Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Matrizes e Sistemas Lineares

Prof. Matheus C. Bortolan

Florianópolis - SC

2019.1

Sumário

Capítulo 1

Matrizes

Neste capítulo trataremos de um elemento que é de grande importância, em particular, no estudo da Geometria Analítica e da Álgebra Linear: as **matrizes**. Lembraremos da definição, das operações básicas e das propriedades das matrizes, além de algumas aplicações que são particularmente importantes no contexto da nossa disciplina.

1.1 Definições básicas

Comecemos com a definição básica de matriz que utilizaremos.

Definição 1.1.1 (Matrizes)**.** Uma **matriz** é uma tabela retangular de números reais ou complexos. Tais números são denominados **entradas** da matriz. Uma matriz será indicada por uma letra maiúscula: $A, B, C, \ldots$, ou também por letras minúsculas $x, b, u, \ldots$.

Uma matriz horizontal será denominada **matriz linha**. Uma matriz vertical será dita **matriz coluna**.

A **ordem** (ou **tamanho**) de uma matriz é o seu número de linhas pelo seu número de colunas.

Em geral uma matriz, de tamanho $n \times m$, com entradas

$$a_{ij}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, \cdots, m\}$$

tem a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times m} = (a_{ij})$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ são fixos.

No caso acima diremos que a matriz A tem n **linhas** e m **colunas**. Quando $n = m$ a matriz A será dita **quadrada de ordem** n. No caso acima, as entradas

$$a_{ii}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}$$

formarão, o que denominaremos de, **diagonal principal** da matriz .

Exemplo 1.1.2.

1. A matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -3 \end{pmatrix}$$
é uma matriz (complexa) coluna, de tamanho 3×1.

2. A matriz $B = \begin{pmatrix} 10 & 50 & \pi & e \end{pmatrix}$ é uma matriz (real) linha, de tamanho 1×4.

3. A matriz (real)
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
é uma matriz de tamanho 3×3, logo quadrada de ordem 3.

Denotaremos por

$$\boxed{M_{n\times m}(\mathbb{K}) = \{\text{matrizes } n \times m \text{ com entradas em } \mathbb{K}\},}$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Quando $n = m$, dentotaremos $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ simplesmente por $M_n(\mathbb{K})$. Para simplificar a notação acima, denotaremos o conjunto acima por $M_{n\times m}$, quando não for importante o tipo de entradas da matriz (reais ou complexas).

Nos exemplos acima temos $A \in M_{3\times 1}(\mathbb{C})$, $B \in M_{1\times 4}(\mathbb{R})$ e $C \in M_3(\mathbb{R})$.

Definição 1.1.3 (Igualdade entre matrizes)**.** Sejam $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ e matrizes $A \in M_{n\times m}$ e $B \in M_{p\times q}$. Diremos que as matrizes A e B são **iguais** se, e somente se, $n = p$, $m = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$, onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Neste caso, escrevemos $A = B$.

Dito de outra maneira: duas matrizes são iguais se, e somente se, elas têm o mesmo tamanho e todas as correspondentes entradas são iguais.

1.2 Operações com Matrizes

1.2.1 Soma de matrizes

Definição 1.2.1 (Soma de matrizes)**.** Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e considere matrizes $A, B \in M_{n\times m}$. Definiremos a **adição** de A e B (ou a **soma** de A e B), indicada por $A+B$, se, e somente se, $n = p$ e $m = q$ e neste este caso, a matriz $C = A + B \in M_{n\times m}$ terá como entradas

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, \cdots, m\}\,, \tag{1.2.1}$$

onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$.

$\boxed{\textbf{Importante: } \text{A soma só está definida para matrizes de mesmo tamanho}}$

Note que, da Definição 1.2.1 acima, se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = A + B$, então $(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

Exemplo 1.2.2. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{então} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposição 1.2.3. *Para a adição de matrizes, temos a seguintes propriedades:*

1. *A soma é* **fechada** *em $M_{n\times m}$ é fechado, isto é, a soma de duas matrizes $n \times m$ é uma matriz $n \times m$;*

2. *A adição em $M_{n\times m}$ é* **comutativa**, *isto é, se $A, B \in M_{n\times m}$ então*

$$A + B = B + A$$

3. *A adição em $M_{n\times m}$ é* **associativa**, *isto é, se $A, B, C \in M_{n\times m}$ então*

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

4. *A adição em* $M_{n\times m}$ *tem elemento neutro, isto é, existe uma (única) matriz* $n \times m$*, denominada* **matriz nula** *e denotada por* 0*, tal que*

$$A + 0 = A\,, \quad \text{para toda} \quad A \in M_{n\times m}\,;$$

A matriz 0 *é a matriz de ordem* $n\times m$ *cujas entradas são todas zero, isto é,* $0 = (0_{ij})$ *onde* $0_{ij} = 0$*, para todo* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *e* $j \in \{1, \cdots, m\}$*.*

5. *A adição em* $M_{n\times m}$ *admite elemento oposto, isto é, para cada* $A \in M_{n\times m}$*, existe uma (única) matriz* $n \times m$*, denominada* **oposta** *da matriz* A*, denotada por* $-A$ *tal que*

$$A + (-A) = 0\,.$$

A matriz $-A$ *é a matriz de ordem* $n \times m$*, cujas entradas são os opostos das correspondentes entradas da matriz* A*, isto é, se*

$$A = (a_{ij})\,, \quad \text{então} \quad -A = (-a_{ij})\,.$$

Exercício 1.2.4. Prove a proposição acima.

