da desigualdade de Hölder segue que $\phi(x)^2 \leqslant x\int_0^\pi \phi'(y)^2dy$ e portanto

$$\int_0^\pi |\phi(x)|^2dx \leqslant \frac{\pi^2}{2}\int_0^\pi \phi'(y)^2dy = \frac{\pi^2}{2}\langle A_0\phi, \phi\rangle,$$

o que mostra que $\langle A_0\phi, \phi\rangle \geqslant \frac{2}{\pi^2}\|\phi\|_X^2$ para todo $\phi \in D(A_0)$. Do Teorema de Friedrichs, $A_0$ possui uma extensão autoadjunta $A$ que satisfaz $\langle A\phi, \phi\rangle \geqslant \frac{2}{\pi^2}\|\phi\|_X^2$ para todo $\phi \in D(A)$.

Para caracterizar $D(A)$, observe primeiramente que o espaço $X^{\frac{1}{2}}$ do Teorema de Friedrichs é, neste exemplo, o fecho de $D(A_0) = C_0^2(0,\pi)$ na norma $H^1(0,\pi)$ e portanto $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(0,\pi)$. Por outro lado $D(A_0^*)$ é caracterizado por

$$D(A_0^*) = \{u \in X\colon \text{ existe } u^* \in X \text{ tal que } \langle -\phi'', u\rangle = \langle \phi, u^*\rangle \text{ para todo } \phi \in D(A_0)\},$$

e $A_0^*u = u^* = -u''$ para todo $u \in D(A_0^*)$, onde $u''$ denota a derivada fraca de ordem dois de $u \in X$, e portanto $D(A_0^*) = H^2(0,\pi)$. Assim, $D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ e $Au = -u''$ para todo $u \in D(A)$. Além disso, temos

$$\langle Au, u\rangle \geqslant \frac{2}{\pi^2}\|u\|_X^2 \quad \text{para toda } u \in D(A).$$

Com isto caracterizamos completamente a extensão autoadjunta $A$ de $A_0$. Vamos explorar mais algumas de suas propriedades.

$\star$ *$A$ é um operador fechado.*

Se $D(A) \ni u_n \to u$ e $-u_n'' = Au_n \to v$ em $X = L^2(0,\pi)$ então para toda função $\psi \in C_0^\infty(0,\pi)$ temos

$$-\int_0^\pi \psi''(t)u(t)dt \leftarrow -\int_0^\pi \psi''(t)u_n(t)dt = \int_0^\pi -\psi(t)u_n''(t)dt \to \int_0^\pi \psi(t)v(t)dt.$$

Com isso temos $u \in H^2(0,\pi)$ e $-u'' = v$. Para concluir a prova de que $A$ é fechado é suficiente mostrar que as normas

$$\|u\|_X + \|u'\|_X + \|u''\|_X \quad \text{e} \quad \|u\|_X + \|u''\|_X$$

são equivalentes em $D(A)$. Uma das desigualdades é óbvia. Para a outra, note que para $u \in H^2(0,\pi)$ e $s,t \in [0,\pi]$ temos

$$u'(t) - u'(s) = \int_s^t u''(r)dr,$$

o que nos dá

$$|u'(t)| \leqslant |u'(s)| + \pi^{1/2}\|u''\|_X.$$

Como $H^2(0,\pi) \hookrightarrow C^1([0,\pi])$ e $u \in D(A)$, devemos ter $u'(s) = 0$ para algum $s \in [0,\pi]$ (por exemplo, $s = 0$ ou $s = \pi$), e portanto

$$|u'(t)| \leqslant \pi^{1/2}\|u''\|_X.$$

Elevando esta desigualdade ao quadrado e integrando obtemos $\|u'\|_X \leqslant \pi^{1/2}\|u''\|_X$.

$\star$ $\mathbb{C} \setminus [2/\pi^2, \infty) \subset \rho(A)$.

Basta notar que $-A$ é limitado superiormente por $-2/\pi^2$, isto é,

$$\langle -Au, u\rangle = -\langle Au, u\rangle \leqslant -\frac{2}{\pi^2}\|u\|_X^2,$$

e do Exemplo 5.2.6 segue que $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -2/\pi^2] \subset \rho(-A)$, e a afirmação está demonstrada.

$\star$ $A$ *tem resolvente compacto.*

Para $u \in D(A)$ temos

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |x-y|^{\frac{1}{2}}\|u'\|_X = |x-y|^{\frac{1}{2}}\langle Au, u\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, se $B$ é um conjunto limitado de $D(A)$ na norma $\|\cdot\|_X + \|A\cdot\|_X$, então

$$\sup_{u\in B}\|u'\|_X < \infty,$$

e a família $B$ de funções é equicontínua e limitada em $C([0,\pi])$ com a topologia da convergência uniforme. Segue do teorema de Arzelá-Ascoli que $B$ é relativamente compacto em $C([0,\pi])$ e consequentemente $B$ é relativamente compacto em $X = L^2(0,\pi)$. Do Exercício 2.34 segue que $A$ tem resolvente compacto.

Com os resultados que veremos adiante, seremos capazes de mostrar que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Assim, para caracterizar $\sigma(A)$, basta encontrarmos os autovalores de $A$. Temos $u \in D(A)$ e $(A - \lambda)u = 0$ se, e somente se, $u \in C^\infty([0, \pi])$ e

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0 & \text{para todo } t \in [0, \pi], \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Assim devemos ter $\lambda = n^2$ para algum inteiro positivo $n$ e

$$u(t) = c_1 \mathrm{sen}(nt) \quad \text{para } t \in [0, \pi].$$

Portanto $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{n^2 : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, e o autovalor $\lambda_n = n^2$ está associado à autofunção unitária $u_n(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{sen}(nt)$.

## $*$ Caracterização Minimax de Autovalores

Nesta subseção apresentamos caracterizações dos autovalores de operadores compactos e autoadjuntos via *princípio do minimax*.

**Teorema 5.2.17.** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(H)$ um operador autoadjunto positivo. Então*

(i) $\lambda_1 = \sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\|_H = 1\}$ *é um autovalor de $A$ e existe $v_1 \in H$ com $\|v_1\|_H = 1$ tal que $\lambda_1 = \langle Av_1, v_1\rangle$. Além disso $Av_1 = \lambda_1 v_1$.*

(ii) *Indutivamente*

$$\lambda_n = \sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\|_H = 1 \text{ e } u \perp v_j, j = 1, \cdots, n-1\} \tag{5.12}$$

*é um autovalor de $A$ e existe $v_n \in H$ com $\|v_n\|_H = 1$, $v_n \perp v_j$ para $j = 1, \cdots, n-1$, tal que $\lambda_n = \langle Av_n, v_n\rangle$. Além disso, $Av_n = \lambda_n v_n$.*

(iii) *Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se*

$$\mathcal{V}_n = \{F \subset H : F \text{ é um subsepaço vetorial de dimensão } n \text{ de } H\}$$

*então*

$$\lambda_n = \inf_{F \in \mathcal{V}_{n-1}} \sup\{\langle Au, u\rangle : \|u\|_H = 1,\ u \perp F\}, \tag{5.13}$$

$$\lambda_n = \sup_{F \in \mathcal{V}_n} \inf\{\langle Au, u\rangle : \|u\|_H = 1,\ u \in F\}. \tag{5.14}$$

*Demonstração.* Consideraremos apenas os casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\lambda_1 > 0$, deixando os demais como exercício para o leitor.

(i) Considere $\{u_n\}$ uma sequência em $H$ com $\|u_n\|_H = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $\langle Au_n, u_n\rangle \to \lambda_1$ quando $n \to \infty$. Como $\{u_n\}$ é limitada sabemos que, tomando subsequências se necessário, $\{u_n\}$ converge fracamente para $v_1 \in H$. Como $\{Au_n\}$ converge fracamente para $Av_1$ e $A$ é um operador compacto, novamente passando a subsequências se necessário, podemos assumir que $\{Au_n\}$ converge fortemente para $Av_1$. Logo $\langle Av_1, v_1\rangle = \lambda_1$.

Mostremos que a sequência $\{u_n\}$ converge fortemente para $v_1$. Do Lema 5.2.8 sabemos que $0 < \lambda_1 = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ e do fato que $\{u_n\}$ converge fracamente para $v_1$ temos $0 < \|v_1\|_H \leqslant 1$. Assim

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \|Au_n - \lambda_1 u_n\|_H^2 &= \lim_{n\to\infty} \|Au_n\|_H^2 - 2\lambda_1 \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle + \lambda_1^2 \\ &= \|Av_1\|_H^2 - \lambda_1^2 \leqslant 0,\end{aligned}$$

o que mostra que $\{Au_n - \lambda_1 u_n\}$ converge fortemente para zero. Como $\{Au_n\}$ converge fortemente para $Av_1$ e $\lambda_1 > 0$, segue que $\{u_n\}$ converge fortemente para $v_1$, $\|v_1\|_H = 1$ e $Av_1 = \lambda_1 v_1$.

(ii) A prova deste item segue de (i) notando que o ortogonal do subespaço $H_n = \text{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ é invariante por $A$, e repetindo o mesmo procedimento para a restrição de $A$ a $H_n^{\perp}$.

(iii) Vamos primeiramente provar (5.13). Se $H_{n-1} = \text{span}\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$, de (5.12) temos

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \sup\{\langle Au, u\rangle \colon \|u\|_H = 1,\ u \perp H_{n-1}\} \\ &\geqslant \inf_{F\in\mathcal{V}_{n-1}} \sup\{\langle Au, u\rangle \colon \|u\|_H = 1,\ u \perp F\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, seja $F \in \mathcal{V}_{n-1}$ e $w_1, \cdots, w_{n-1}$ um conjunto ortonormal de $F$. Escolha[2] $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ de modo que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, w_j\rangle = 0$ para cada $j = 1, \cdots, n-1$ e $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$. Definindo $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ temos $\|u\|_H = 1$ e $u \perp w_j$ para $j = 1, \cdots, n-1$. Assim

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i \geqslant \lambda_n,$$

o que mostra que

$$\sup\{\langle Au, u\rangle \colon \|u\|_H = 1, u \perp F\} \geqslant \lambda_n, \text{ para todo } F \in \mathcal{V}_{n-1},$$

e completa a prova de (5.13).

Provemos agora (5.14). Se $H_n = \text{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ e $u \in H_n$, $\|u\| = 1$, temos $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ com $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$ e

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i \geqslant \lambda_n,$$

[2] Note que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, w_j\rangle = 0$ $(j = 1, \cdots, n-1)$ é um sistema linear homogêneo com $n$ incógnitas e $n-1$ equações, e portanto possui infinitas soluções. Dentre estas, escolha a que satisfaz também a equação não-linear $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$.

o que nos dá

$$\sup_{F\in\mathcal{V}_n} \inf\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \in F\} \geqslant \lambda_n.$$

Reciprocamente (procedendo de maneira análoga como no caso anterior) dado $F \in \mathcal{V}_n$ podemos escolher $u \in F$ com $\|u\| = 1$ e $u \perp v_j$ para $j = 1, \cdots, n-1$. Segue de (5.12) que $\langle Au, u\rangle \leqslant \lambda_n$, e consequentemente

$$\inf\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1, u \in F\} \leqslant \lambda_n, \text{ para todo } F \in \mathcal{V}_n,$$

e a prova de (5.14) está completa. □

**Exercício 5.15.** Se $A\colon D(A) \subset H \to H$ é autoadjunto, positivo e tem inversa compacta (isto é, $A^{-1} \in \mathcal{K}(H)$), encontre uma caracterização minimax dos autovalores de $A$.

## 5.3 Decomposição Espectral de Operadores Compactos autoadjuntos

Para esta seção assumimos que $H$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno, com $H \neq \{0\}$, e vamos considerar um operador $A \in \mathcal{K}(H)$ autoadjunto. Para evitar trivialidades, vamos supor $A \neq 0$. Já sabemos (do Teorema 2.4.15) que $\sigma(A)$ contém no máximo uma quantidade enumerável de pontos, que o conjunto dos pontos de acumulação de $\sigma(A)$ é vazio ou $\{0\}$, que $\sigma(A)\setminus\{0\} = \sigma_p(A)\setminus\{0\} \neq \varnothing$ (a última igualdade segue do Corolário 5.2.9). Temos ainda o seguinte resultado:

**Proposição 5.3.1.** *Seja $A \in \mathcal{K}(H)$ autoadjunto com $A \neq 0$. Então ou $\|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ ou $-\|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ é um autovalor de $A$, e existe um autovetor $u$ correspondente tal que $\|u\| = 1$ e $|\langle Au, u\rangle| = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$.*

*Demonstração.* Do Lema 5.2.8 sabemos que existe uma sequência $\{u_n\} \subset H$ com $\|u_n\| = 1$ tal que $\langle Au_n, u_n\rangle \to \lambda$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $|\lambda| = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$. Assim

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|Au_n - \lambda u_n\|^2 &= \|Au_n\|^2 - 2\lambda\langle Au_n, u_n\rangle + \lambda^2\|u_n\|^2 \\ &\leqslant \|A\|^2_{\mathcal{L}(H)} - 2\lambda\langle Au_n, u_n\rangle + \lambda^2. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $n \to \infty$, obtemos $z_n := Au_n - \lambda u_n \to 0$. Como $A$ é compacto temos, a menos de subsequências, $\{Au_n\}$ é convergente. Portanto, como $\lambda \neq 0$, temos $u_n = \lambda^{-1}(Au_n - z_n)$, e logo $\{u_n\}$ converge para um ponto $u \in H$ com $\|u\| = 1$. Portanto

$$Au \leftarrow Au_n = \lambda u_n + z_n \to \lambda u,$$

e assim $Au = \lambda u$, e $\|u\| = 1$. Claramente $|\langle Au, u\rangle| = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$, e a prova está completa. □

Agora faremos um processo construtivo.

Passo 1: Denote o autovalor obtido na Proposição 5.3.1 por $\lambda_1$, seu autovetor correspondente por $u_1$ e $H_1 = H$. Considere $H_2 = \{u \in H \colon \langle u, u_1\rangle = 0\}$. Temos $H_2$ invariante por $A$, pois se $u \in H_2$ então

$$\langle Au, u_1\rangle = \langle u, Au_1\rangle = \lambda_1 \langle u, u_1\rangle = 0.$$

Temos ainda $H = \text{span}\{u_1\} \oplus H_2$, pois se $u \in H$ e $\alpha = \langle u, u_1\rangle$ então $u = \alpha u_1 + u - \alpha u_1$, e

$$\langle u - \alpha u_1, u_1\rangle = \langle u, u_1\rangle - \alpha = 0,$$

logo $u - \alpha u_1 \in H_2$. Além disso, a restrição de $A$ a $H_2$ está em $\mathcal{K}(H_2)$ e é autodjunta. Se esta restrição é o operador nulo, então a imagem de $A$ está contida em $\text{span}\{u_1\}$, pois para cada $u \in H$ temos

$$Au = A(\alpha u_1 + u - \alpha u_1) = \alpha\lambda_1 u_1 \in \text{span}\{u_1\}.$$

Se a restrição de $A$ a $H_2$ não é nula, procedemos ao Passo 2.

Passo 2: Usando novamente a Proposição 5.3.1, existe um autovalor $\lambda_2$ de $A$ e um autovetor $u_2$ em $H_2$ com $\|u_2\| = 1$ e $|\lambda_2| = \|A|_{H_2}\|_{\mathcal{L}(H_2)}$. Claramente $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$. Definimos $H_3 = \{u \in H \colon \langle u, u_1\rangle = \langle u, u_2\rangle = 0\}$. Assim $H_3 \subset H_2$, $H_3$ é invariante por $A$ e $H = \text{span}\{u_1, u_2\} \oplus H_3$, pois

$$u = \langle u, u_1\rangle u_1 + \langle u, u_2\rangle u_2 + \underbrace{u - \langle u, u_1\rangle u_1 - \langle u, u_2\rangle u_2}_{\in H_3}.$$

A restrição de $A$ a $H_3$ está em $\mathcal{K}(H_3)$ e é autoadjunta. Se esta restrição é o operador nulo, então a imagem de $A$ está contida em $\text{span}\{u_1, u_2\}$ pois para $u \in H$ temos $u = \alpha u_1 + \beta u_2 + v$, onde $v \in H_3$ e assim

$$Au = \alpha\lambda_1 u_1 + \beta\lambda_2 u_2.$$

Se a restrição de $A$ a $H_3$ não é nula, repetimos o processo.