1.2.2 Multiplicação de matriz por escalar

Tendo a soma de matrizes definidas, vamos agora definir a multiplicação de matriz por um número real ou complexo. Para simplificar, um número real ou complexo será chamado de **escalar**.

Definição 1.2.5 (Multiplicação de matriz por escalar)**.** Se $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}$ e α um escalar, então a matriz $B = (b_{ij}) \in M_{n\times m}$ cujas entradas são:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, \cdots, m\}\,, \tag{1.2.2}$$

será denominada **multiplicação de A pelo escalar α** (ou **produto de A por α**) e indicada por αA.

Segue da Definição 1.2.5 acima, que se $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$) e $(a_{ij}) \in M_{n\times m}$ então

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})\,.$$

Exemplo 1.2.6. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha = -2, \quad \text{então} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Proposição 1.2.7. *Para a multiplicação de matrizes por escalares, temos a seguintes propriedades:*

1. *A multiplicação de matriz por escalar é* **fechada** *em $M_{n\times m}$, isto é, a multiplicação de uma matriz $n \times m$ por um escalar é uma matriz $n \times m$;*

2. *Se $A, B \in M_{n\times m}$ e α é um escalar, vale a* **distributiva***, isto é*

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

3. *Se $A \in M_{n\times m}$ e α, β são escalares, vale a* **distributiva***, isto é*

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

4. *Se $A \in M_{n\times m}$ e α, β são escalares, vale a* **associativa***, isto é*

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

5. *Além disso vale também $1A = A$ e $0A = 0$ para toda $A \in M_{n\times m}$.*

Exercício 1.2.8. Prove a proposição acima.

1.2.3 Produto de matrizes

Vamos agora definir o **produto de duas matrizes**, que é um pouco mais complicado que as operações anteriores, e deve ser estudado com muito cuidado.

Definição 1.2.9 (Produto de matrizes)**.** Sejam $A = (a_{ik}) \in M_{n\times m}$, $B = (b_{kj}) \in M_{m\times p}$. Definimos o **produto** de A por B, como sendo a matriz $C = (c_{ik}) \in M_{n\times p}$, cujas entradas são dadas por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, \cdots, p\}\,. \tag{1.2.3}$$

Denotamos $C = AB$.

Importante: Para podermos realizar o produto AB é necessário que o número de <u>colunas</u> da matriz A seja igual ao número de <u>linhas</u> da matriz B.

Este modo de definir produto de matrizes é útil em diversas situações. Entre outras, para transformarmos sistemas lineares em equações matriciais, como mostra o exemplo:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = z_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = z_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 = z_3 \end{cases} \quad \text{é equivalente a} \quad Ay = z,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{e } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Uma propriedade a ser notada é que o produto de matrizes **não é comutativo**, isto é, em geral $AB \neq BA$. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{então} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, neste caso $AB \neq BA$.

Proposição 1.2.10. *Temos as seguintes propriedades para o produto de matrizes:*

1. *O produto de matrizes é* **associativo**, *isto é:*

$$A(BC) = (AB)C, \quad \textit{para todas} \quad A \in M_{n\times m}\,, \; B \in M_{m\times p} \;\; e \; C \in M_{p\times q}\,;$$

2. *Vale a* **distributiva** *do produto de matrizes pela soma de matrizes, isto é:*

$$A(B + C) = AB + AC, \quad \textit{para toda} \quad A \in M_{n\times m} \;\; e \;\; B\,, C \in M_{m\times p}$$

3. *Vale a* **distributiva** *da soma de matrizes pelo produto de matrizes, isto é:*

$$(A + B)C = AC + BC, \quad \textit{para todas} \quad A\,, B \in M_{n\times m} \;\; e \;\; C \in M_{m\times p};$$

4. *Vale a* **associativa** *do produto por escalar com o produto de matrizes, isto é:*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \quad \textit{para todas } A \in M_{n\times m}, \; B \in M_{m\times p} \textit{ e } \alpha \textit{ escalar.}$$

Exercício 1.2.11. Prove a proposição acima.

Exercício 1.2.12. Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

é solução da equação $z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0$, onde $A^n = \underbrace{A \cdots A \cdots A}_{n-\text{vezes}}$.

1.3 Inversa de matrizes quadradas

Definição 1.3.1. A matriz $I_n \in M_n$ cujas entradas são:

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & \text{para} \quad i \neq j \\ 1\,, & \text{para} \quad i = j \end{cases},$$

onde $i\,,j \in \{1, \cdots, n\}$, será denominada **matriz identidade** de ordem n.

Proposição 1.3.2. *Se $A \in M_{n\times m}$ então $I_n\,A = A\,I_m = A$.*

Para números reais (ou complexos) temos a seguinte propriedade: se $\alpha \neq 0$, então existe α^{-1}, tal que $\alpha\,\alpha^{-1} = 1$. Para matrizes isto pode, em geral, **não ocorrer**. Consideremos o seguinte exemplo: seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então **não** existe uma matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$, tal que $AB = I_2$. De fato, se existisse tal matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{deveríamos ter} \qquad AB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2\,,$$

para qualquer b_{11}, b_{12}, mostrando que isto é impossível.

Vamos trabalhar agora somente o caso de **matrizes quadradas**, apesar de podermos definir os objetos abaixo para matrizes não quadradas (tomando o cuidado de separar a multiplicação de matrizes à direita e à esquerda). Em vista da discussão acima temos a seguinte definição:

Definição 1.3.3 (Inversa de uma matriz quadrada)**.** Seja $A \in M_n$. Se existir uma matriz $X \in M_n$ tal que

$$A\,X = X\,A = I_n\,, \tag{1.3.1}$$

diremos que A é uma matriz **inversível** (ou **invertível**). A matriz X será dita uma **inversa** da matriz A.

Exemplo 1.3.4. A matriz

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pois $A\,X = X\,A = I_2$.

Proposição 1.3.5 (Unicidade da inversa de uma matriz quadrada)**.** *Se X e $\tilde{X} \in M_n$ são matrizes inversas da matriz $A \in M_n$ então $\tilde{X} = X$.*

Demonstração. Observemos que se X e $\tilde{X}$ são inversas da matriz A, então teremos, em particular, que $XA = I_n$ e $I_n = A\tilde{X}$. Assim

$$X = X\,I_n = X(A\,\tilde{X}) = (X\,A)\tilde{X} = I_n\,\tilde{X} = \tilde{X}\,,$$

ou seja, $X = \tilde{X}$, como queríamos demonstrar. □

Logo se uma matriz quadrada admite uma matriz inversa, esta será única, com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 1.3.6. Uma matriz $A \in M_n$ que admite uma inversa será dita **não singular**. Neste caso a matriz inversa da matriz A será denotada por A^{-1}.

Uma matriz $A \in M_n$ que não admite matriz inversa será denominada **singular**.

Proposição 1.3.7. *Sejam $A, B \in M_n$ matrizes não singulares. Então a matriz $AB \in M_n$ é uma matriz não singular e*

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}\,. \tag{1.3.2}$$

Demonstração. Como A e B são matrizes não singulares segue que $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$ e $B\,B^{-1} = B^{-1}\,B = I_n$. Portanto $(B^{-1}A^{-1})\,(AB) = B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B = (B^{-1}I_n)\,B = B^{-1}B = I_n$ e $(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Portanto a matriz AB é não singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Corolário 1.3.8. *Sejam $A_1, \ldots, A_k \in M_n$ matrizes não singulares. Então a matriz*

$$A_1 A_2 \cdots A_k \in M_n$$

é uma matriz não singular e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Exercício 1.3.9. Prove o corolário acima.

Mostramos na Proposição 1.3.7 acima, temos que o subconjunto das matrizes não singulares em M_n é fechado em relação ao produto de matrizes, ou seja, se A e $B \in M_{nn}$ são não singulares, então AB também será não singular.

Vimos num exemplo anterior que para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

temos $BA = 0$. Observemos que tanto a matriz A quanto a matriz B são matrizes singulares. Entretanto, se uma das duas fosse não singular isso não poderia ocorrer, como mostra o resultado a seguir.

Proposição 1.3.10. *Se $A \in M_n$ é uma matriz não singular e a matriz $B \in M_{np}$ é tal que $AB = 0 \in M_{np}$ então deveremos ter $B = 0$.*

Demonstração. Como a matriz A é uma matriz não singular então $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Mas, $B = I_n B = (A^{-1}A)\,B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$, ou seja, $B = 0$. □

Exercício 1.3.11. Sejam $A\,, B \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $AB = I_n$. Mostre que $BA = I_n$ e conclua que $B = A^{-1}$.

Uma aplicação para as propriedades desenvolvidas acima seria considerar a equação matricial

$$Ax = b\,, \tag{1.3.3}$$

onde $A \in M_n$, $b \in M_{n1}$ são dadas, e $x \in M_{n1}$ é uma matriz a ser encontrada (se existir). Se A é uma matriz não singular então $x = A^{-1} \cdot b$ será a única solução da equação matricial (1.3.3). Observemos que a equação matricial acima corresponde a um sistema linear de n equações algébricas lineares a n incógnitas. Logo as correspondentes entradas da matriz coluna x serão as (únicas) soluções do sistema linear associado à equação matricial (1.3.3).

1.4 A transposta de uma matriz

Uma operação bastante importante para matrizes é a **transposição**.

Definição 1.4.1. Se $A \in M_{n\times m}$ definimos a **matriz transposta da matriz** $A = (a_{ij})$, denotada por A^t, como sendo a matriz $A^t = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$, dada por

$$b_{ij} = a_{ji}\,, \quad \text{par cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad i \in \{1, \cdots, m\}\,. \tag{1.4.1}$$

Seja $A \in M_{n\times m}$. A transposta de A é a matriz A^t onde a i-ésima coluna de A^t é a i-ésima linha de A, para $i = 1, \cdots, n$. Note que se o tamanho de A é $n \times m$ então o tamanho de A^t é $m \times n$. É fácil verificar que se $m = n$, então $A\,, A^t \in M_n$.

Exemplo 1.4.2.

1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Se

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -i \\ 2 & -4 & 1+i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 4 & 1+i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

3. Se

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Proposição 1.4.3. *Temos as seguintes propriedades para matrizes transpostas.*

1. $(A^t)^t = A$ *para qualquer matriz* $A \in M_{n\times m}$.

2. $(A+B)^t = A^t + B^t$ *para quaisquer* $A, B \in M_{n\times m}$.

3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ *para qualquer* $A \in M_{n\times m}$.

4. $(AB)^t = B^t A^t$ *para quaisquer* $A \in M_{n\times m}$ *e* $B \in M_{m\times n}$.