Passo n: Temos $n$ autovalores não-nulos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ e autovetores correspondentes $u_1, \cdots, u_n$, com $u_i \in H_i$ para $i = 1, \cdots, n$, e para $i = 1, \cdots, n-1$, os elementos de $H_{i+1}$ são os elementos de $H$ que são ortogonais a $u_1, \cdots, u_i$. A cada passo, $|\lambda_i|$ é a norma da restrição de $A$ a $H_i$, e portanto $|\lambda_n| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$.

Este processo termina aqui se, e somente se, a restrição de $A$ a $H_{n+1} = \{u \in H \colon \langle u, u_1\rangle = \cdots = \langle u, u_n\rangle = 0\}$ é nula. Nesse caso, a imagem de $A$ é $\text{span}\{u_1, \cdots, u_n\}$, pois se $u \in H$ e se $v = u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i\rangle u_i$ temos $\langle v, u_i\rangle = 0$ para $i = 1, \cdots, n$ e logo $v \in H_{n+1}$. Portanto $Av = 0$ e assim

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i\rangle Au_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u, u_i\rangle u_i. \tag{5.15}$$

Essa situação pode ocorrer mesmo que $H$ tenha dimensão infinita, e certamente ocorre se $H$ tem dimensão finita, pois $u_1, \cdots, u_n$ são linearmente independentes.

Com esse procedimento, temos o seguinte resultado:

**Teorema 5.3.2.** *Suponha $A \in \mathcal{K}(H)$ autoadjunto e $A \neq 0$. O procedimento acima nos dá uma sequência (possivelmente finita) de autovalores não-nulos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ e uma sequência ortonormal correspondente de autovetores $u_1, \cdots, u_n$. Se a sequência é infinita, então $\lambda_n \to 0$. A expansão*

$$Au = \Sigma \langle Au, u_k \rangle u_k = \Sigma \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k \tag{5.16}$$

*é válida para cada $u \in H$, onde a soma é sobre toda a sequência, seja ela finita ou infinita. Cada autovalor não-nulo de $A$ aparece na sequência $\{\lambda_n\}$. O autoespaço correspondente a cada $\lambda_i$ tem dimensão finita e essa dimensão é exatamente o número de vezes que esse particular autovalor aparece repetido na sequência $\{\lambda_n\}$.*

*Demonstração.* Como $0 < |\lambda_{k+1}| \leqslant |\lambda_k|$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$, devemos ter ou $\lambda_n \to 0$ ou existe $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geqslant \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Se a sequência é infinita e vale a segunda condição acima, então $\{u_n/\lambda_n\}$ é uma sequência limitada e $A(u_n/\lambda_n) = u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Como $A$ é compacto, a sequência $\{u_n\}$ deve ter uma subsequência convergente, mas a ortonormalidade de $\{u_n\}$ nos dá $\|u_n - u_m\|^2 = 2$, e obtemos então uma contradição. Portanto se a sequência é infinita, devemos ter $\lambda_n \to 0$.

Se a sequência termina no passo $n$, então (5.16) se reduz a (5.15). Caso contrário, para $u \in H$ definamos

$$v_n = u - \sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k \rangle u_k,$$

e como antes $v_n \in H_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Além disso obtemos

$$\|v_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle u, u_k \rangle|^2 \leqslant \|u\|^2.$$

Como $|\lambda_{n+1}|$ é a norma da restrição de $A$ ao espaço $H_{n+1}$ temos

$$\|Av_n\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \|v_n\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \|u\|,$$

e portanto $Av_n \to 0$, pois $\lambda_n \to 0$. Mas

$$Av_n = Au - \sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k \rangle Au_k = Au - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k,$$

e obtemos (5.16) (note que $\langle Au, u_k \rangle = \langle u, Au_k \rangle = \lambda_k \langle u, u_k \rangle$).

Se $\lambda$ é um autovalor não-nulo de $A$ que não está na sequência $\{\lambda_n\}$ então existe um autovetor unitário $u$ correspondente que deve ser ortogonal a $u_n$ para todo $n$ (veja o Exercício 5.6). Mas então, por (5.16), obtemos $Au = 0$, o que contradiz $Au = \lambda u \neq 0$.

Um mesmo autovalor não pode se repetir infinitas vezes, pois $\lambda_n \to 0$. Suponha que $\lambda_k$ apareça $p$ vezes. Então temos pelo menos $p$ autovetores ortonormais, e portanto o autoespaço associado a $\lambda_k$ é, pelo menos, $p$-dimensional. Se a dimensão for maior do que $p$, então para este tal $\lambda_k$ existiria um vetor unitário $u$ com $Au = \lambda_k u$ e $\langle u, u_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, o que não pode acontecer pelo mesmo argumento do parágrafo acima. $\square$

O próximo teorema descreve a inversa de $\lambda - A$.

**Teorema 5.3.3.** *Sejam* $H$, $A$, $\{\lambda_n\}$ *e* $\{u_n\}$ *como no Teorema 5.3.2. Então se* $\lambda \neq 0$ *e* $\lambda \neq \lambda_n$ *para todo* $n$, $\lambda - A$ *tem uma inversa em* $\mathcal{L}(H)$ *e para cada* $v \in H$ *temos*

$$(\lambda - A)^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v + \frac{1}{\lambda}\sum \lambda_k \frac{\langle v, u_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}u_k. \tag{5.17}$$

*Demonstração.* Assuma que tenhamos $(\lambda - A)u = v$. Então $\lambda u = v + Au$, e de (5.16) temos

$$\lambda u = v + \sum \lambda_k \langle u, u_k\rangle u_k.$$

Tomando o produto interno desta expressão com $u_j$ obtemos

$$\lambda \langle u, u_j\rangle = \langle v, u_j\rangle + \lambda_j \langle u, u_j\rangle,$$

e portanto

$$\langle u, u_j\rangle = \frac{\langle v, u_j\rangle}{\lambda - \lambda_j} \quad \text{para cada } j \in \mathbb{N}^*.$$

Desse modo

$$\lambda u = v + \sum \lambda_k \frac{\langle v, u_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}u_k,$$

o que prova (5.17). Isto prova também que a solução do problema $(\lambda - A)u = v$, quando existe, é única. Assumimos por enquanto que a série em (5.17) converge. Nesse caso, o elemento $u$ definido pelo lado direito de (5.17) satisfaz $(\lambda - A)u = v$, pois

$$(\lambda - A)u = v - \frac{1}{\lambda}Av + \sum \lambda_k \frac{\langle v, u_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}u_k - \frac{1}{\lambda}\sum \lambda_k \frac{\langle v, u_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}Au_k$$

e usando (5.16) para $Av$ e o fato de que $Au_k = \lambda_k u_k$ temos

$$\begin{aligned}(\lambda - A)u &= v - \frac{1}{\lambda}\sum \lambda_k \langle v, u_k\rangle u_k + \sum \lambda_k \frac{\langle v, u_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}u_k - \frac{1}{\lambda}\sum \lambda_k \frac{\langle v, u_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}Au_k \\ &= v + \sum \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda} + \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{\lambda(\lambda - \lambda_k)}\right)\langle v, u_k\rangle u_k = v.\end{aligned}$$

Mostremos então que a série em (5.17) realmente converge, e para tanto, defina

$$\alpha = \sup_k \left|\frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}\right| \quad \text{e} \quad \beta = \sup_k \frac{1}{|\lambda - \lambda_k|}.$$

Como $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_k$ para todo $k$, e $\lambda_k \to 0$ no caso infinito, vemos que $0 < \alpha, \beta < \infty$. Defina também

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\langle v, u_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}u_k \quad \text{e} \quad z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}u_k.$$

Para $n > m$ temos

$$\|w_n - w_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \left| \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \right|^2 |\langle v, u_k \rangle|^2 \leqslant \alpha^2 \sum_{k=m+1}^{n} |\langle v, u_k \rangle|^2.$$

Segue da desigualdade de Bessel[1] que $\sum_k |\langle v, u_k \rangle|^2$ é convergente, e portanto $\{w_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Se H fosse um espaço de Hilbert, teríamos terminado. Quando H não é completo, vemos que

$$\|z_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle v, u_k \rangle|^2}{|\lambda - \lambda_k|^2} \leqslant \beta^2 \sum_{k=1}^{n} |\langle v, u_k \rangle|^2 \leqslant \beta^2 \|v\|^2,$$

onde usamos novamente a desigualdade de Bessel. Assim $\{z_n\}$ é limitada, e claramente $Az_n = w_n$. Como A é compacto, $\{w_n\}$ deve conter uma subsequência convergente, e sendo $\{w_n\}$ uma sequência de Cauchy, ela deve convergir, e completamos a demonstração de que a série em (5.17) é convergente.

Finalmente de (5.17) vemos que

$$\|(\lambda - A)^{-1} v\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \|v\| + \frac{1}{|\lambda|} \alpha \|v\|,$$

e portanto $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1 + \alpha}{|\lambda|}.$$

□

Encerramos a discussão acima considerando o núcleo de A. A situação é bem mais clara quando H é um espaço de Hilbert.

**Teorema 5.3.4.**

(a) *Sejam* $H$, $A$, $\{\lambda_n\}$ e $\{u_n\}$ *como no Teorema 5.3.2, e considere* $M = \overline{\operatorname{span}\{u_1, u_2, \cdots\}}$. *Então* $M^\perp = \ker(A)$. *Assim o conjunto ortonormal* $\{u_n\}$ *é completo*[2] *se, e somente se,* $\ker(A) = \{0\}$, *isto é, se* 0 *não é um autovalor de* A.

(b) *Se* H *é um espaço de Hilbert, temos* $H = M \oplus \ker(A)$. *Além disso* $\operatorname{Im}(A)$ *consiste exatamente dos elementos* $v$ *de* M *para os quais a série*

$$\sum \frac{\langle v, u_k \rangle}{\lambda_k} u_k \tag{5.18}$$

*é convergente.*

[1]Se $\{u_k\}$ é um conjunto ortonormal em H, então para cada $v \in H$ temos $\sum_k |\langle v, u_k \rangle|^2 \leqslant \|v\|^2$ (veja [17, (II.6-13)]).

[2]Um conjunto ortonormal S num espaço vetorial H com produto interno é dito **completo** se não existe nenhum outro conjunto ortonormal $S'$ tal que $S \subset S'$. Em outras palavras, S é maximal com respeito à propriedade de ser ortonormal (veja [17, Page 83]).

*Demonstração.* (a) Veja que de (5.16) obtemos $M^{\perp} \subset \ker(A)$. Por outro lado, se $z \in \ker(A)$ então

$$\langle z, u_k \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \langle z, Au_k \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \langle Az, u_k \rangle = 0,$$

e portanto $z \in M^{\perp}$. Portanto $M^{\perp} = \ker(A)$. O conjunto ortonormal $\{u_n\}$ é completo se, e somente se, $M^{\perp} = \{0\}$, o que mostra que $\ker(A) = \{0\}$.

(b) Quando H é um espaco de Hilbert, sabemos que $H = M \oplus M^{\perp} = M \oplus \ker(A)$ (veja [17, Theorem II.7.4]). Agora assuma que $v = Au$ para algum $u \in H$. Então por (5.16) sabemos que $v \in M$. Além disso, da ortonormalidade de $\{u_n\}$ segue que $\langle v, u_k \rangle = \lambda_k \langle u, u_k \rangle$. Se escrevemos $u = z + w$ com $z \in M$ e $w \in \ker(A)$, temos $\langle u, u_k \rangle = \langle z, u_k \rangle$ pois $w \in M^{\perp}$. Portanto, de [17, Theorem II.6.9], obtemos

$$z = \sum \langle z, u_k \rangle u_k,$$

e portanto

$$z = \sum \langle u, u_k \rangle u_k = \sum \frac{\langle v, u_k \rangle}{\lambda_k} u_k,$$

e a série deve ser necessariamente convergente se for infinita. Reciprocamente, se $v \in M$ e a série (5.18) é convergente, denotamos por $u$ sua soma. Assim

$$Au = \sum \frac{\langle v, u_k \rangle}{\lambda_k} Au_k = \sum \langle v, u_k \rangle u_k \overset{(*)}{=} v,$$

e portanto $v \in \operatorname{Im}(A)$, onde em $(*)$ usamos novamente o [17, Theorem II.6.9], e a prova está completa. □

Podemos fazer essa decomposição de outra maneira, e para isso, no que segue, assumiremos que H é um espaço de Hilbert. Como consequência do Corolário 5.2.9 temos o seguinte resultado:

**Proposição 5.3.5.** *Sejam* $A\colon D(A) \subset H \to H$ *um operador autoadjunto,* $\xi \in \sigma(A)$ *um ponto isolado do espectro de* $A$ *e* $P_\sigma$ *a projeção associada ao conjunto espectral* $\sigma = \{\xi\}$. *Então*

(i) $\xi \in \sigma_p(A)$;

(ii) *a restrição* $A_\sigma$ *de* $A$ *à* $X_\sigma = \operatorname{Im}(P_\sigma)$ *é* $\xi I_\sigma$, *onde* $I_\sigma$ *é a identidade em* $X_\sigma$;

(iii) $\operatorname{Im}(P_\sigma) = \ker(\xi - A)$.

*Demonstração.* Primeiramente note que $\operatorname{Im}(P_\sigma) \neq \{0\}$. De fato, se $\operatorname{Im}(P_\sigma) = \{0\}$ então $A_\sigma = 0$, o que implicaria que $\sigma(A_\sigma) = \varnothing$ (uma contradição pois $\sigma(A_\sigma) = \sigma = \{\xi\} \neq \varnothing$). Do fato que $\sigma(\xi - A_\sigma) = \{0\}$, segue do Corolário 5.2.9 que $A_\sigma = \xi I_\sigma$ (o que prova (ii)). Disto segue $\xi$ é um autovalor de $A$ (o que prova (i)) e, além disso, que

$\ker(\xi - A) \supset \operatorname{Im}(P_\sigma)$. Para concluir a prova, veja que se $x \in \ker(\xi - A)$, $r > 0$ é tal que $\overline{B}^{\mathbb{C}}_r(\xi) \setminus \{\xi\} \subset \rho(A)$, e $\gamma(t) = \xi + re^{2\pi i t}$ para $t \in [0,1]$, temos

$$P_\sigma x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = x$$

pois $(\lambda - A)^{-1} = \frac{I-(\xi-A)(\lambda-A)^{-1}}{\lambda-\xi}$. Logo $x \in \operatorname{Im}(P_\sigma)$ mostrando o item (iii) e concluindo a prova. □

Lembre-se que uma projeção P num espaço de Hilbert H é dita **ortogonal** se $\langle u, v\rangle = 0$ para todos $u \in \operatorname{Im}(P_\sigma)$ e $v \in \ker(P_\sigma)$.

**Exercício 5.16.** Seja $A$ um operador autoadjunto. Se $\sigma$ é um conjunto espectral de $A$, mostre que $P_\sigma$ é autoadjunta e conclua que $P_\sigma$ é uma projeção ortogonal.

Seja $A \in \mathcal{K}(H)$ um operador autoadjunto. Segue da Proposição 5.3.5, do Teorema 2.4.12 e do Teorema 2.4.15 que todo ponto em $\sigma(A) \setminus \{0\}$ é um autovalor isolado com multiplicidade finita. Se $\sigma(A)\setminus\{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$, definimos

$$P_n = P_{\{\lambda_n\}} \quad \text{e} \quad H_n = \operatorname{Im}(P_n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}^*.$$

Como $H_0 = \ker(A)$ é um subespaço fechado de H, e H é um espaço de Hilbert, ele possui um complemento ortogonal $Z = \ker(A)^\perp$. Podemos então considerar a projeção ortogonal $P_0 \colon H \to H$ dada por $P_0 x = x_0$, onde $x = x_0 + z \in \ker(A) \oplus Z$ (e assim $\operatorname{Im}(P_0) = \ker(A)$). Notemos ainda que $AP_j = P_j A$ e que $P_j P_k = \delta_{jk}$ para todos $j,k \in \mathbb{N}$.

Note que a série (5.16) é convergente independente do seu rearranjo (aplique [17, Theorem II.6.9] para a série $\sum \langle v, u_k\rangle u_k$ onde $v = Au$). Vamos então rearranjar esta série de modo que todos os termos para os quais $\lambda_k$ assume um mesmo valor sejam trazidos juntos, para que eles ocorram consecutivamente nesta série. Assumimos então que a notação foi arranjada para que isto seja verdade. Para cada $\lambda_k$, defina

$$Q_k u = \sum_{\lambda_i = \lambda_k} \langle u, u_i\rangle u_i.$$

Assim $Q_k = Q_j$ se $j = k$.

**Exercício 5.17.** Verifique que $Q_k Q_j = 0$ se $\lambda_j \neq \lambda_k$, que $Q_k^2 = Q_k$ e que $Q_k$ é autoadjunta.

Podemos então escrever a série (5.16) na forma

$$Au = \tilde{\sum} \lambda_k Q_k u,$$

onde $\tilde{\sum}$ indica que a soma está feito sobre os valores *distintos* de $\lambda_k$. Além disso, podemos reescrever (5.17) na forma

$$(\lambda - A)^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v + \frac{1}{\lambda}\tilde{\sum} \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} Q_k v.$$

Esta expansão mostra, em particular, que $\lambda_k$ é um polo simples de $(\lambda - A)^{-1}v$, com resíduo $Q_k v$.

**Proposição 5.3.6.** $Q_k = P_k$, *onde* $P_k$ *é a projeção espectral do conjunto* $\sigma = \{\lambda_k\}$ *definida acima.*

*Demonstração.* Veja que se $r > 0$ é tal que $\overline{B}^{\mathbb{C}}_r(\lambda_k) \setminus \{\lambda_k\} \subset \rho(A)$ e $\gamma(t) = \lambda_k + re^{2\pi i t}$, com $t \in [0, 1]$, então

$$P_k v = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda = Q_k v,$$

pelo Teorema dos Resíduos (veja [4, Theorem V.2.2]). □

Usando a decomposição $H = M \oplus \ker(A)$, escrevemos $u = w + z$ onde $w \in M$ e $z \in \ker(A) = M^\perp$. Temos

$$P_k u = Q_k u = Q_k w + \underbrace{Q_k z}_{=0} = Q_k w = P_k w,$$

e

$$w = \tilde{\sum} Q_k u = \tilde{\sum} P_k u.$$

Além disso $P_0 u = z$ e assim

$$u = \tilde{\sum} P_k u + P_0 u = \sum_{n=0}^{\infty} P_n u.$$

Logo para cada $u \in H$ temos

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n u,$$

pois $AP_0 = 0$ e $AP_n = \lambda_n$ em $H_n$.

**Exercício 5.18.** Sejam $A$, $\{\lambda_j\}$ e $\{u_k\}$ como no Teorema 5.3.2. Se $\lambda = \lambda_j$ para algum $j$, mostre que a imagem de $\lambda - A$ consiste dos vetores que são ortogonais ao autoespaço correspondente a $\lambda_j$ (isto é, $\mathrm{Im}(\lambda_j - A) = H_j^\perp$). Para um vetor $v$ desta forma, a solução geral de $(\lambda - A)u = v$ é dada por

$$u = \frac{1}{\lambda} v + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_k \neq \lambda_j} \lambda_k \frac{\langle v, u_k \rangle}{\lambda - \lambda_k} u_k + w,$$

onde $w$ é um vetor arbitrário do autoespaço correspondente a $\lambda_j$.

**Exercício 5.19.** Seja $H$ um espaço de Hilbert, $\{u_k\}$ um subconjunto ortonormal e $\{\lambda_k\}$ uma sequência qualquer de números reais com $\lambda_n \to 0$. Defina $A$ por

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k.$$

Então $A$ é um operador autoadjunto e compacto. Se $\lambda_k \geqslant 0$ para todo $k$, então $\langle Au, u \rangle \geqslant 0$ para todo $u \in H$.

### $\ast$ Operadores Autoadjuntos com Resolvente Compacto

Assumimos aqui que $H$ é um espaço vetorial com produto interno (não necessariamente completo) e que $H$ tenha dimensão *infinita*.

**Teorema 5.3.7.** *Assuma que $A\colon D(A) \subset H \to H$ seja um operador linear autoadjunto bijetor e que $A^{-1} \in \mathcal{K}(H)$. Considere as sequências $\{\lambda_k\}$ e $\{u_k\}$ associadas a $A^{-1}$ dadas no Teorema 5.3.2, e defina $\mu_k = 1/\lambda_k$ para todo $k$. Então $\{\mu_n\}$ é infinita e $|\mu_k| \to \infty$. O conjunto ortonormal $\{u_k\}$ é completo e para cada $u \in D(A)$ temos*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k \rangle \, u_k. \tag{5.19}$$

*Um ponto $\mu$ está em $\sigma(A)$ se, e somente se, $\mu = \mu_k$ para algum $k$. Temos $Au_k = \mu_k u_k$ para todo $k$ e, se $\mu \in \rho(A)$ então*

$$(\mu - A)^{-1} v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\mu - \mu_k} u_k, \tag{5.20}$$

*para cada $v \in H$, e este operador é compacto.*

*Demonstração.* Claramente $A^{-1}$ é autoadjunto pois $A$ o é. Além disso, segue do Exercício 2.1.6 que $A$ é fechado. Assim podemos aplicar os resultados da seção acima para $A^{-1}$. Observe que $A^{-1}u_k = \lambda_k u_k$ se, e somente se, $Au_k = \mu_k u_k$. O conjunto ortonormal $\{u_k\}$ é completo, pelo Teorema 5.3.4, já que $0$ não é autovalor de $A$. O conjunto ortonormal então deve ser infinito, pois $H$ tem dimensão infinita (pois caso contrário, $0$ deveria ser um autovalor de $A$, já que seria um ponto isolado do espectro de $A$). Portanto $\lambda_k \to 0$, e assim $|\mu_k| \to \infty$. Temos $\operatorname{Im}(A^{-1}) = D(A)$, e como cada $u \in D(A)$ é da forma $u = A^{-1}v$, (5.19) é uma consequência direta de (5.16).

Sabemos que $0 \in \rho(A)$ e que $\mu_k \in \sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ para todo $k$. Seja então $\mu \neq 0$ e $\mu \neq \mu_k$ para todo $k$. Para simplificação, denotemos $B = A^{-1}$. Veja que se $u \in D(A)$ e $(\mu - A)u = v$ obtemos $\mu Bu - u = Bv$. Assim

$$\left(B - \frac{1}{\mu}\right) u = \frac{1}{\mu} Bv$$

e logo

$$u = \frac{1}{\mu} \left(B - \frac{1}{\mu}\right)^{-1} Bv. \tag{5.21}$$

Por outro lado, dado $v \in H$, definindo $u$ por (5.21) vemos que $u \in D(A)$ e que $(\mu - A)u = v$. Portanto $\mu \in \rho(A)$ e

$$(\mu - A)^{-1} = \frac{1}{\mu} \left(B - \frac{1}{\mu}\right)^{-1} B = \frac{1}{\mu} B \left(B - \frac{1}{\mu}\right)^{-1},$$

onde na última igualdade usamos o fato de que $B$ comuta com $\left(B - \frac{1}{\mu}\right)^{-1}$.

Nos resta mostrar (5.20). Para isso, veja que de (5.17) temos

$$\left(\frac{1}{\mu} - B\right)^{-1} \nu = \mu\nu + \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \nu, u_k \rangle}{\mu_k - \mu} u_k,$$

e portanto

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1}\nu &= -B\nu + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \nu, u_k \rangle}{\mu_k(\mu - \mu_k)} u_k \\ &\overset{(5.16)}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \nu, u_k \rangle}{\mu_k} u_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \nu, u_k \rangle}{\mu_k(\mu - \mu_k)} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \nu, u_k \rangle}{\mu - \mu_k} u_k.\end{aligned}$$

Para $\mu = 0$, (5.20) se reduz a (5.16) para $A^{-1}$, e a demonstração está completa. □

**Corolário 5.3.8.** *Assumam válidas as condições do Teorema 5.3.7 e que $H$ é um espaço de Hilbert. Então para cada $u \in D(A)$ temos*

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle u, u_k \rangle u_k. \tag{5.22}$$

*Demonstração.* Defina $w_n = \sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k \rangle u_k$. Temos $w_n \in D(A)$, $w_n \to u$ e

$$Aw_n = \sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k \rangle Au_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \langle u, u_k \rangle u_k.$$

Do Teorema 5.3.4 segue que para cada $u \in D(A)$ a série $\sum \mu_k \langle u, u_k \rangle u_k$ é convergente. Assim, $Aw_n \to w$ onde $w \in H$ é dado por

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle u, u_k \rangle u_k.$$

Como $A$ é fechado, obtemos $Au = w$, o que prova (5.22). □

**Exemplo 5.3.9** (Continuação do Exemplo 5.2.16). Considerando a extensão autoadjunta do Lapaciano $A\colon D(A) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$, onde $D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$, os resultados dessa seção nos dão

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \langle u, u_k \rangle_{L^2(0,\pi)} u_k,$$

para toda $u \in D(A)$, onde $u_k(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(kt)$.

# CAPÍTULO 6

# Potências Fracionárias

## 6.1 Introdução

Este capítulo será dedicado à extensão do cálculo operacional desenvolvido na Seção 3.2 para incluir funções do tipo $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \ni \lambda \mapsto \lambda^\alpha \in \mathbb{C}$, que *não estão* em $\mathcal{U}_\infty(A)$.

As *potências fracionárias de operadores setoriais* desempenham papel fundamental na teoria de existência de soluções para equações diferenciais parciais não lineares do tipo parabólico e a análise do comportamento assintótico de soluções para estes problemas.

Vamos começar esta seção motivando a definição de potências fracionárias de operadores fechados. Em primeiro lugar observe que se $\gamma$ é uma curva fechada, retificável e simples em $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ e $n(\gamma; a)$ denota o índice da curva $\gamma$ em $a \in \mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$, da Fórmula Integral de Cauchy temos

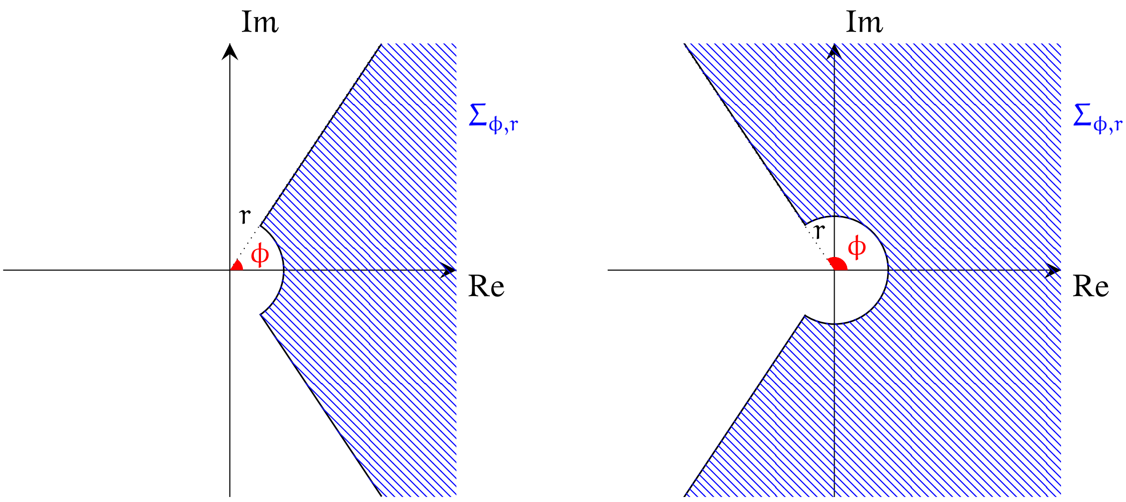
$$a^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - a} d\lambda$$

para todos $\alpha \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$ com $n(\gamma; a) = 1$ (veja [4], por exemplo). Aqui $\lambda^\alpha = e^{\alpha \log \lambda}$ e $\log \lambda$ é o ramo principal do logaritmo complexo.

Se $A \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e $\gamma$ é uma curva fechada, retificável e simples em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que $n(\gamma; a) = 1$ para todo $a \in \sigma(A)$, definimos na Seção 3.1 (em analogia com a observação acima)

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Claramente $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$.




*Setor* $\Sigma_{\phi,r}$ *para* $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. *Setor* $\Sigma_{\phi,r}$ *para* $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$.

Figura 6.1: Exemplos de setores.

**Exercício 6.1.** Mostre que:

(a) $I^\alpha = I$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$;

(b) $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(c) $A^n$ coincide com a definição usual (a $n$-ésima iterada de $A$).

**Dica:** Veja que se $\alpha = n$, a curva $\gamma$ não precisa evitar o eixo real negativo pois $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda^n \in \mathbb{C}$ é uma função inteira. Podemos então considerar $\gamma$ como sendo um círculo de raio $R > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ orientado positivamente. Use então (2.4) e o Teorema dos Resíduos para concluir o resultado.

No que se segue buscamos expressões equivalentes de $A^\alpha$ que façam sentido para uma classe de operadores fechados mais ampla que a dos operadores limitados. Para $0 < \phi < \pi$ e $r > 0$ defina o **setor** (veja os exemplos na Figura 6.1):

$$\Sigma_{\phi,r} = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\arg \lambda| \leqslant \phi\} \setminus B_r^{\mathbb{C}}(0).$$

Como $A \in \mathcal{L}(X)$ (portanto $\sigma(A)$ é compacto) e $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, podemos escolher $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ e $0 < r < R$ tais que $\sigma(A) \subset K = \Sigma_{\phi,r} \cap B_R^{\mathbb{C}}(0)$ (veja Figura 6.2). Denote por $\Gamma_R$ e $\gamma_R$ as porções da fronteira de $K$ como na Figura 6.2, com $\Gamma_R$ orientada no sentido da parte imaginária decrescente e $\gamma_R$ orientada no sentido antihorário. Com isto, o traço da curva $\Gamma_R \cup \gamma_R$ é a fronteira de $K$ orientada positivamente.

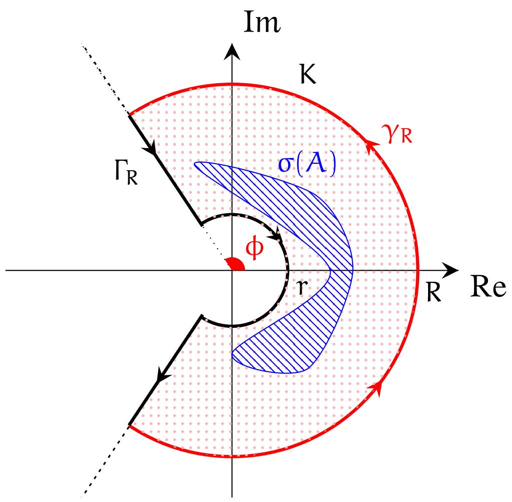



Figura 6.2: O conjunto $K$ e as curvas $\Gamma_R$ e $\gamma_R$.

Escolhemos $R \geqslant 2\|A\|_{\mathcal{L}(X)}$. Com isto, temos

$$\begin{aligned} A^\alpha &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R \cup \gamma_R} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Notemos primeiramente que para $|\lambda| = R \geqslant 2\|A\|$, usando (2.4), temos

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A^n\Big\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} R^{-n}\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{1 - R^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}} \leqslant 2. \tag{6.2}$$

Se $\mathrm{Re}\alpha < 0$, mostremos que a integral sobre $\gamma_R$ em (6.1) converge para zero quando $R \to \infty$. De fato,

$$\begin{aligned} \Big\|\int_{\gamma_R} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda\Big\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \int_{-\phi}^{\phi} R^{\mathrm{Re}\alpha} e^{-\theta \mathrm{Im}\alpha} \|(Re^{i\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} R\, d\theta \\ &\overset{(6.2)}{\leqslant} 2R^{\mathrm{Re}\alpha} \int_{-\phi}^{\phi} e^{-\theta \mathrm{Im}\alpha} d\theta \to 0 \quad \text{quando } R \to \infty. \end{aligned}$$

Assim, se $\Gamma$ denota a fronteira de $\Sigma_{\phi,r}$ orientada no sentido da parte imaginária decrescente (como na Figura 6.3), os cálculos acima mostram que

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda^\alpha(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad \text{para } \mathrm{Re}\alpha < 0. \tag{6.3}$$

**Observação 6.1.1.** Observe que a convergência da integral em (6.3) somente depende da estimativa em (6.2) e não do operador $A$. Isto segue facilmente se parametrizamos

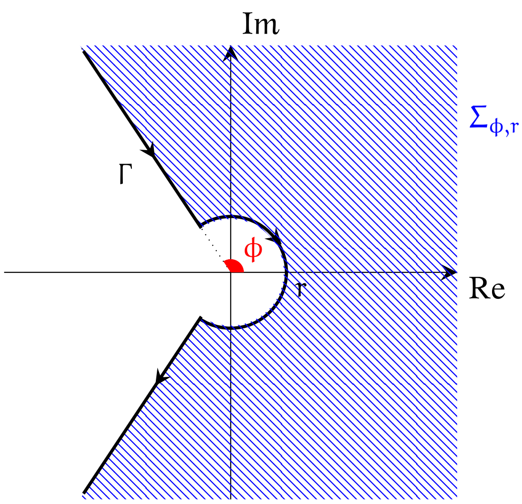



Figura 6.3: Curva $\Gamma$.