Exercício 1.4.4. Prove a proposição acima.

É simples verificar que se a matriz A é uma matriz diagonal então $A^t = A$. Em particular, temos $I_n^t = I_n$.

Definição 1.4.5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diremos que A é:

(a) **simétrica** se $A^t = A$.

(b) **antissimétrica** se $A^t = -A$.

Por exemplo, a matriz C do exemplo anterior é simétrica, já que $C^t = C$.

Exemplo 1.4.6.

1. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz simétrica, pois $A^t = A$.

2. A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz antissimétrica, pois $B^t = -B$.

Temos as seguintes propriedades para matrizes simétricas ou antissimétricas:

Proposição 1.4.7. *Sejam $A, B \in M_n$. Então*

1. *Se A e B são simétricas, então $A + B$ também será simétrica.*

2. *Se A e B são antissimétricas, então $A + B$ também será antissimétrica.*

3. *Se A simétrica e α é um escalar então αA também será simétrica;*

4. *Se A é antissimétrica e α é um escalar, então αA também será antissimétrica;*

5. *Se A e B são matrizes simétricas, então AB será simétrica se, e somente se, $AB = BA$.*

6. *Se A e B são antissimétricas, então AB será simétrica se, e somente se, $AB = BA$.*

7. *Se A é simétrica e B é antissimétrica então AB será antissimétrica se, e somente se, $AB = BA$.*

Demonstração. **De 1.** Se A e B são simétricas então $A^t = A$ e $B^t = B$. Como $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$, segue que $A + B$ é simétrica.

Os outros itens são deixados para o leitor. □

Exercício 1.4.8. Prove os itens deixados como exercício.

Lema 1.4.9. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n qualquer, então $B = A + A^t$ é uma matriz simétrica e $C = A - A^t$ é uma matriz antissimétrica.*

Demonstração. De fato, note que $B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$, portanto B é simétrica. Analogamente, $C^t = (A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) = -C$, logo C é antisimmétrica. □

Lema 1.4.10. *Se A é uma matriz simétrica e antisimmétrica, então $A = 0$.*

Demonstração. De fato, temos $A^t = A$ e $A^t = -A$, assim $A = A^t = -A$, e portanto $2A = 0$, o que nos dá $A = 0$. $\square$

Com estes resultados combinados, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 1.4.11. *Dada matriz A quadrada de ordem n, existem únicas B, C matrizes quadradas de ordem n tais que B é simétrica, C é antissimétrica e $A = B + C$.*

Demonstração. Note que

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t),$$

e denotando $B = \frac{1}{2}(A+A^t)$ e $C = \frac{1}{2}(A-A^t)$, sabemos que B é simétrica, C é antissimétrica e, por construção, $A = B + C$.

Falta mostrar que elas são únicas, isto é, que se $A = D + E$, onde D é simétrica e E é antissimétrica, então $D = B$ e $E = C$. Se esse é o caso, então $B + C = A = D + E$ e assim $B - D = E - C$. Mas $B - D$ é simétrica, enquanto $E - C$ é antissimétrica, e pelo lema anterior, devemos ter $B - D = E - C = 0$, o que nos dá $B = D$ e $C = E$. $\square$

1.5 Traço de matrizes quadradas

Definição 1.5.1. Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in M_n$, o **traço** de A , denotado por $\operatorname{tr} A$, é a soma de todos os elementos da diagonal principal de A, isto é,

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,. \tag{1.5.1}$$

Exemplo 1.5.2. Encontre o traço da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução: Temos $\operatorname{tr} A = \sum_{i=3}^{n} a_{ii} = 3 + 0 + 2 = 5$.

Temos as seguintes propriedades para o traço de matrizes:

Proposição 1.5.3. *Sejam $A, B \in M_n$ e α um escalar. Então:*

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$

2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$

3. $\operatorname{tr} A^t = \operatorname{tr} A$

Exercício 1.5.4. Prove a proposição acima.

Temos também o seguinte resultado:

Proposição 1.5.5. *Sejam* $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}$ *e* $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$. *Então:*

$$\operatorname{tr}(B^t A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ij}.$$

Exercício 1.5.6. Prove a proposição acima.

1.6 Algumas matrizes importantes

Definição 1.6.1. Uma matriz quadrada $A \in M_n$ será chamada:

(a) **matriz diagonal** se

$$a_{ij} = 0\,, \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{com} \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}, \tag{1.6.1}$$

isto é, se A for da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.6.2}$$

(b) **triangular superior** se

$$a_{ij} = 0\,, \quad \text{para} \quad i > j \quad \text{com} \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}, \tag{1.6.3}$$

isto é, se A for da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.6.4}$$

(c) triangular inferior se

$$a_{ij} = 0\,, \quad \text{para} \quad i < j \ \text{ com } \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}, \tag{1.6.5}$$

isto é, se A for da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.6.6}$$

Proposição 1.6.2. *Temos as seguintes propriedades:*

1. *Se as matrizes $A, B \in M_n$ são matrizes diagonais então as matrizes $A + B$, AB e αA serão matrizes diagonais, onde α é um escalar.*

2. *Se a matriz $A = (a_{ij})$ é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal não contém 0 (isto é, $a_{ii} \neq 0$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$), então a matriz A é uma matriz não singular e*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

3. *Se as matrizes $A, B \in M_n$ são matrizes triangulares superiores (inferiores, respectivamente) então as matrizes $A + B$, AB e αA serão matrizes triangulares superior (inferior, respectivamente), onde α é um escalar.*

4. *Se a matriz $A \in M_n$ é triangular superior (inferior, respectivamente), cuja diagonal principal tem entradas não nulas, então a matriz A é uma a matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa da matriz A e além disso a matriz A^{-1} também será uma matriz triangular superior (inferior, respectivamente).*

Exercício 1.6.3. Prove a proposição acima.