$\Gamma$. Vamos apenas considerar a parte $\Gamma_+$ de $\Gamma$ com parte imaginária positiva e fora da bola de raio $r$ (e para simplificar a parametrização, consideramos a orientação da parte imaginária crescente, o que não altera a convergência da integral), isto é

$$\Gamma_+(t) = te^{i\phi} \quad \text{para } t \in [r, \infty).$$

Então

$$\left\| \int_{\Gamma_+} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\| \leqslant \int_r^\infty t^{\mathrm{Re}\alpha} e^{-\phi \mathrm{Im}\alpha} \|(te^{i\phi} - A)^{-1}\| dt.$$

Como o operador resolvente é contínuo sobre o traço de $\Gamma$, a convergência da integral acima segue somente de (6.2). Ainda mais, esta convergência é uniforme para $\alpha$ em compactos de $\{\nu \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\nu < 0\}$. A convergência da integral sobre a parte de $\Gamma$ com parte imaginária negativa segue de forma semelhante.

**Exercício 6.2.** Conclua a convergência de $\int_{\Gamma_+} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda$ usando a estimativa (6.2).

## 6.2 Operadores de tipo positivo

A Observação 6.1.1 nos indica uma classe mais geral de operadores $A$ para os quais podemos definir as potências $A^\alpha$ com $\mathrm{Re}\alpha < 0$, a saber, a classe dos operadores $A \colon D(A) \subset X \to X$ que são fechados, densamente definidos, para os quais existem $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ e $r > 0$ tais que $\sigma(A) \subset \Sigma_{\phi,r}$, de maneira que $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ é limitada em $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\phi,r}$.

**Exercício 6.3.** Seja $A \colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado, densamente definido, para o qual existem $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ e $r > 0$ tais que $\sigma(A) \subset \Sigma_{\phi,r}$. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes:

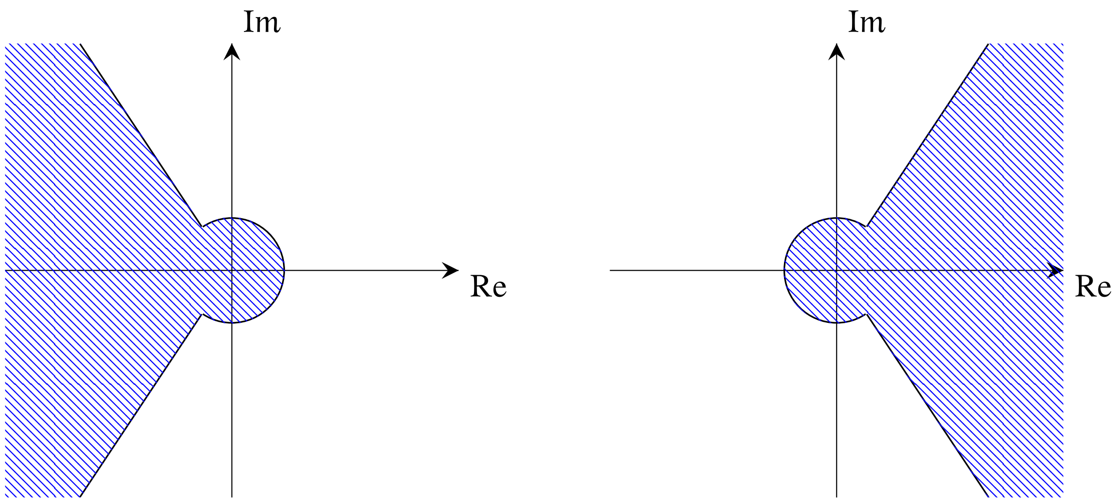



Figura 6.4: O complementar do setor $\Sigma_{\phi,r}$ (à esquerda) e seu reflexo com respeito à origem (à direita).

(a) $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ é limitada em $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\phi,r}$.

(b) $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é limitada em $-\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\phi,r}$.

(c) $(1+|\lambda|)(\lambda + A)^{-1}$ é limitada em $-\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\phi,r}$.

$*$ Veja a Figura 6.4.

Agora faremos o seguinte: assuma que $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador fechado e densamente definido com $\rho(-A) \supset [0,\infty)$, e que existe $M \geqslant 1$ tal que $(1+s)\|(s+A)^{-1}\| \leqslant M$ para todo $s \in [0,\infty)$. Defina $\phi = \pi - \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2M})$ (note que $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$).

Mostraremos (veja o Teorema 6.2.2 e o Exercício 6.5) que $\rho(-A) \supset -\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\phi,\frac{1}{2M}}$ e que $(1+|\lambda|)(\lambda+A)^{-1}$ é limitado em $-\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\phi,\frac{1}{2M}}$. Portanto $A$ satisfaz o item (c) do Exercício 6.3, e assim satisfaz todos os itens, o que nos permitirá definir $A^\alpha$ para $\operatorname{Re}\alpha < 0$.

**Definição 6.2.1.** Seja $X$ um espaço de Banach. Um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$ é dito de **tipo positivo** com constante $M \geqslant 1$ (veja [1]) se $A$ é fechado, densamente definido, $[0,\infty) \subset \rho(-A)$ e

$$(1+s)\|(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M \quad \text{para todo } s \geqslant 0. \tag{6.4}$$

O conjunto dos operadores de tipo positivo em $X$ será denotado por $\mathcal{P}(X)$. Se $A \in \mathcal{P}(X)$ e $M \geqslant 1$ é tal que vale (6.4), diremos que $A$ **tem constante** $M$.

**Exercício 6.4.** Sejam $H$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ e $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador linear autoadjunto e positivo, com $0 \in \rho(A)$. Mostre que $A$ é de tipo positivo.

**Dica:** Use o Exemplo 5.2.6.

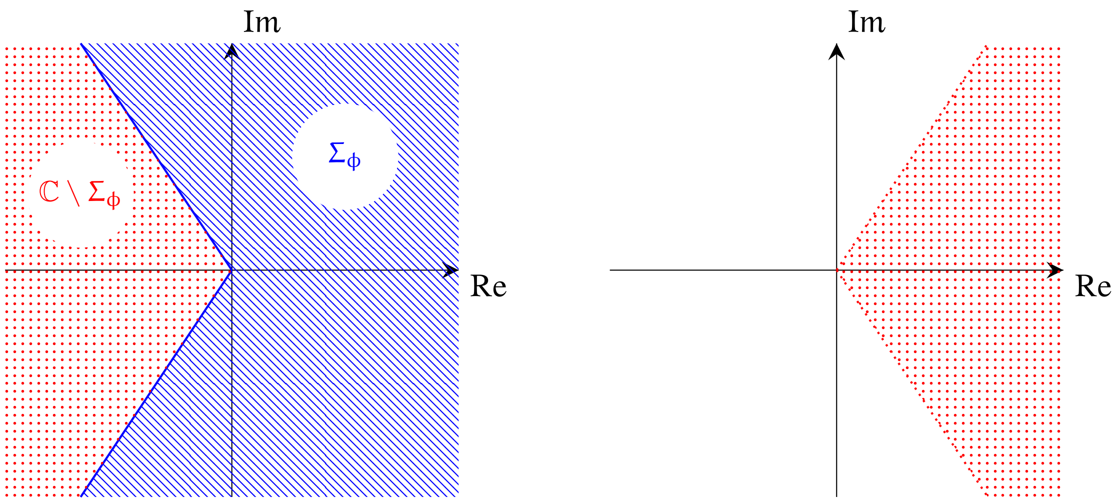



Figura 6.5: Os conjuntos $\Sigma_\phi$, $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\phi$ e $-\mathbb{C} \setminus \Sigma_\phi$ (à direita).

**Teorema 6.2.2.** *Considere $A \in \mathcal{P}(X)$ com constante $M$. Defina $\Lambda_M$ como o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais existe $s \geqslant 0$ tal que $|\lambda - s| \leqslant \frac{1+s}{2M}$ (veja Figura 6.6), isto é*

$$\Lambda_M = \cup_{s\geqslant 0} \overline{B}^{\mathbb{C}}_{\frac{1+s}{2M}}(s).$$

*Então $\Lambda_M \subset \rho(-A)$ e*

$$(1+|\lambda|)\|(\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2M+1 \quad \textit{para todo } \lambda \in \Lambda_M. \tag{6.5}$$

*Demonstração.* Dados $s \geqslant 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\lambda - s| \leqslant \frac{1+s}{2M}$, segue de $\lambda + A = (s+A)(I + (\lambda - s)(s+A)^{-1})$ que $\lambda \in \rho(-A)$ e

$$\|(\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|[I+(\lambda-s)(s+A)^{-1}]^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M}{1+s}.$$

Como $|\lambda| - s \leqslant |\lambda - s|$, temos $1 \leqslant \frac{1+s+|\lambda-s|}{1+|\lambda|}$ e portanto

$$\|(\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M}{1+|\lambda|}\frac{1+s+|\lambda-s|}{1+s} \leqslant \frac{2M}{1+|\lambda|}\left(1+\frac{1}{2M}\right) = \frac{2M+1}{1+|\lambda|}.$$

Com isto mostramos que $\Lambda_M \subset \rho(-A)$ e que (6.5) vale. □

**Exercício 6.5.** Com as condições do Teorema 6.2.2, defina

$$\theta_M = \text{arcsen}(1/2M). \tag{6.6}$$

Mostre que as retas $\lambda_1(t) = te^{i\theta_M} + i\frac{1}{2M}$ e $\lambda_2(t) = te^{-i\theta_M} - i\frac{1}{2M}$ para $t \geqslant 0$ estão contidas em $\Lambda_M$. Conclua que

$$-\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\phi,\frac{1}{2M}} \subset \Lambda_M,$$

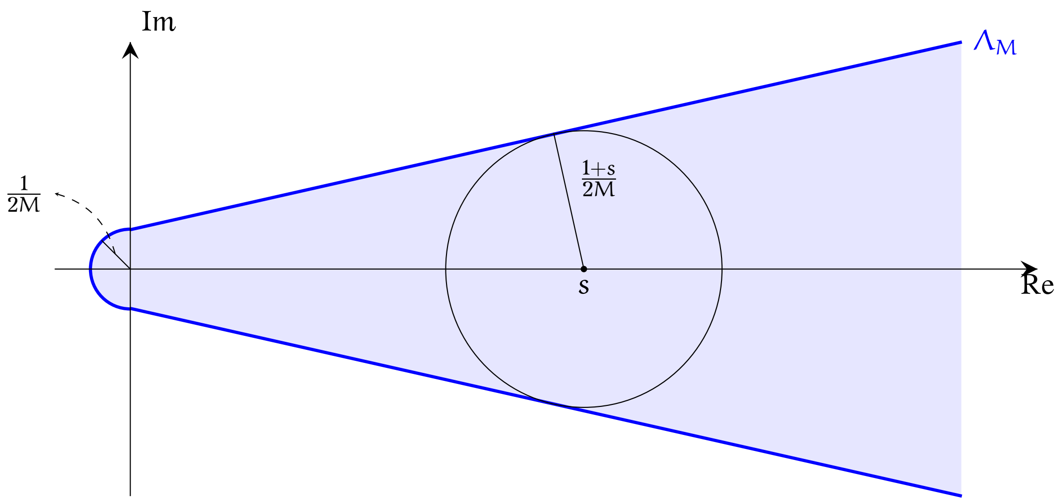



Figura 6.6: O conjunto $\Lambda_M$.

onde $\phi = \pi - \theta_M$.
**Dica:** Escreva as retas na sua equação geral em coordenadas cartesianas e calcule a distância de um ponto $(s, 0)$, $s \geqslant 0$, até as retas $\lambda_1$ e $\lambda_2$. Se $\lambda_1$ tem equação geral $ax + by + c = 0$ então a distância do ponto $(u, v)$ à $\lambda_1$ é dada por

$$d((u, v), \lambda_1) = \frac{au + bv + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Com isto para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\alpha < 0$, definimos

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_-} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \tag{6.7}$$

onde $\Gamma$ é qualquer curva simples em $\Lambda_M \setminus [0, \infty)$ suave por partes indo de $\infty e^{-i\theta}$ para $\infty e^{i\theta}$, com $\theta \in (0, \theta_M]$ (como na Figura 6.7), evitando $[0, \infty)$, e $\Gamma_- = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon -\lambda \in \Gamma\}$. Segue de (6.5) que $A^\alpha$ está bem definido em $\mathcal{L}(X)$, pois a integral é convergente em $\mathcal{L}(X)$. Além disso, segue do Teorema de Cauchy que $A^\alpha$ independe da escolha de $\Gamma$.

**Lema 6.2.3.** *Para* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *com* $\mathrm{Re}\alpha < 0$ *e* $\mathrm{Re}\beta < 0$ *temos* $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$.

*Demonstração.* Dados $\alpha$ e $\beta$ com $\mathrm{Re}\alpha < 0$ e $\mathrm{Re}\beta < 0$, escolhemos curvas $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ como acima, de forma que $\Gamma_1$ fica à esquerda (com respeito à orientação positiva) de $\Gamma_2$. Neste ponto deixamos um exercício ao leitor:

**Exercício 6.6.** Mostre que para $\mu \in \Gamma_2$ e $\lambda \in \Gamma_1$ temos

$$\int_{\Gamma_1} \frac{(-\lambda)^\alpha}{\lambda - \mu} d\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{(-\mu)^\beta}{\mu - \lambda} d\mu = (-\lambda)^\beta.$$

Desta forma, obtemos

$$A^\alpha A^\beta = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} (-\lambda)^\alpha (-\mu)^\beta (\lambda + A)^{-1} (\mu + A)^{-1} d\mu d\lambda$$

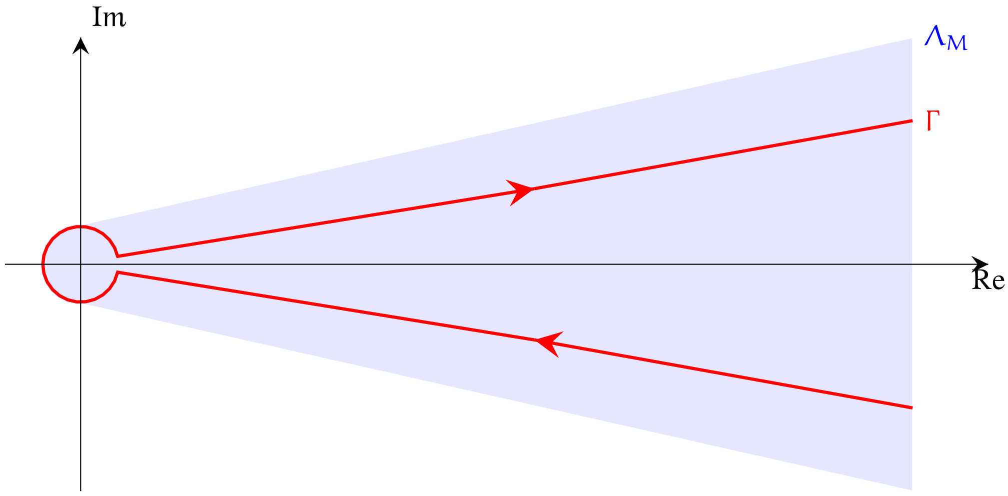



Figura 6.7: Um exemplo de curva $\Gamma$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}(-\lambda)^{\alpha}(-\mu)^{\beta}\frac{(\mu+A)^{-1}-(\lambda+A)^{-1}}{\lambda-\mu}d\mu d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(-\mu)^{\beta}(\mu+A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{(-\lambda)^{\alpha}}{\lambda-\mu}d\lambda\right)d\mu\\
&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(-\lambda)^{\alpha}(\lambda+A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{(-\mu)^{\beta}}{\mu-\lambda}d\mu\right)d\lambda.
\end{aligned}
$$

Segue do Exercício 6.6 e de (6.7) que

$$A^{\alpha}A^{\beta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(-\lambda)^{\alpha+\beta}(\lambda+A)^{-1}d\lambda = A^{\alpha+\beta},$$

e a demonstração está completa. □

É uma consequência simples dos teoremas de derivação sob o sinal de integração (veja [6, Capítulo II-§6], por exemplo) que a aplicação $z \mapsto A^z \in \mathcal{L}(X)$ é analítica em $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re} z < 0\}$.