1.7 Determinante de uma matriz

Vamos apresentar duas maneiras distintas, porém equivalentes, de se apresentar o determinante de uma matriz.

1.7.1 Definição pela Regra de Laplace

Definição 1.7.1. Seja $A \in M_n$ uma matriz quadrada. Se $n = 1$, definimos o **determinante** A, denotado por $\det A$, como sendo

$$\det A = a_{11}. \tag{1.7.1}$$

Se $n > 1$, para cada $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, definamos a matriz A_{ij}, a matriz quadrada de ordem $n-1$, obtida da matriz A, retirando-se a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A, isto é,

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.7.2}$$

Assumindo que o determinante de uma matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ já foi encontrado, definimos o **determinante** de A por

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} |A_{1j}| \tag{1.7.3}$$

onde

$$|A_{1j}| = (-1)^{1+j} \det A_{1j}\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{1.7.4}$$

O número $|A_{ij}|$ definido acima é denominado **cofator do elemento a_{ij}** da matriz A. E a matriz $B = (|A_{ij}|)$, será denominada **matriz cofatora** de A e denotada por $\operatorname{cof} A$.

Proposição 1.7.2. *Temos as seguintes propriedades:*

1. *Se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

então $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$.

2. *Se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

então $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

3. *Se* 0 *é a matriz nula, quadrada de ordem* n*, então* $\det 0 = 0$.

4. *Se* I_n *é a matriz identidade de ordem* n*, então* $\det I_n = 1$.

5. *Se* $A = (a_{ij}) \in M_n$ *é uma matriz diagonal ou triangular superior ou triangular inferior, então* $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Poderíamos definir o determinante de uma matriz quadrada, por meio dos cofatores de qualquer coluna ou linha da matriz A que obteríamos o mesmo valor, isto é, para cada $i_o \in \{1, \cdots, n\}$, temos

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} |\, A_{i_o j}| \,,$$

onde

$$|A_{i_o j}| = (-1)^{i_o + j} \det(A_{i_o j}) \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\} \,,$$

ou, para $j_o \in \{1, \cdots, n\}$ fixado temos que

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_o} \, |A_{i j_o}| \,,$$

onde

$$|A_{i j_o}| = (-1)^{i + j_o} \det(A_{i j_o}) \,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \,.$$

Conclusão: para cada $i_o, j_o \in \{1, \cdots, n\}$ fixados, temos que

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} \, |A_{i_o j}| = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_o} \, |A_{i j_o}|,$$

mas a verificação deste fato é bastante trabalhosa.

1.7.2 Propriedades do determinante

A seguir exibiremos algumas propriedades importantes do determinante de uma matriz quadrada. Antes disso, vejamos uma definição:

Definição 1.7.3. A operação de:

1. <u>trocar duas linhas de uma matriz</u> será chamada de **operação de tipo I**.

2. <u>multiplicar uma linha por um escalar não nulo</u> será chamada de **operação do tipo II**.

3. <u>adicionar o múltiplo de uma linha numa outra linha</u> será chamada de **operação do tipo III**.

Tais operações são chamadas de **operações elementares** sobre as linhas de uma matriz.

As mesmas operações podem ser definidas sobre as colunas de uma matriz. Nosso trabalho nos próximos resultados é entender como estas operações afetam o determinante de uma matriz.

Proposição 1.7.4. *Seja $A \in M_n$. Consideremos $B = (a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, b_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})$ e $C = (a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})$ onde, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, a_{*k} denota a j-ésima coluna da matriz A (analogamente para as matrizes B e C) e seja $k_o \in \{1, \cdots, n\}$. Para β, γ escalares, se $a_{*k} = \beta b_{*k} + \gamma c_{*k}$ então $\det A = \beta \det B + \gamma \det C$.*

Vale um resultado análogo ao da Proposição (1.7.4) acima, para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz, isto é, se

$$B = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ b_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ c_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix}$$

onde, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, a_{k*} denota a j-ésima linha da matriz A (analogamente para as matrizes B e C). Para β, γ escalares, se $a_{k*} = \beta b_{k*} + \gamma c_{k*}$ então $\det A = \beta \det B + \gamma \det C$.

Corolário 1.7.5. *Temos*

$$\det \left[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, \beta a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}\right] = \beta \det A. \tag{1.7.5}$$

e também

$$\begin{aligned} \det[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, &b_{*k} + c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}] \\ &= \det[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, b_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}] \\ &\quad + \det[a_{*k}, \cdots, a_{*(k-1)}, c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}]\,. \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

Demonstração. Tome $\gamma = 0$ na Proposição 1.7.4 para provar (1.7.5), e $\beta = \gamma = 1$ na Proposição 1.7.4 para provar (1.7.6). acima. □

A primeira equação do Corolário 1.7.5 acima, nos diz que o determinante de uma matriz que tem uma coluna (ou linha) multiplicada por uma constante, pode ser obtido multiplicando-se o determinante da matriz pela tal constante. Já a segunda equação nos diz que o determinante de uma matriz que tem uma coluna (ou linha) obtida da soma de duas colunas, pode ser obtido somando-se os determinante das matrizes que teêm cada uma das colunas que foram adicionadas.

Vale um resultado análogo para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz A.

Corolário 1.7.6. *Se $A \in M_n$ tem alguma coluna (ou linha) formada inteiramente por zeros, então* $\det A = 0$.

Demonstração. Basta tomar $\beta = 0$ em (1.7.5). □

O resultado acima nos diz que se uma coluna de uma matriz quadrada é nula, então o determinante da matriz será igual a zero.

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 1.7.7. *Seja $A \in M_n$. Então*

$$\det(a_{*1}, \cdots, a_{*k}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*n}) = -\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*k}, \cdots, a_{*n})\,. \tag{1.7.7}$$

O resultado acima nos diz que se trocarmos duas colunas de uma matriz quadrada seu determinate muda de sinal. Vale um resultado análogo trocando-se "coluna" por "linha", isto é, se trocarmos duas linhas de uma matriz quadrada seu determinate muda de sinal.

Corolário 1.7.8. *Seja $A \in M_n$ tem duas colunas (ou linhas) iguais, então* $\det A = 0$.

Demonstração. Provaremos o caso de colunas iguais (o de linhas se prova analogamente). Da Proposição 1.7.7 acima segue que se trocarmos a k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna o determinante da matriz obtida será menos o determinante da matriz A. Mas a matriz obtida da troca da k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna é igual a própria matriz A. Com isto teremos: $\det(A) = -\det(A)$, ou seja $\det(A) = 0$. □

Corolário 1.7.9. *Sejam $A \in M_n$, γ um escalar e $j \neq k$, para $j, k \in \{1, \cdots, n\}$. Então*

$$\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k} + \gamma a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) = \det A,$$

ou seja, se trocarmos uma coluna de uma matriz pela mesma somada com um múltiplo de uma outra coluna, o determinante da matriz obtida será igual ao da matriz inicial.

Demonstração. Da Proposição (1.7.4), segue que

$$\begin{aligned}
&\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k} + \gamma a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) \\
&\qquad = \det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) \\
&\qquad\qquad + \beta \det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) \\
&\qquad = \det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}).
\end{aligned}$$

□

Vale um resultado análogo ao acima para a correspondente operação sobre as linhas da matriz A. Resumindo: se $A \in M_n$ e λ é um escalar então:

(i) trocar duas colunas (ou linhas) da matriz A, faz com que o determinante da matriz obtida, seja menos determinante da matriz A;

(ii) adicionar λ vezes uma coluna (ou linha) da matriz A a uma outra coluna (ou linha), faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz A;

(iii) multiplicar uma coluna (ou linha) da matriz A por λ, faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz A multiplicado por λ.

Proposição 1.7.10. *Sejam* $A, B \in M_n$. *Então*

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B.}$$

Proposição 1.7.11. *Sejam* $A \in M_n$, *então* $\det A^t = \det A$.

Proposição 1.7.12. *Seja* $A \in M_n$ *não singular. Então* A^t *é não singular e*

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t.$$

Demonstração. Seja $B = (A^{-1})^t$. Assim $B^t = A^{-1}$, logo $AB^t = AA^{-1} = I_n$ e assim

$$I_n = I_n^t = (AB^t)^t = BA^t,$$

isto é, $B = (A^t)^{-1}$. Portanto $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$. □

Como uma aplicação de determinantes e de transposição de matrizes temos o seguinte resultado:

Proposição 1.7.13. *Seja* $A \in M_n$ *uma matriz. Então* A *é não singular se, e somente se,* $\det A \neq 0$. *Neste caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[\operatorname{cof} A]^t. \tag{1.7.8}$$

Exemplo 1.7.14. Verifique se a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

é não-singular. Em caso afirmativo, encontre sua inversa.

Resolução: Observemos que:

$$
\begin{aligned}
|A_{11}| &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2(6-3) = 3\,,\\
|A_{12}| &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3(-3+9) = -6\,,\\
|A_{13}| &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(-1+6) = 5\,.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11}|\,A_{11}| + a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}|\\
&= 3\cdot 3 + 2\cdot(-6) + (-1)\cdot 5 = 9 - 12 - 5 = -8 \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Logo, pela Proposição 1.7.13, segue que A é não singular. Para encontrar a matriz A^{-1} calculemos:

$$
\begin{aligned}
|A_{21}| &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3(6+1) = -7\,,\\
|A_{22}| &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4(9-3) = 6\,,\\
|A_{23}| &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(3+6) = -9\,,
\end{aligned}
\tag{1.7.9}
$$

$$
\begin{aligned}
|A_{31}| &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4(6+2) = 8\,,\\
|A_{32}| &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5(9-1) = -8\,,\\
|A_{33}| &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6(6+2) = 8\,.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\mathrm{cof}A = \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & |A_{13}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & |A_{23}| \\ |A_{31}| & |A_{32}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ -7 & 6 & -9 \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix}.
$$

Assim

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[\,\mathrm{cof} A]^t = \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -6 & 6 & -8 \\ 5 & -9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{7}{8} & -1 \\ \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ \\ \frac{5}{8} & \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}$$

1.7.3 O determinante no cálculo de áreas de polígonos convexos

Vamos começar usando determinantes para o cálculo da área de triângulos.