**Exercício 6.7.** Mostre que para $\alpha = -1$, a potência fracionária $A^{\alpha}$ de $A$ coincide com $A^{-1}$ (a inversa de $A$). Conclua assim que para todo $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, a potência fracionária $A^{-m}$ de $A$ coincide com a $m$-ésima iterada de $A^{-1}$, isto é, $A^{-m} = (A^{-1})^m$.

O teorema a seguir desempenha um papel fundamental na obtenção da Desigualdade do Momento que será apresentada na próxima seção.

**Teorema 6.2.4.** *Se* $A \in \mathcal{P}(X)$ *então*

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-z}(s+A)^{-1}ds \quad \textit{para } 0 < \mathrm{Re} z < 1. \tag{6.8}$$

*Demonstração.* Fixemos $0 < \theta < \theta_M$ (veja (6.6)) e $0 < r < 1$ tal que a curva $\Gamma$ formada pelos raios $se^{i\theta}$ e $se^{-i\theta}$ para $s \geqslant r$, e a curva $re^{i\xi}$ para $2\pi - \theta \leqslant \xi \leqslant \theta$, orientada positivamente, seja tal que vale (6.7). Assim

$$\begin{aligned} A^{-z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^{-z}(\lambda + A)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_r^\infty s^{-z}e^{-i(-\pi+\theta)z}(se^{i\theta} + A)^{-1}e^{i\theta}ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_r^\infty s^{-z}e^{-i(\pi-\theta)z}(se^{-i\theta} + A)^{-1}e^{-i\theta}ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi-\theta}^\theta r^{-z}e^{-i(\pi-\xi)z}(re^{i\xi} + A)^{-1}ire^{i\xi}d\xi. \end{aligned}$$

Para a primeira integral, veja que existe uma constante $K \geqslant 1$ tal que

$$\|s^{-z}e^{-i(\theta-\pi)z}(se^{i\theta} + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{Ks^{-\mathrm{Re}z}}{1+s}.$$

Note que o lado direito desta desigualdade é uma função integrável em $[0,\infty)$ (pois $0 < \mathrm{Re}z < 1$), e essa estimativa vale para todos $s \geqslant 0$ e $\theta \in (0, \theta_M)$. Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, fazendo $r \to 0^+$ e $\theta \to 0^+$ que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_r^\infty s^{-z}e^{-i(-\pi+\theta)z}(se^{i\theta} + A)^{-1}e^{i\theta}ds \to \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_0^\infty s^{-z}(s + A)^{-1}ds.$$

Analogamente para a segunda integral, obtemos

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_r^\infty s^{-z}e^{-i(\pi-\theta)z}(se^{-i\theta} + A)^{-1}e^{-i\theta}ds \to -\frac{e^{-i\pi z}}{2\pi i}\int_0^\infty s^{-z}(s + A)^{-1}ds.$$

Para a terceira, veja que para $0 < r \leqslant 1$ temos

$$\|r^{-z}e^{-i(\pi-\xi)z}(re^{i\xi} + A)^{-1}ire^{i\xi}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{Me^{\pi\mathrm{Im}z}r^{1-\mathrm{Re}z}}{1+r} \leqslant Me^{\pi\mathrm{Im}z}.$$

A última é uma função constante (com respeito à variável $\theta$) e portanto é integrável em $[2\pi - \theta, \theta]$. Novamente, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, fazendo $r \to 0^+$ obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi-\theta}^\theta r^{-z}e^{-i(\pi-\xi)z}(re^{i\xi} + A)^{-1}ire^{i\xi}d\xi \to 0.$$

Assim obtemos

$$A^{-z} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_0^\infty s^{-z}(s + A)^{-1}ds - \frac{e^{-i\pi z}}{2\pi i}\int_0^\infty s^{-z}(s + A)^{-1}ds,$$

o que mostra (6.8). □

Agora vamos considerar o caso $A^z$ com $\operatorname{Re} z > 0$. Mas antes, faremos o seguinte lema:

**Lema 6.2.5.** *Para cada* $z \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} z > 0$, *temos* $A^{-z}$ *injetor.*

*Demonstração.* Escolhendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leqslant \operatorname{Re} z < n+1$ temos $\operatorname{Re}(n+1-z) > 0$. Se $x \in X$ é tal que $A^{-z}x = 0$ então

$$A^{-(n+1)}x = A^{-(n+1-z)-z}x = A^{-(n+1-z)}A^{-z}x = 0.$$

Como $0 \in \rho(A)$, temos $A^{-1}$ injetor, e portanto $A^{-(n+1)} = (A^{-1})^{n+1}$ também é. Logo $x = 0$, o que conclui o resultado. $\square$

Com isto, para $\operatorname{Re} z > 0$, podemos definir o operador $A^z \colon D(A^z) \subset X \to X$ por

$$D(A^z) = \operatorname{Im}(A^{-z}) \quad \text{e} \quad A^z = (A^{-z})^{-1}. \tag{6.9}$$

Segue do Exercício 2.1.6 (a) que $A^z$ é fechado.

**Exercício 6.8.** Defina

$$\|x\|_{z,1} = \|x\|_X + \|A^z x\|_X \quad \text{e} \quad \|x\|_z = \|A^z x\|_X \quad \text{para cada } x \in D(A^z).$$

(a) Mostre que $\|\cdot\|_{z,1}$ é uma norma em $D(A^z)$ e que $D(A^z)$ com esta norma é um espaço de Banach.

(b) Mostre que $\|\cdot\|_z$ é também uma norma em $D(A^z)$, e que ela é equivalente à norma $\|\cdot\|_{z,1}$.

**Dica:** Lembre-se que $A^{-z} \in \mathcal{L}(X)$.

Segue deste exercício a seguinte definição:

**Definição 6.2.6** (Espaços de Potências Fracionárias). Se $A \in \mathcal{P}(X)$, os espaços de Banach $X^z = (D(A^z), \|\cdot\|_z)$, para $\operatorname{Re} z > 0$, são chamados **espaços de potências fracionárias** associados ao operador $A$.

**Teorema 6.2.7.** *Sejam* $A \in \mathcal{P}(X)$ *e* $z, w \in \mathbb{C}$ *com* $0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$. *Então*

$$D(A^w) \subset D(A^z), \tag{6.10}$$

*e as inclusões de* $X^w$ *em* $X^z$ *e de* $X^z$ *em* $X$ *são contínuas, isto é,*

$$X^w \hookrightarrow X^z \hookrightarrow X, \quad \text{para } 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w. \tag{6.11}$$

*Demonstração.* Primeiramente note que para $x \in D(A^z) \subset X$ e $\operatorname{Re} z > 0$ temos

$$\|x\|_X = \|A^{-z}A^z x\|_X \leqslant \|A^{-z}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^z x\|_X = \|A^{-z}\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_z,$$

o que mostra que $X^z \hookrightarrow X$. Agora, para $0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$, se $x \in D(A^w)$ temos

$$x = A^{-w}A^w x = A^{-z-(w-z)}A^w x = A^{-z}A^{-(w-z)}A^w x \in \operatorname{Im}(A^{-z}) = D(A^z),$$

o que prova (6.10). Além disso para $x \in D(A^w)$ temos

$$\|x\|_z = \|A^z x\|_X = \|A^{-(w-z)}A^w x\|_X \leqslant \|A^{-(w-z)}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^w x\|_X = \|A^{-(w-z)}\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_w,$$

o que mostra que $X^w \hookrightarrow X^z$, e completa a demonstração. □

**Proposição 6.2.8.** *Sejam* $A \in \mathcal{P}(X)$ *e* $z, w \in \mathbb{C}$ *tais que* $\operatorname{Re} z \neq 0$, $\operatorname{Re} w \neq 0$ *e* $\operatorname{Re}(z+w) \neq 0$. *Então*

$$A^z A^w x = A^{z+w} x \quad \textit{para todo } x \in D(A^u), \tag{6.12}$$

*onde* $u \in \{z, w, z+w\}$ *com* $\operatorname{Re} u = \max\{\operatorname{Re} z,\ \operatorname{Re} w,\ \operatorname{Re}(z+w)\}$.

*Demonstração.* Para $z, w \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} z < 0$ e $\operatorname{Re} w < 0$, o resultado segue do Lema 6.2.3. Para $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Re} w > 0$, então $\operatorname{Re}(z+w) > 0$ e $u = z+w$. Assim para

$$x \in D(A^u) = D(A^{z+w}) \subset D(A^w) \cap D(A^z),$$

defina $y = A^{z+w}x$. Então $x = A^{-(z+w)}y = A^{-w}A^{-z}y$ implica $A^w x = A^{-z}y$. Isto mostra que $A^w x \in D(A^z)$ e que $y = A^z A^w x$. Semelhantemente $y = A^w A^z x$, ou seja,

$$A^{z+w}x = A^z A^w x = A^w A^z x \quad \text{para todo } x \in D(A^{z+w}). \tag{6.13}$$

Agora se $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w < 0$ e $\operatorname{Re}(z+w) < 0$, temos $u = z$ e para $x \in D(A^z)$ obtemos

$$A^w A^z x = A^{z+w-z}A^z x = A^{z+w}A^{-z}A^z x = A^{z+w}x.$$

Também, para todo $x \in X$ temos

$$A^z A^w x = A^z A^{-z} A^{z+w} x = A^{z+w}x.$$

Finalmente, se $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w < 0$ e $\operatorname{Re}(z+w) > 0$, temos $u = z$. Se $x \in D(A^z)$, aplicando (6.13) a $z+w$ e $-w$, temos

$$A^z x = A^{z+w}A^{-w}x = A^{-w}A^{z+w}x \quad \text{para } x \in D(A^z).$$

Assim $A^z x \in D(A^w)$ e

$$A^w A^z x = A^{z+w}x.$$

□

**Proposição 6.2.9.** *Sejam* $A \in \mathcal{P}(X)$ *e* $z, w \in \mathbb{C}$ *com* $0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$. *Então* $D(A^w)$ *é denso em* $X^z$ *e* $D(A^z)$ *é denso em* $X$, *isto é, a inclusões*

$$X^w \hookrightarrow X^z \hookrightarrow X \quad \textit{para} \ \ 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$$

*são densas.*

*Demonstração.* Dados $x \in D(A)$ e $\varepsilon > 0$, denote $y = Ax$. Como $D(A)$ é denso em $X$ (pois, por definição, um operador em $\mathcal{P}(X)$ é densamente definido), existe $u \in D(A)$ tal que $\|u - y\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}$. Assim, se $v = Au$, temos

$$\|A^{-2}v - x\|_X = \|A^{-1}u - A^{-1}y\|_X \leqslant \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|u - y\|_X \leqslant \varepsilon.$$

Como $A^{-2}v \in D(A^2)$, obtemos $D(A) \subset \overline{D(A^2)}$. Portanto $X = \overline{D(A)} \subset \overline{D(A^2)}$, o que garante que $D(A^2)$ é denso em $X$. Por indução obtemos $D(A^k)$ denso em $X$ para $k \in \mathbb{N}$. Agora se $\operatorname{Re} z > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ é tal que $\operatorname{Re} z < k$, de (6.10) temos $D(A^k) \subset D(A^z)$, o que nos dá

$$\overline{D(A^z)} = X \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{6.14}$$

Agora, dados $x \in D(A^z)$ e $\varepsilon > 0$, denote $y = A^z x \in X$. Como $D(A^{w-z})$ é denso em $X$, existe $u \in D(A^{w-z})$ tal que $\|u - y\|_X < \epsilon$. Defina $v = A^{-z}u$. Da definição de $D(A^{w-z})$, existe $y_1 \in X$ tal que $u = A^{z-w}y_1$, e portanto $v = A^{-w}y_1 \in D(A^w)$ e obtemos

$$\|v - x\|_z = \|A^z(v - x)\|_X = \|u - y\|_X < \varepsilon,$$

o que mostra $D(A^w)$ é denso em $X^z$, completando a demonstração. □

**Exercício 6.9.** Mostre que, se $A \in \mathcal{P}(X)$ tem resolvente compacto, então as inclusões

$$X^w \hookrightarrow X^z \hookrightarrow X \quad \text{para } 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$$

são compactas.

**Exercício 6.10.** Seja $H$ um espaço de Hilbert de dimensão infinita e $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador autoadjunto e positivo, com $0 \in \rho(A)$ (deste modo, do Exercício 6.4, $A$ é de tipo positivo). Definindo $A^0 = I$, mostre que $A^\theta$ é autoadjunto para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 6.2.10** (Potências Reais de Operadores Autoadjuntos Positivos). Consideremos $H$ um espaço de Hilbert e $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador $A$ é autoadjunto, não-nulo, estritamente positivo com $0 \in \rho(A)$. Assuma ainda que $A^{-1}$ é compacto. Usando o Exercício 6.4, sabemos que $A$ é um operador de tipo positivo. Assim de (6.7), para $s > 0$, temos

$$A^{-s} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^{-s}(\lambda + A)^{-1} d\lambda,$$

onde $\Gamma$ é uma curva simples suave por partes indo de $\infty e^{-i\theta}$ para $\infty e^{i\theta}$ evitando $[0, \infty)$.

Para explorarmos mais profundamente a expressão para $A^{-s}$, utilizaremos o Teorema 5.3.7. Obtemos uma sequência infinita de autovalores $\{\lambda_k\}$ positivos (pois $A$ é estritamente positivo) associados à $A^{-1}$, satisfazendo $0 < \lambda_{k+1} \leqslant \lambda_k$ para todo $k$, e uma sequência ortonormal de correspondentes autovetores $\{u_k\}$ que é completa. Definimos $\mu_k = 1/\lambda_k$ para todo $k$ (assim $\mu_{k+1} \geqslant \mu_k > 0$ para todo $k$ e $\mu_k \to \infty$). Para cada $u \in D(A)$ temos

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k \rangle u_k \quad \text{e} \quad Au = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle u, u_k \rangle u_k.$$

Além disso, para cada $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq -\mu_k$ para todo $k$ temos

$$(\lambda + A)^{-1} v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\lambda + \mu_k} u_k.$$

Assim para todo $v \in H$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\alpha < 0$ temos

$$\begin{aligned} A^{\alpha} v &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{\alpha} (\lambda + A)^{-1} v d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-\lambda)^{\alpha}}{\lambda + \mu_k} d\lambda \right) \langle v, u_k \rangle u_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{\alpha} \langle v, u_k \rangle u_k. \end{aligned}$$

Para $s > 0$ obtemos então

$$A^{-s} v = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-s} \langle v, u_k \rangle u_k,$$

e do Teorema 5.3.4(b) aplicado a $A^{-s}$, vemos que $\mathrm{Im}(A^{-s})$ consiste dos elementos $u \in H$ para os quais a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{s} \langle u, u_k \rangle u_k \tag{6.15}$$

converge em $H$.

**Exercício 6.11.** Mostre que (6.15) converge se, e somente se, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2s} |\langle u, u_k \rangle|^2$ converge em $\mathbb{R}$.
**Dica:** Calcule $\| \sum_{k=n}^{m} \mu_k^{s} \langle u, u_k \rangle u_k \|_H^2$.

Portanto

$$D(A^s) = \mathrm{Im}(A^{-s}) = \left\{ u \in H \colon \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2s} |\langle u, u_k \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

**Exercício 6.12.** Mostre que para $s > 0$ e $u \in D(A^s)$ temos

$$A^s u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{s} \langle u, u_k \rangle u_k.$$

## 6.3 Interpolação e potências fracionárias

Nesta seção mostraremos a Desigualdade do Momento e a utilizaremos para obter resultados que mostram a estabilidade dos espaços de potências fracionárias (e suas normas) relativamente a perturbações por operadores subordinados as potências fracionárias. No que segue, $X$ é um espaço de Banach (sobre $\mathbb{K}$).