Definição 1.7.15. Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Definimos o **determinante de P_1 para P_2** por

$$\det(P_1, P_2) = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1,$$

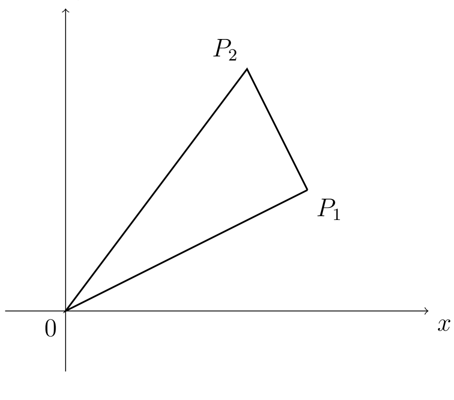
isto é, o determinante da matriz onde a primeira linha temos as coordenadas de P_1 e na segunda linha as coordenadas de P_2.

Note que ao trocarmos os pontos de posição, isto é, fazer o determinante de P_2 para P_1, o valor do determinante muda de sinal, isto é:

$$\det(P_2, P_1) = -\det(P_1, P_2),$$

e também temos $\det(P_1, P_1) = 0 = \det(P_1, 0)$, para qualquer que seja o ponto P_1 de $\mathbb{R}^2$.

Consideremos agora um triângulo Δ, com vértices $0 = (0, 0)$, P_1 e P_2, como na figura abaixo:



Então temos a seguinte fórmula para o área A_Δ do triângulo Δ:

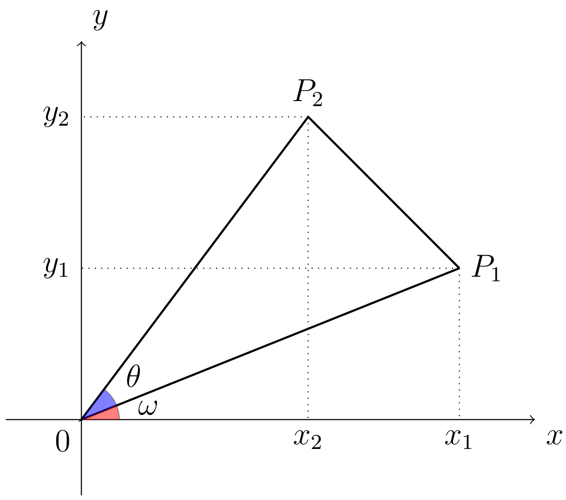
$$\boxed{A_\Delta = \frac{1}{2}\det(P_1, P_2) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.}$$

Como $\det(P,0) = \det(0,P) = 0$ para qualquer que seja o ponto P de $\mathbb{R}^2$, podemos escrever a fórmula da área de Δ da seguinte forma:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\det(0,P_1)}_{=0} + \det(P_1,P_2) + \underbrace{\det(P_2,0)}_{=0}\Big]. \tag{1.7.10}$$

Note que fizemos os determinantes: do vértice 0 para o vértice P_1, do vértice P_1 para o vértice P_2 e do vértice P_2 para o vértice 0. Isto é, fechamos um ciclo com os vértices do triângulo, caminhando no sentido **anti-horário**. Isto é importante, pois da propriedade de determinantes, caminhando no sentido horário teríamos um valor negativo, o que não condiz com a grandeza de área.

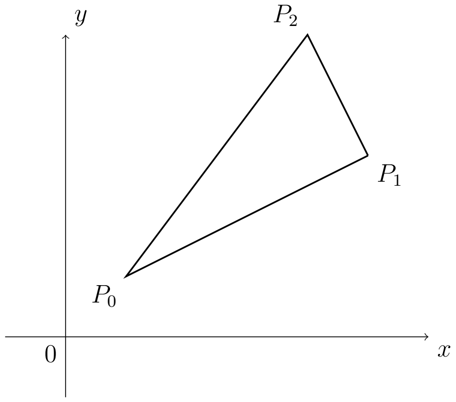
Vamos agora provar esta fórmula. Para isso considere o seguinte:



Sabemos que a área de Δ é dada por

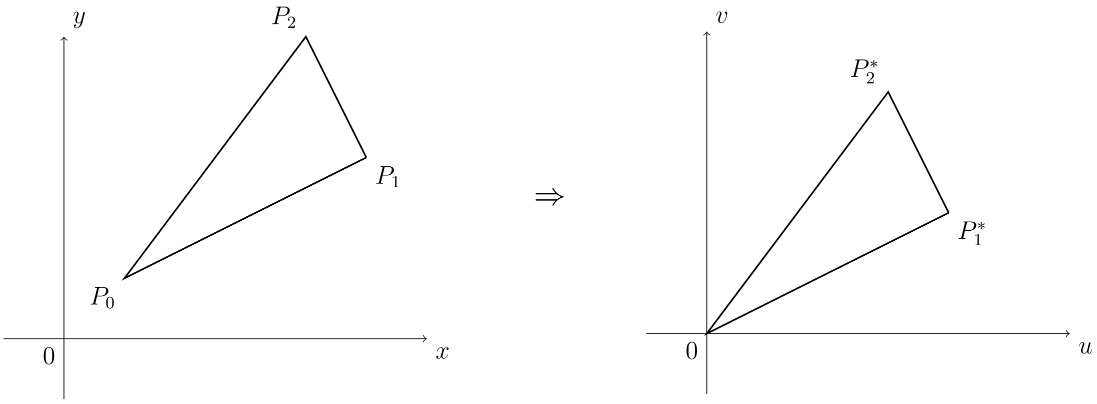
$$\begin{aligned} A_\Delta &= \frac{1}{2}\overline{0P_1}\ \overline{0P_2}\,\mathrm{sen}\theta = \frac{1}{2}\overline{0P_1}\ \overline{0P_2}\,\mathrm{sen}(\theta+\omega-\omega) \\ = &= \frac{1}{2}\overline{0P_1}\ \overline{0P_2}[\,\mathrm{sen}(\theta+\omega)\cos\omega - \ \mathrm{sen}\omega\cos(\theta+\omega)] \\ &= \frac{1}{2}[\underbrace{\overline{0P_1}\cos\omega}_{=x_1}\ \underbrace{\overline{0P_2}\,\mathrm{sen}(\theta+\omega)}_{=y_2} - \underbrace{\overline{0P_1}\,\mathrm{sen}\omega}_{=y_1}\ \underbrace{\overline{0P_2}\cos(\theta+\omega)}_{=x_2}] \\ &= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}\det(P_1,P_2), \end{aligned}$$