**Teorema 6.3.1** (Desigualdade do Momento). *Dados $A \in \mathcal{P}(X)$ e $\alpha \in [0,1]$, existe uma constante $K$ dependendo somente de $A$ tal que*

$$\|A^\alpha x\|_X \leqslant K\big((1-\alpha)\mu^\alpha\|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X\big) \quad \textit{para todos } x \in D(A) \textit{ e } \mu \in (0,\infty)$$

*ou, equivalentemente,*

$$\|A^\alpha x\|_X \leqslant K\|Ax\|_X^\alpha\|x\|_X^{1-\alpha} \quad \textit{para todo } x \in D(A).$$

*Demonstração.* O resultado é trivial para $\alpha = 0$ e para $\alpha = 1$, e também para $x = 0$. Para $0 < \alpha < 1$ e $x \in D(A)\setminus\{0\}$, segue de (6.8) que,

$$\begin{aligned} A^\alpha x = A^{-(1-\alpha)}Ax &= \frac{\sin[\pi(1-\alpha)]}{\pi}\int_0^\infty s^{-(1-\alpha)}(s+A)^{-1}Axds \\ &= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}A(s+A)^{-1}xds. \end{aligned}$$

Logo, para todo $\mu \in (0,\infty)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|A^\alpha x\|_X &\leqslant \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\int_0^\mu s^{\alpha-1}(M+1)\|x\|_X ds + \int_\mu^\infty s^{\alpha-2}M\|Ax\|ds\right] \\ &\leqslant \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}(M+1)\left[\frac{\mu^\alpha}{\alpha}\|x\|_X + \frac{\mu^{\alpha-1}}{1-\alpha}\|Ax\|_X\right] \\ &= \frac{\sin\pi\alpha}{\alpha(1-\alpha)\pi}(M+1)\left[(1-\alpha)\mu^\alpha\|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X\right] \\ &\leqslant 2(M+1)\left[(1-\alpha)\mu^\alpha\|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X\right]. \end{aligned}$$

Além disso, o valor mínimo da função

$$(0,\infty) \ni \mu \overset{\psi}{\longmapsto} 2(M+1)\left[(1-\alpha)\mu^\alpha\|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X\right]$$

é alcançado em $\mu = \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X}$ e, consequentemente,

$$\|A^\alpha x\|_X \leqslant \psi\left(\frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X}\right) = 2(M+1)\|Ax\|_X^\alpha\|x\|_X^{1-\alpha}.$$

Isto completa a prova. □

**Corolário 6.3.2.** *Sejam* $A \in \mathcal{P}(X)$ *e* $B\colon D(B) \subset X \to X$ *um operador linear fechado tal que* $D(B) \supset D(A^{\alpha})$ *para algum* $\alpha > 0$. *Então existem constantes* $C, C_1 > 0$ *tais que*

$$\|Bx\|_X \leqslant C\|A^{\alpha}x\|_X \quad \text{para todo } x \in D(A^{\alpha}), \text{ e}$$
$$\|Bx\|_X \leqslant C_1[(1-\alpha)\mu^{\alpha}\|x\|_X + \alpha\mu^{\alpha-1}\|Ax\|_X] \quad \text{para todos } x \in D(A) \text{ e } \mu > 0.$$

*Demonstração.* Considere o operador fechado $BA^{-\alpha}$. Como $D(B) \supset D(A^{\alpha})$, o operador $BA^{-\alpha}$ está definido em todo X, e segue do Teorema do Gráfico Fechado que $BA^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. Isto e a Desigualdade do Momento concluem o resultado. □

Veja que, diferentemente da Desigualdade do Momento, as constantes $C, C_1$ do Corolário 6.3.2 *dependem* de $\alpha > 0$.

**Teorema 6.3.3.** *Sejam* $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *com* $D(A) = D(B)$ *tais que, para algum* $\alpha \in [0,1)$, *temos* $(A-B)A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. *Então para todo* $\beta \in [0,1]$ *temos* $A^{\beta}B^{-\beta} \in \mathcal{L}(X)$ *e* $B^{\beta}A^{-\beta} \in \mathcal{L}(X)$.

*Demonstração.* Os casos $\beta = 0$ e $\beta = 1$ seguem diretamente. Pela Desigualdade do Momento, para $\beta \in (0,1)$, $s > 0$ e $x \in X$ temos

$$\|A^{\beta}(s+A)^{-1}x\|_X \leqslant K\|A(s+A)^{-1}x\|_X^{\beta}\|(s+A)^{-1}x\|_X^{1-\beta} \leqslant C(1+s)^{\beta-1}\|x\|_X,$$

para alguma constante positiva C. Assim

$$\|A^{\beta}(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C(1+s)^{\beta-1},$$

e podemos obter, analogamente,

$$\|B^{\beta}(s+B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C(1+s)^{\beta-1}.$$

Ainda, do Teorema 6.2.4, para $0 < \beta < 1$ obtemos

$$B^{-\beta} - A^{-\beta} = \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\beta}(s+B)^{-1}(A-B)(s+A)^{-1}ds. \tag{6.16}$$

Usando a estimativa

$$\begin{aligned}
&\|s^{-\beta}B^{\beta}(s+B)^{-1}(A-B)(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\\
&\quad\leqslant s^{-\beta}\|B^{\beta}(s+B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|(A-B)A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^{\alpha}(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\\
&\quad\leqslant C^2s^{-\beta}(1+s)^{\beta-1}(1+s)^{\alpha-1}\|(A-B)A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

e procedendo como no Exercício 2.8, para cada $x \in X$, obtemos

$$\int_0^{\infty} s^{-\beta}(s+B)^{-1}(A-B)(s+A)^{-1}xds \in D(B^{\beta}) \tag{6.18}$$

e

$$B^{\beta}\int_0^{\infty} s^{-\beta}(s+B)^{-1}(A-B)(s+A)^{-1}xds = \int_0^{\infty} s^{-\beta}B^{\beta}(s+B)^{-1}(A-B)(s+A)^{-1}xds. \tag{6.19}$$

Disso segue que $D(A^\beta) \subset D(B^\beta)$, que

$$B^\beta A^{-\beta} = I - \frac{\mathrm{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty s^{-\beta}B^\beta(s+B)^{-1}(A-B)(s+A)^{-1}ds,$$

e de (6.17) segue que $B^\beta A^{-\beta}$ é limitado.

Podemos trocar $A$ por $B$ em (6.16) para obter

$$\begin{aligned}
A^{-\beta} - B^{-\beta} &= \frac{\mathrm{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty s^{-\beta}(s+A)^{-1}(B-A)(s+B)^{-1}ds\\
&= -\frac{\mathrm{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty s^{-\beta}(s+A)^{-1}(A-B)(s+B)^{-1}ds\\
&= -\frac{\mathrm{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty s^{-\beta}(s+A)^{-1}(A-B)A^{-\alpha}A^\alpha(s+B)^{-1}ds.
\end{aligned}$$

Para proceder como acima, precisamos de uma estimativa para o termo $A^\alpha(s+B)^{-1}$ em $\mathcal{L}(X)$. Veja que

$$\begin{aligned}
A^\alpha(s+A)^{-1} - A^\alpha(s+B)^{-1} &= -A^\alpha(s+A)^{-1}(A-B)(s+B)^{-1}\\
&= -A^\alpha(s+A)^{-1}(A-B)A^{-\alpha}A^\alpha(s+B)^{-1},
\end{aligned}$$

ou seja

$$A^\alpha(s+A)^{-1} = [I - A^\alpha(s+A)^{-1}(A-B)A^{-\alpha}]A^\alpha(s+B)^{-1}.$$

Como $\|A^\alpha(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C(1+s)^{\alpha-1}$, para $s$ suficientemente grande temos $\|A^\alpha(s+A)^{-1}(A-B)A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1/2$, e assim

$$A^\alpha(s+B)^{-1} = [I - A^\alpha(s+A)^{-1}(A-B)A^{-\alpha}]^{-1}A^\alpha(s+A)^{-1},$$

o que nos dá

$$\|A^\alpha(s+B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2C(1+s)^{\alpha-1},$$

para $s$ suficientemente grande. Assim, analogamente (veja o Exercício 6.14 para a continuidade necessária para aplicar o análogo do Exercício 2.8) ao caso anterior, $D(B^\beta) \subset D(A^\beta)$ e $A^\beta B^{-\beta}$ é limitado, e a demonstração está completa. □

**Exercício 6.13.** Use (6.17) e proceda como no Exercício (2.8) para provar (6.18)-(6.19).

**Exercício 6.14.** Mostre que $[0,\infty) \ni s \mapsto A^\alpha(s+B)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é contínua.
**Dica:** Se $s_n \to s$ em $[0,\infty)$ note que $A^\alpha(s_n+B)^{-1} - A^\alpha(s+B)^{-1} = (s-s_n)A^\alpha(s+B)^{-1}(s_n+B)^{-1}$.

**Corolário 6.3.4.** *Sejam* $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *com* $D(A) = D(B)$ *e tais que* $(A-B)A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. *Então para todo* $\beta \in [0,1]$ *temos* $D(A^\beta) = D(B^\beta)$, *com normas equivalentes.*

## ∗ O Operador da Onda Amortecido Abstrato

Sejam $X$ um espaço de Hilbert e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador autoadjunto e limitado inferiormente por algum $\delta > 0$. Assim $A \in \mathcal{P}(X)$ e para $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $X^\alpha = (D(A^\alpha), \|A^\alpha \cdot\|_X)$ um espaço de Hilbert (o produto interno em $X^\alpha$ é dado por $\langle u, v\rangle_\alpha = \langle A^\alpha u, A^\alpha v\rangle$).

Definimos $Y^0 = X^{\frac{1}{2}} \times X$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{Y^0} = \langle u_1, u_2\rangle_{X^{\frac{1}{2}}} + \langle v_1, v_2\rangle_X = \langle A^{\frac{1}{2}} u_1, A^{\frac{1}{2}} u_2\rangle_X + \langle v_1, v_2\rangle_X.$$

e para $\theta \in [0,1]$ e $\eta \in \mathbb{R}$, consideramos o operador

$$\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\colon D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) \subset Y^0 \to Y^0 \tag{6.20}$$

definido por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in Y^0 \colon v \in X^{\frac{1}{2}} \text{ e } A^{1-\theta} u + \eta v \in X^\theta \right\}, \\ \mathcal{A}_{(\theta,\eta)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -v \\ A^\theta (A^{1-\theta} u + \eta v) \end{pmatrix} \quad \text{para } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}). \end{aligned} \tag{6.21}$$

**Exercício 6.15.** Mostre que se $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ então $D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) = X^1 \times X^{\frac{1}{2}}$. Mostre que se $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\eta > 0$ então $D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) \subset X^{\frac{3}{2}-\theta} \times X^{\frac{1}{2}}$, e que não vale a igualdade.

Note que, quando $\binom{u}{v} \in X^1 \times (X^{\frac{1}{2}} \cap X^\theta)$, temos $\binom{u}{v} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ e

$$\mathcal{A}_{(\theta,\eta)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ Au + \eta A^\theta v \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

Do exercício acima, veja que para $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ temos $D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) = X^1 \times X^{\frac{1}{2}} = X^1 \times (X^{\frac{1}{2}} \cap X^\theta)$ (a última igualdade segue do fato de que $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X^\theta$), e portanto, para $\binom{u}{v} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ vale (6.22).

**Observação 6.3.5.** Este operador está associado à equação de evolução de segunda ordem abstrata

$$u_{tt} + \eta A^\theta u_t - Au = 0.$$

Agora estabelecemos algumas propriedades básicas do operador $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$.

**Proposição 6.3.6.** *Para cada $\theta \in [0,1]$ temos:*

(i) *$\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ é fechado;*

(ii) *se $\eta \geqslant 0$ então $-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ é dissipativo;*

(iii) *$0 \in \rho(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$;*

(iv) *Se $A$ tem resolvente compacto e $\theta \in [0,1)$, então $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ tem resolvente compacto;*

*Demonstração.* (i) Tomamos uma sequência $\left\{\binom{u_n}{v_n}\right\}$ em $D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ com

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \xrightarrow{Y^0} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_n \\ A^{\theta}(A^{1-\theta}u_n + \eta v_n) \end{pmatrix} \xrightarrow{Y^0} \begin{pmatrix} \xi \\ \phi \end{pmatrix}. \tag{6.23}$$

Precisamos mostrar que $\binom{u}{v} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ e que $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\binom{u}{v} = \binom{\xi}{\phi}$.

As convergências em (6.23) nos dão

$$u_n \xrightarrow{X^{\frac{1}{2}}} u, \quad v_n \xrightarrow{X} v, \quad -v_n \xrightarrow{X^{\frac{1}{2}}} \xi, \quad A^{\theta}(A^{1-\theta}u_n + \eta v_n) \xrightarrow{X} \phi.$$

Como $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X$, a convergência $-v_n \xrightarrow{X^{\frac{1}{2}}} \xi$ nos dá $-v_n \xrightarrow{X} \xi$. Mas $v_n \xrightarrow{X} v$ e portanto, $v = -\xi$ (e, em particular, $v \in X^{\frac{1}{2}}$).

Caso 1: $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Como $0 \leqslant 1-\theta \leqslant \frac{1}{2}$ temos $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X^{1-\theta}$. Logo, como $u_n \xrightarrow{X^{\frac{1}{2}}} u$ obtemos $u_n \xrightarrow{X^{1-\theta}} u$, ou seja, $A^{1-\theta}u_n \xrightarrow{X} A^{1-\theta}u$.

Assim, $A^{1-\theta}u_n + \eta v_n \xrightarrow{X} A^{1-\theta}u + \eta v$ e como $A^{\theta}$ é fechado, segue que $A^{1-\theta}u + \eta v \in D(A^{\theta}) = X^{\theta}$ e $A^{\theta}(A^{1-\theta}u + \eta v) = \phi$.

Caso 2: $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$.

Lembremos que nesse caso vale (6.22). Ainda, $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X^{\theta}$, o que nos dá $A^{\theta}v_n \to A^{\theta}v$. Logo,

$$Au_n = Au_n + \eta A^{\theta}v_n - \eta A^{\theta}v_n \to \phi - \eta A^{\theta}v.$$

Como $A$ é fechado, obtemos $Au = \phi - \eta A^{\theta}v$ e portanto, $\phi = Au + \eta A^{\theta}v$.

(ii) Note que para cada $\binom{u}{v} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ temos

$$\begin{aligned}
\Big\langle -\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Big\rangle_{Y^0} &= \Big\langle -\begin{pmatrix} -v \\ A^{\theta}(A^{1-\theta}u + \eta v) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Big\rangle_{Y^0} \\
&= \langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle_X - \langle A^{\theta}(A^{1-\theta}u + \eta v), v\rangle_X \\
&\overset{(\star)}{=} \langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle_X - \langle A^{\theta-\frac{1}{2}}(A^{1-\theta}u + \eta v), A^{\frac{1}{2}}v\rangle_X \\
&= \langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle_X - \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\rangle_X - \eta\langle A^{\theta-\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}v\rangle_X \\
&\overset{(\star\star)}{=} \langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle_X - \overline{\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle_X} - \eta\langle A^{\frac{\theta}{2}}v, A^{\frac{\theta}{2}}v\rangle_X \\
&= 2i\,\mathrm{Im}\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle_X - \eta\|v\|^2_{X^{\frac{\theta}{2}}}.
\end{aligned}$$

Em $(\star)$ usamos o fato de que $A^{\frac{1}{2}}$ é autoadjunto (veja Exercício 6.10) e em $(\star\star)$ usamos o fato de que $A^{\theta-\frac{1}{2}} = A^{\frac{\theta-1}{2}}A^{\frac{\theta}{2}}$, que $A^{\frac{\theta-1}{2}}$ é autoadjunto e que $A^{\frac{\theta-1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{\theta}{2}}$ (lembrando que $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X^{\frac{\theta}{2}}$). Portanto,

$$\mathrm{Re}\Big\langle -\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Big\rangle_{Y^0} = -\eta\|v\|^2_{X^{\frac{\theta}{2}}} \leqslant 0,$$

prova que $-\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}$ é dissipativo.

(iii) O operador $\mathcal{B}\colon Y^0 \to Y^0$ definido por

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta A^{\theta-1}u + A^{-1}v \\ -u \end{pmatrix}$$

satisfaz $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(Y^0)$, $\mathcal{B}(Y^0) \subset D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$,

$$\mathcal{B}\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{para } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}) \text{ e}$$
$$\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}\mathcal{B}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{para } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in Y^0.$$

Portanto $0 \in \rho(\mathcal{A}_{(\theta,\eta)})$ e $\mathcal{A}_{(\theta,\eta)}^{-1} = \mathcal{B}$.

(iv) Segue de (iii) e da compacidade das inclusões entre os espaços $X^\alpha$, que por sua vez é uma consequência da compacidade do resolvente de $A$. □

Vamos mostrar que o operador $\mathcal{A}_{(0,0)}$ está em $\mathcal{P}(Y^0)$ e calcularemos suas potências fracionárias. Como $A \in \mathcal{P}(X)$, temos $[0,\infty) \subset \rho(-A)$ e sabemos que existe $M \geqslant 1$ tal que

$$(1+s)\|(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M \text{ para } s \geqslant 0.$$

**Exercício 6.16.** Mostre que $[0,\infty) \subset \rho(-\mathcal{A}_{(0,0)})$ e que para cada $s \geqslant 0$, o operador $(s+\mathcal{A}_{(0,0)})^{-1}$ pode ser representado simbolicamente por

$$(s+\mathcal{A}_{(0,0)})^{-1} = \begin{pmatrix} s(s^2+A)^{-1} & (s^2+A)^{-1} \\ -A(s^2+A)^{-1} & s(s^2+A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Use isto para mostrar que existe $\tilde{M} \geqslant 1$ tal que

$$(1+s)\|(s+\mathcal{A}_{(0,0)})^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^0)} \leqslant \tilde{M} \text{ para todo } s \geqslant 0.$$

Assim, $\mathcal{A}_{(0,0)} \in \mathcal{P}(Y^0)$ e para $0 < \alpha < 1$ a potência fracionária $\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}$ é dada por (6.8), isto é,

$$\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(s+\mathcal{A}_{(0,0)})^{-1}ds$$

**Exercício 6.17.** Usando a expressão acima, mostre que (simbolicamente) temos

$$\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}} & \sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ -\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}} & \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$$

**Exercício 6.18.** Usando o exercício acima, mostre que

$$\|\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha} - \mathcal{A}_{(0,0)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^0)} \to 0 \quad \text{quando } \alpha \to 1^-.$$

**Exercício 6.19.** Mostre que para $0 < \alpha < 1$ temos

$$\mathcal{A}_{(0,0)}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{\alpha}{2}} & -\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{-1+\alpha}{2}} \\ \sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1+\alpha}{2}} & \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

Com isto temos o seguinte resultado de caracterização dos espaços de potências fracionárias:

**Lema 6.3.7.** *Para $0 < \alpha < 1$, se $X^{-\alpha}$ denota o completamento de $X$ com a norma $\|A^{-\alpha}\cdot\|_X$, o operator $\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}: Y^0 \to X^{\frac{1-\alpha}{2}} \times X^{-\frac{\alpha}{2}}$ é uma isometria e portanto, se $Y^{-\alpha}$ denota o completamento de $Y^0$ com a norma $\|\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}\cdot\|_{Y^0}$, então*

$$Y^{-\alpha} = X^{\frac{1-\alpha}{2}} \times X^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

*Demonstração.* Dado $\binom{u}{v} \in Y^0$ temos

$$\begin{aligned}
\Big\|\mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\Big\|_{Y^0}^2 &= \Big\langle \mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \mathcal{A}_{(0,0)}^{-\alpha}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\Big\rangle_{Y^0} \\
&= \Big\langle \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}u + \sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{-1-\alpha}{2}}v, \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}u + \sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{-1-\alpha}{2}}v\Big\rangle_{X^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \Big\langle -\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u + \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v, -\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u + \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v\Big\rangle_X \\
&= \Big\langle \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u + \sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v, \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u + \sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v\Big\rangle_X \\
&+ \Big\langle -\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u + \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v, -\sin\frac{\pi\alpha}{2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}u + \cos\frac{\pi\alpha}{2}A^{-\frac{\alpha}{2}}v\Big\rangle_X \\
&= \langle A^{\frac{1-\alpha}{2}}u, A^{\frac{1-\alpha}{2}}u\rangle_X + \langle A^{-\frac{\alpha}{2}}v, A^{-\frac{\alpha}{2}}v\rangle_X = \Big\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\Big\|_{X^{\frac{1-\alpha}{2}}\times X^{-\frac{\alpha}{2}}}^2,
\end{aligned}$$

o que conclui o resultado. □

**Exercício 6.20.** Suponha que $A$ tem resolvente compacto (e portanto, possui uma sequência $\{\mu_k\}$ de autovalores positivos). Mostre que $\sigma_p(\mathcal{A}_{(0,0)}) = \{\lambda_k^{\pm}\}$, onde

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i\sqrt{\mu_k} \quad \text{para todo } k.$$

# APÊNDICE A

# Apêndice

## A.1 Complexificação de Espaços Vetoriais Reais

O estudo desta seção segue [13]. Se $X$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, então podemos também pensar em $X$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ simplesmente restringindo o conjunto dos escalares a $\mathbb{R}$. Em geral, este espaço é denotado por $X_{\mathbb{R}}$ e é chamado de **versão real** de $X$.

Por outro lado, para cada espaço vetorial $X$ sobre $\mathbb{R}$ pode ser associado a um espaço vetorial $X^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{C}$.

**Definição A.1.1.** Se $X$ é um espaço vetorial real, o conjunto $X^{\mathbb{C}} = X \times X$ de pares ordenados com adição e multiplicação por escalares complexos definidas, respectivamente, por

$$(u, v) + (w, z) = (u + w, v + z) \quad \text{e} \quad (a + bi)(u, v) = (au - bv, av + bu),$$

para todos $u, v, w, z \in X$ e $a, b \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, chamado de **complexificação** de $X$.

Podemos introduzir uma notação para os vetores de $X^{\mathbb{C}}$ que lembre a de números complexos. Denotamos $(u, v) \in X^{\mathbb{C}}$ por $u + vi$, e assim

$$X^{\mathbb{C}} = \{u + vi \colon u, v \in X\}.$$

Assim a soma e a multiplicação por escalar em $X^{\mathbb{C}}$ se tornam análogas às de $\mathbb{C}$. A *parte real* de $u + vi \in X^{\mathbb{C}}$ é $u \in X$, e a *parte imaginária* é $v \in X$. Além disso, $z \in X^{\mathbb{C}}$ é zero se e só se suas partes real e imaginária são ambas nulas.

Podemos identificar $X$ com um subconjunto de $X^{\mathbb{C}}$ via a **aplicação de complexificação** $\mathrm{cpx} \colon X \to X^{\mathbb{C}}$ dada por $\mathrm{cpx}(u) = u + 0i$ para $u \in X$. Claramente cpx é uma aplicação injetora que preserva soma e multiplicação por escalares *reais*, mas não é sobrejetora.

Para um espaço vetorial $X$ sobre $\mathbb{R}$ e uma aplicação linear $A\colon D(A) \subset X \to X$, podemos considerar a **complexificação de $A$** como sendo o operador linear $A^{\mathbb{C}}\colon D(A^{\mathbb{C}}) \subset X^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ dado por

$$D(A^{\mathbb{C}}) = \{u + vi\colon u, v \in D(A)\},$$

e $A^{\mathbb{C}}(u + vi) = Au + Avi$ para $u + vi \in D(A^{\mathbb{C}})$.

**Exemplo A.1.2.** A complexificação de $\ell^p(\mathbb{R})$ (ou $L^p(\Omega, \mathbb{R})$) é $\ell^p(\mathbb{C})$ (ou $L^p(\Omega, \mathbb{C})$).

## A.2 Teoremas sobre Inversas Contínuas

Nesta seção assumiremos que $X$ e $Y$ são espaços vetoriais normados e que $A\colon D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear densamente definido. Em alguns casos assumiremos $X$ ou $Y$ completos, ou que $A$ é fechado, e deixaremos isso claro quando necessário. Em qualquer caso, sabemos que $X^*$ e $Y^*$ são completos (veja Exercício 1.3).

**Lema A.2.1.** *Se $A\colon D(A) \subset X \to Y$ é um operator linear, então a inversa de $A\colon D(A) \subset X \to \operatorname{Im}(A) \subset Y$ existe se, e somente se, $\ker A = \{0\}$. Quando tal inversa existe, ela é denotada por $A^{-1}\colon \operatorname{Im}(A) \subset Y \to D(A) \subset X$, e é um operador linear.*

*Demonstração.* Suponha que $A^{-1}$ exista, ou seja, suponha que $A$ é injetiva. Se $x \in D(A)$ é tal que $Ax = 0$ então $Ax = A0$ e portanto $x = 0$, pois $A$ é injetiva. Logo $\ker A = \{0\}$.

Reciprocamente, se $\ker A = \{0\}$ e $Ax_1 = Ax_2$ então $x_1 = x_2$, pois $x_1 - x_2 \in \ker A = \{0\}$. Logo $A$ é injetiva e $A^{-1}$ existe. A prova de que $A^{-1}$ é linear, quando existe, é deixada ao leitor. □

**Lema A.2.2.** *A inversa $A^{-1}$ de $A\colon D(A) \subset X \to \operatorname{Im}(A) \subset Y$ existe e é contínua no seu domínio de definição $\operatorname{Im}(A) \subset Y$ se, e somente se, existe uma constante $m > 0$ tal que*

$$m\|x\|_X \leqslant \|Ax\|_Y \quad \textit{para todo } x \in D(A). \tag{A.1}$$

*Demonstração.* Se vale (A.1) e $Ax = 0$ então $x = 0$, ou seja, $\ker A = \{0\}$. Assim $A\colon D(A) \subset X \to \operatorname{Im}(A)$ tem uma inversa $A^{-1}$, pelo Lema A.2.1. Se $y = Ax$ então $x = A{-}1y$ e de (A.1) temos

$$m\|A^{-1}y\|_X \leqslant \|y\|_Y,$$

logo

$$\|A^{-1}y\|_X \leqslant \frac{1}{m}\|y\|_Y \quad \text{para todo } y \in \operatorname{Im}(A),$$

e portanto $A^{-1}$ é limitado. A recíproca é deixada a cargo do leitor. □

**Lema A.2.3.** *Se $A$ não tem uma inversa contínua, então existe uma sequência $\{x_n\} \subset D(A)$ tal que $\|x_n\| \to \infty$ e $Ax_n \to 0$.*

*Demonstração.* Segue do Lema A.2.2 que para cada inteiro positivo $n$ existe $u_n \in D(A)$ com $\frac{1}{n}\|u_n\|_X > \|Au_n\|_Y$. Assim $u_n \neq 0$ e

$$\left\| A\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\right) \right\| = \frac{\|Au_n\|_Y}{\|u_n\|_X} \to 0.$$

Definindo $z_n = u_n/\|u_n\|_X$ para cada $n$, temos $z_n \in D(A)$ e $Az_n \to 0$. Por fim, definimos

$$x_n = \begin{cases} \frac{z_n}{\|Az_n\|^{1/2}} & \text{se } Az_n \neq 0, \\ nz_n & \text{se } Az_n = 0. \end{cases}$$

Assim $x_n \in D(A)$ para cada $n$ temos

$$\|x_n\| = \begin{cases} \frac{1}{\|Az_n\|^{1/2}} & \text{se } Az_n \neq 0, \\ n & \text{se } Az_n = 0. \end{cases}$$

e portanto $\|x_n\|_X \to \infty$. Além disso

$$Ax_n = \begin{cases} \frac{Az_n}{\|Az_n\|^{1/2}} & \text{se } Az_n \neq 0, \\ 0 & \text{se } Az_n = 0. \end{cases}$$

e obtemos $\|Az_n\| \to 0$, o que completa a demonstração. □

**Teorema A.2.4.** $\mathrm{Im}(A^*) = X^*$ *se, e somente se,* $A^{-1}$ *existe e contínua.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathrm{Im}(A^*) = X^*$, mas que $A$ não tenha inversa contínua. Do Lema A.2.3 existe $\{x_n\} \subset D(A)$ com $\|x_n\| \to \infty$ e $Ax_n \to 0$. Então para cada $y^* \in Y^*$ temos

$$\langle x_n, A^*y^* \rangle = \langle Ax_n, y^* \rangle \to 0.$$

Como $\mathrm{Im}(A^*) = X^*$, isto implica que para todo $x^* \in X^*$ temos

$$\langle x_n, x^* \rangle \to 0.$$

Do Princípio da Limitação Uniforme obtemos $\{\|x_n\|_X\}$ limitada, o que nos dá uma contradição.

Reciprocamente, assuma que $A$ tenha uma inversa contínua. Se $x^* \in X^*$ é dado, então $\xi^* \colon \mathrm{Im}(A) \subset Y \to \mathbb{K}$, dado por $\langle y, \xi^* \rangle = \langle A^{-1}y, x^* \rangle$ para cada $y \in \mathrm{Im}(A)$, define um funcional linear contínuo em $\mathrm{Im}(A)$. Do Teorema de Hahn-Banach, $\xi^*$ pode ser estendido a um funcional linear contínuo $y^* \in Y^*$. Para cada $x \in D(A)$ temos

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle Ax, \xi^* \rangle = \langle x, x^* \rangle,$$

e portanto $y^* \in D(A^*)$ e $A^*y^* = x^*$, o que mostra que $\mathrm{Im}(A^*) = X^*$, e completa a demonstração. □

Com a prova análoga à primeira parte do resultado acima, temos

**Teorema A.2.5.** *Suponha que* $Y$ *é completo e que* $\mathrm{Im}(A) = Y$*. Então* $A^*$ *possui uma inversa contínua.*

*Demonstração.* Se $A^*$ não possui uma inversa contínua, então do Lema A.2.3, existe $\{y_n^*\} \subset D(A^*)$ com $\|y_n^*\|_{Y^*} \to \infty$ e $A^* y_n^* \to 0$ em $X^*$. Então para cada $x \in D(A)$ temos

$$\langle Ax, y_n^* = \langle x, A^* y_n^* \rangle \to 0.$$

Como $\mathrm{Im}(A) = Y$, obtemos $\langle y, y_n^* \rangle \to 0$ para todo $y \in Y$. Do Princípio da Limitação Uniforme, obtemos $\{\|y_n^*\|_{Y^*}\|\}$ limitada, o que nos dá uma contradição. □

Para uma recíproca parcial deste resultado, sugerimos [17, Theorem 9.4].

## A.3 Redes e Compactos

### Redes

A propriedade de Bolzano-Weierstrass estabelece que, um espaço métrico $X$ é compacto se, e somente se, toda sequência em $X$ possui uma subsequência convergente. Esta propriedade tem um análogo em espaços topológicos gerais e, para introduzi-la, utilizaremos a noção de **redes** em substituição à noção de **sequências**. A exposição apresentada a seguir está baseada em [5, 11].

**Definição A.3.1.** Um conjunto $A$ equipado com uma relação binária $\preceq_A$ é chamado um **conjunto dirigido** se

(1) $a \preceq_A a$ para todo $a \in X$,

(2) se $a \preceq_A b$ e $b \preceq_A c$, então $a \preceq_A c$,

(3) para cada $a, b \in X$ existe $c \in X$ com $a \preceq_A c$ e $b \preceq_A c$.

Uma **rede** em um conjunto $X$ é uma aplicação $A \ni a \mapsto x_a \in X$ (denotada por $\{x_a\}_{a\in A}$) do conjunto dirigido $A$ em $X$. Uma **subrede** de uma rede $\{x_a\}_{a\in A}$ é uma rede $\{y_r\}_{r\in R}$ juntamente com uma aplicação $R \ni r \mapsto a_r \in A$ tal que

(1) para dada $a_0 \in A$ existe $r_0 \in R$ tal que $a_0 \preceq_A a_r$ sempre que $r_0 \preceq_R r$.

(2) $y_r = x_{a_r}$.

Sejam $X$ um espaço topológico e $U \subset X$. Diremos que uma rede $\{x_a\}_{a\in A}$ é **absorvida** por $U$ se existe $a_0 \in A$ tal que $x_a \in U$ sempre que $a_0 \preceq_A a$ e que $\{x_a\}_{a\in A}$ visita $U$ **frequentemente** se, para todo $a \in A$ existe $b_a \in A$ com $a \preceq_A b_a$ tal que $x_{b_a} \in U$. Diremos que a rede $\{x_a\}_{a\in A}$ **converge** para $x$ se toda vizinhança de $x$ absorve $\{x_a\}_{a\in A}$ (é claro que se uma rede $\{x_a\}_{a\in A}$ converge para $x$, então qualquer subrede de $\{x_a\}_{a\in A}$ também converge para $x$) e que um ponto $x \in X$ é um **ponto limite** de $\{x_a\}_{a\in A}$ se toda vizinhança de $x$ é visitada frequentemente por $\{x_a\}_{a\in A}$.

**Observação A.3.2.** É claro que $\mathbb{N}$, com sua ordem usual, é um conjunto dirigido e que uma sequência é uma rede. Também é claro que se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência, qualquer subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subrede de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e que existem subredes $\{x_b\}_{b\in B}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que não são subsequências de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência, então

$$\{x_{\lfloor r\rfloor}\}_{r\in[0,\infty)}$$

é uma subrede de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que não é uma subsequência, onde $\lfloor r\rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $r$.

**Proposição A.3.3.** *Sejam* $X$ *e* $Y$ *espaços topológicos,* $E\subset X$, $x\in X$, $\{x_a\}_{a\in A}$ *uma rede em* $X$ *e* $f\colon X\to Y$ *uma função. Então:*

(1) $x$ *é um ponto de acumulação de* $E$ *se, e somente se, existe uma rede em* $E\backslash\{x\}$ *que converge para* $x$*;*

(2) $x\in\overline{E}$ *se, e somente se, existe uma rede em* $E$ *que converge para* $x$*;*

(3) $f$ *é contínua em* $x$ *se, e somente se,* $\{f(x_a)\}_{a\in A}$ *converge para* $f(x)$ *sempre que* $\{x_a\}_{a\in A}$ *converge para* $x$*;*

(4) $x$ *é um ponto limite de* $\{x_a\}_{a\in A}$ *se, e somente se,* $\{x_a\}_{a\in A}$ *tem uma subrede que converge para* $x$.

*Demonstração.* (1) Se $x$ é um ponto de acumulação de $E$, seja $\mathcal{N}$ o conjunto das vizinhanças de $x$ com $\preceq_{\mathcal{N}}$ dado por $\supset$. Para cada $U\in\mathcal{N}$ escolha $x_U\in(U\backslash\{x\})\cap E$. Então $\{x_U\}_{U\in\mathcal{N}}$ converge para $x$. Reciprocamente, se $\{x_a\}_{a\in A}$ é uma rede em $E$ que converge para $x$ e $U$ é uma vizinhança de $x$, então $U\backslash\{x\}$ contém $x_b$ para algum $b\in A$ e $x$ é um ponto de acumulação de $E$

(2) Se $\{x_a\}_{a\in A}$ é uma rede em $E$ que converge para $x$, toda vizinhança $U$ de $x$ contém um ponto $x_b$ para algum $b\in A$ e $x\in\overline{E}$. Reciprocamente, se $x\in\overline{E}$, cada vizinhança $U$ de $x$ contém um ponto $x_U$ de $E$ e a rede $\{x_U\}_{U\in\mathcal{N}}$ (onde $\mathcal{N}$ é o conjunto dirigido do ítem 1)) converge para $x$.

(3) Se $f$ é contínua em $x$ e $V$ é uma vizinhança de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de $x$. Logo se $\{x_a\}_{a\in A}$ converge para $x$, $\{x_a\}_{a\in A}$ é absorvida por $f^{-1}(V)$ e, consequentemente, $\{f(x_a)\}_{a\in A}$ é absorvida por $V$ e $\{f(x_a)\}_{a\in A}$ converge para $f(x)$.

Reciprocamente, se $f$ não é contínua em $x$ existe uma vizinhança $V$ de $f(x)$ tal que $f^{-1}(V)$ não é uma vizinhança de $x$ (ou seja, $x\in\overline{(f^{-1}(V))^c}$). Do ítem 2), existe uma rede $\{x_a\}_{a\in A}$ em $(f^{-1}(V))^c$ que converge para $x$ e $\{f(x_a)\}_{a\in A}$ é uma rede em $V^c$ ($\{f(x_a)\}_{a\in A}$ não converge para $f(x)$).

(4) Se $\{x_{a_r}\}_{r\in R}$ é uma sub-rede de $\{x_a\}_{a\in A}$ que converge para $x$ e $U$ é uma vizinhança de $x$, escolha $r_1\in R$ tal que $x_{a_r}\in U$ sempre que $r_1\preceq_R r$. Ainda, dado $a\in A$, escolha $r_2\in R$ tal que $a\preceq_A a_r$ sempre que $r_2\preceq_R r$. Então existe $r\in R$ tal que $r_1\preceq_R r$ e $r_1\preceq_R r$. Assim, $a\preceq a_r$ e $x_{a_r}\in U$, mostrando que $\{x_a\}_{a\in A}$ vistita $U$ frequentemente.

Reciprocamente, se $x$ é um ponto limite de $\{x_a\}_{a\in A}$, seja $\mathcal{N}$ como no item 1) e faça $Z=\mathcal{N}\times A$ um conjunto dirigido fazendo $(U,a)\preceq_Z(V,b)$ se, e somente se, $U\preceq_{\mathcal{N}} V$ e

$a \preceq_A b$. Para cada $z = (U, c) \in Z$ podemos escolher $a_z \in A$ tal que $c \preceq_A a_z$ e $x_{a_z} \in U$. Então, se $z \preceq z' = (U', c')$ temos que $c \preceq_A c' \preceq_A a_{z'}$ e $x_{a_{z'}} \in U' \subset U$ ($U \preceq_{\mathcal{N}} U'$), portanto segue que $\{x_{a_z}\}_{z\in Z}$ é uma sub-rede de $\{x_a\}_{a\in A}$ que converge para $x$. □

## Espaços topológicos compactos

**Definição A.3.4.** Seja $X$ um conjunto. Uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de $X$ é uma **topologia** para $X$ se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

(1) $X$ e $\varnothing$ pertencem a $\mathcal{T}$;

(2) se $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, então $\displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$,

(3) se $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ e $\mathcal{F}$ é finito, então $\displaystyle\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \in \mathcal{T}$.

Se $X$ é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia para $X$, o par $(X, \mathcal{T})$ é chamado **espaço topológico**. Neste caso, chamaremos de abertos os elementos de $\mathcal{T}$ e de fechados os conjuntos cujo complementar é aberto.

Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, então

(1) Se $Y \subset X$ o **fecho** $\overline{Y}$ de $Y$ é a interseção de todos os fechados de $X$ que contém $Y$. É fácil ver que $\overline{Y}$ é fechado.

(2) Se $Y \subset X$, diremos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ é uma **cobertura aberta** de $Y$ se $Y \subset \displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ e se $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ é uma cobertura aberta de $Y$, diremos que $\mathcal{V}$ é uma **subcobertura aberta** da cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $Y$.

(3) Diremos que $Y \subset X$ é **compacto** se toda cobertura aberta de $Y$ tiver uma subcobertura finita. No caso particular em que $Y = X$ diremos que $X$ é um espaço topológico **compacto**.

(4) Se $Y \subset X$, diremos que $Y$ é **precompacto** se $\overline{Y}$ é compacto.

(5) Uma família $\{F_a\}_{a\in A}$ de subconjuntos fechados de $X$ tem a **propriedade da interseção finita (PIF)** se para cada subconjunto finito $B$ de $B$ temos que $\displaystyle\bigcap_{b\in B} F_b \neq \varnothing$.

**Proposição A.3.5.** *Sejam* $X, Y$ *espaços topológicos,* $f\colon X \to Y$ *uma função e* $F$ *um subconjunto de* $X$*, então:*

(1) $X$ *é compacto se, e somente se, para toda família* $\{F_a\}_{a\in A}$ *de subconjuntos fechados com a propriedade da interseção finita,* $\displaystyle\bigcap_{a\in A} F_a \neq \varnothing$.

(2) *Se* $X$ *é compacto e* $F$ *é fechado, então* $F$ *é compacto.*

(3) *Se* $X$ *é de Hausdorff,* $F$ *é um subconjunto compacto de* $X$ *e* $x \in X \backslash F$*, existem abertos disjuntos* $U, V$ *tais que* $x \in U$ *e* $F \subset V$*.*

(4) *Se* $X$ *é de Hausdorff, todo subconjunto compacto de* $X$ *é fechado.*

(5) *Se* $X$ *é de Hausdorff e compacto, então* $X$ *é normal.*

(6) *Se* $X$ *é compacto e* $f : X \to Y$ *é contínua, então* $f(X)$ *é um subconjunto compacto de* $Y$*.*

(7) *Se* $X$ *é compacto, então* $C(X, \mathbb{K}) = BC(X, \mathbb{K})$*.*

(8) *Se* $X$ *é compacto,* $Y$ *é de Hausdorff e* $f \colon X \to Y$ *é uma bijeção contínua, então* $f$ *é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* (1) Seja $U_a = (F_a)^c$. Note que $\{F_a\}_{a \in A}$ tem a propriedade da interseção finita se, e somente se, $X$ não pode ser coberto por um número finito de elementos de $\{U_a\}_{a \in A}$ e $\displaystyle\bigcup_{a \in A} U_a \neq X$ se, e somente se, $\displaystyle\bigcap_{a \in A} F_a \neq \varnothing$. A prova do resultado agora é imediata.

(2) Se $\{U_a\}_{a \in A}$ é uma cobertura aberta de $F$, entãao $\{U_a\}_{a \in A} \cup \{F^c\}$ é uma cobertura aberta de $X$ e portanto possui uma sub-cobertura finita. Descartanto $F^c$ temos uma sub-cobertura finita de $\{U_a\}_{a \in A}$ para $F$.

(3) Para cada $y \in F$ seja $U_y$ e $V_y$ abertos disjuntos tais que $x \in U_y$ e $y \in V_y$. De (2) $F$ é compacto. Sejam $y_1, \cdots, y_n$ tais que $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$ cobre $F$, $U = \displaystyle\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ e $V = \displaystyle\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. É fácil ver que $U$ e $V$ são abertos disjuntos com $x \in U$ e $F \subset V$.

(4) Se $X$ é de Hausdorff, segue de (3) que $F^c$ é aberto (consequentemente $F$ é fechado) sempre que $F$ é compacto.

(5) Seja $X$ é de Hausdorff e compacto e $F, G$ dois conjuntos fechados e disjuntos de $X$. De (3), para cada $g \in G$ existem abertos disjuntos $V_g$ e $U_g$ com $g \in V_g$ e $F \subset U_g$. De (2) temos que $G$ é compacto. Sejam $g_1, \cdots, g_n$ tais que $\{V_{g_i}\}_{i=1}^n$ cobre $G$, $U = \displaystyle\bigcap_{i=1}^n U_{g_i}$ e $V = \displaystyle\bigcup_{i=1}^n V_{g_i}$. É claro que $U$ e $V$ são abertos disjuntos com $F \subset U$ e $G \subset V$. Segue que $X$ é normal.

(6) Dada uma cobertura aberta $\{U_a\}_{a \in A}$ de $f(X)$ temos que $\{f^{-1}(U_a)\}_{a \in A}$ é uma cobertura aberta de $X$ e portanto, possui uma sub-cobertura finita $\{f^{-1}(U_{a_i})\}_{i=1}^n$. Segue que $\{U_{a_i}\}_{i=1}^n$ é uma sub-cobertura finita de $f(X)$.

(7) Dada $f \in C(X, \mathbb{K})$, basta tomar uma cobertura aberta de $\mathbb{K}$ por conjuntos limitados para concluir que $f$ é limitada.

(8) Se $F \subset X$ é fechado temos de (2) que $F$ é compacto, de (6) que $f(F)$ é compacto e, de (4) que $f(F)$ é fechado. Assim, $f$ leva fechados em fechados ou, equivalentemente, $f$ leva abertos em abertos e $f^{-1}\colon Y \to X$ é contínua. □

**Teorema A.3.6.** *Se $X$ é um espaço topólogico, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) *$X$ é compacto.*

(b) *Toda rede em $X$ tem um ponto limite.*

(c) *Toda rede em $X$ tem uma sub-rede convergente.*

*Demonstração.* A equivalência entre (b) e (c) segue da Proposição A.3.3, item (4).

Se $X$ é compacto e $\{x_a\}_{a\in A}$ é uma rede em $X$, seja $E_a = \{x_b \colon a \preceq_A b\}$. Como para quaisquer $a, b \in A$ existe $c \in A$ tal que $a \preceq_A c$ e $b \preceq_A c$, a família $\{E_a\}_{a\in A}$ tem a PIF. Segue do item (1) da Proposição A.3.5 que $L = \bigcap_{a\in A} \overline{E_a} \neq \varnothing$. Se $x \in L$ e $U$ é uma vizinhança de $x$, $U$ intersepta $E_a$ para cada $a \in A$ e isto significa que $\{x_a\}_{a\in A}$ visita $U$ frequentemente. Consequentemente, $x$ é um ponto limite de $\{x_a\}_{a\in A}$.

Por outro lado, se $X$ não é compacto, seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ uma cobertura aberta de $X$ que não possui uma sub-cobertura finita. Seja $\mathcal{A} \subset 2^{\mathcal{U}}$ a coleção dos conjuntos finitos de $\mathcal{U}$ dirigida pela inclusão e para cada $A \in \mathcal{A}$ seja $x_A$ um ponto em $\left(\bigcup_{U\in A} U\right)^c$. Então $\{x_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ é uma rede que não possui ponto limite. De fato, se $x \in X$ escolha $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$. Se $A \in \mathcal{A}$ e $\{U\} \preceq A$, então $x_A \notin U$, e $x$ não é um ponto limite de $\{x_A\}_{A\in\mathcal{A}}$. □

Um espaço topológico é sequencialmente compacto se, e somente se, toda sequência possui subsequência convergente. Existem espaços topológicos compactos que não são sequencialmente compactos, isto é, espaços topológicos onde existem sequências sem subsequência convergente. Veja o exemplo a seguir extraído de [15].

**Exemplo A.3.7.** Considere o conjunto $S$ de todos os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Em cada $s \in S$ escolha dois subconjuntos disjuntos e infinitos $a_s$ e $b_s$ cuja união é $s$. Considere o espaço topológico $X_s = \{a_s, b_s\}$ com a topologia discreta ($a_s$ e $b_s$ são pontos isolados de $X_s$). É claro que $X_s$ é compacto. Se $Y = \Pi_{s\in S} X_s$ com a topologia produto, então $Y$ é um espaço topológico compacto.

Em $Y$ escolhemos a sequência $\mathbb{N} \ni n \mapsto x(n) \in Y$ definida por

$$[x(n)]_s = \begin{cases} a_s, & \text{se o enésimo elemento de } s \text{ pertence a } a_s \\ b_s, & \text{se o enésimo elemento de } s \text{ pertence a } b_s. \end{cases}$$

Dado $t \in S$, a subsequência $t \ni n \mapsto x(n) \in Y$ de $\mathbb{N} \ni n \mapsto x(n) \in Y$ é tal que $t \ni n \mapsto [x(n)]_t \in X_t$ assume os valores $a_t$ e $b_t$ para $n \in t$ arbitrariamente grandes (à medida que $n$ percorre $t$, passa por $a_t$ e $b_t$ infinitas vezes) e portanto não converge. Segue que $t \ni n \mapsto x(n) \in Y$ não converge e que $\mathbb{N} \ni n \mapsto x(n) \in Y$ não possui subsequência convergente.

**Exercício A.1.** Seja $X = \ell^\infty(\mathbb{K})$. Construa uma sequência $\{x_n^*\}$ em $\overline{B}_1^{X^*}(0)$ que não tem subsequência convergente.

Observe ainda que, um espaço topológico primeiro enumerável e compacto é sequencialmente compacto mas não vale a volta (para um contra-exemplo veja [11, Problema E-(e), pg. 163]).

# Referências Bibliográficas


[1] Herbert Amann, *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, Monographs in Mathematics, vol. 89, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995, Abstract linear theory. MR 1345385

[2] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications]. MR 697382

[3] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829

[4] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, Graduate Texts in Mathematics, 11. MR 0447532

[5] Gerald B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. MR 1681462 (2000c:00001)

[6] Chaim Samuel Hönig, *A integral de labesgue e suas aplicacoes*, IMPA, 1977.

[7] Tosio Kato, *Note on fractional powers of linear operators*, Proc. Japan Acad. **36** (1960), 94–96. MR 121666

[8] ———, *Fractional powers of dissipative operators*, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 246–274. MR 138005

[9] ———, *Fractional powers of dissipative operators. II*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 242–248. MR 151868

[10] ———, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition. MR 1335452

[11] J. L. Kelley, *General topology*, Ishi Press International, New York, 2008, Reprint of the 1955 edition. MR 0370454 (51 #6681)

[12] Amnon Pazy, *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations*, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Md., 1974, Department of Mathematics, University of Maryland, Lecture Note, No. 10. MR 0512912 (58 #23754)

[13] Steven Roman, *Advanced linear algebra*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 135, Springer, New York, 2005. MR 2125693

[14] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 0385023

[15] C. T. Scarborough and A. H. Stone, *Products of nearly compact spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 131–147. MR 0203679 (34 #3528)

[16] Angus E Taylor, *Spectral theory of closed distributive operators*, Acta Mathematica **84** (1951), no. 1, 189–224.

[17] Angus E. Taylor and David C. Lay, *Introduction to functional analysis*, second ed., Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1986. MR 862116

[18] Genadi Vainikko, *Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden*, B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1976, Mit Englischen und Russischen Zusammenfassungen, Teubner-Texte zur Mathematik. MR 0468159 (57 #7997)

[19] Kôsaku Yosida, *Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them*, Proc. Japan Acad. **36** (1960), 86–89. MR 121665

# Lista de Figuras

# Índice Remissivo