o que prova a fórmula <u>para o caso de triângulos com um dos vértices na origem</u>. Agora, o que fazemos quando nenhum dos vértices do triângulos está na origem? Considere o caso abaixo:



onde $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

Fazendo uma translação de P_0 para a origem 0, isto é, fazendo a mudança $(u, v) = (x - x_0, y - y_0)$ abaixo:



temos $P_1^* = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ e $P_2^* = (x_2 - x_0, y_2 - x_0)$. Usando a fórmula para a área deste triângulo (que não muda através de translações), obtemos

$$\begin{aligned} A_\Delta &= \frac{1}{2}\det(P_1^*, P_2^*) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\Big[(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)\Big], \end{aligned}$$

e assim obtemos

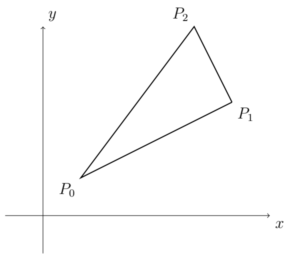
$$\begin{aligned} A_\Delta &= \frac{1}{2}\Big[(x_0y_1 - y_0x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_0 - x_0y_2)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\det(P_0, P_1) + \det(P_1, P_2) + \det(P_2, P_0)\Big], \end{aligned}$$

que coincide com a fórmula (1.7.10) quando $P_0 = 0$.

Assim, a área de um triângulo com vértices P_0, P_1 e P_2, **numerados em sentido antihorário**, é dada por:

$$\boxed{A_\Delta = \frac{1}{2}\Big[\det(P_0, P_1) + \det(P_1, P_2) + \det(P_2, P_0)\Big].}$$

Exemplo 1.7.16. Usando determinantes, calcule a área to triângulo Δ dado na figura:



onde $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (5,3)$ e $P_2 = (4,5)$.

Solução: Neste caso, temos

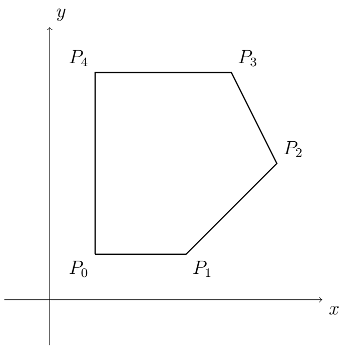
$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left[\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}(-2+13-1) = 5.$$

Área de polígonos convexos quaisquer usando determinantes

Por meio da decomposição de um polígono convexo **P** qualquer em triângulos, podemos aplicar esta fórmula de área sucessivamente e encontrar uma expressão para a área deste polígono usando determinantes. A saber, se temos um polígono de n lados, com n vértices $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$, **numerados no sentido antihorário**, a área de **P** é dada por

$$A_{\mathbf{P}} = \frac{1}{2}\Big[\det(P_0, P_1) + \det(P_1, P_2) + \cdots \det(P_{n-2}, P_{n-1}) + \det(P_{n-1}, P_0)\Big].$$

Exemplo 1.7.17. Calcule a área do pentágono **P** da figura abaixo:



com vértices $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (3,1)$, $P_2 = (5,3)$, $P_3 = (4,5)$ e $P_4 = (1,5)$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{P}} &= \frac{1}{2}\Big[\det(P_0, P_1) + \det(P_1, P_2) + \det(P_2, P_3) + \det(P_3, P_4) + \det(P_4, P_0)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\left[\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix} \det\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} \det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 5\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}(-2+4+13+15-4) = 13. \end{aligned}$$

Capítulo

2

Sistemas Lineares

Neste capítulo trabalharemos com os **sistemas lineares**. Estes são de grande importância para a Geometria Analítica, Álgebra Linear e diversas outras áreas da Matemática e Matemática Aplicada.

Introduziremos o **escalonamento de matrizes** e apresentaremos algumas aplicações desse processo para resolução de sistemas lineares (homogêneos e não-homogêneos), e também a sua utilização na inversão de matrizes.

2.1 Definições Básicas

Consideraremos a seguir questões relacionadas com o sistema linear de m equações e n incógnitas não-homogêneo, a saber,

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{2.1.1}$$

que na forma matricial pode ser escrito como $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2.1.2}$$

Definição 2.1.1. A matriz $(a_{*1} \cdots a_{*n}\ b_*)$ será denominada **matriz aumentada** associada ao sistema não homogêno (2.1.1), e é também denotada por $(\ A \quad b\ )$. Uma **solução** da equação matricial $Ax = b$ (se existir) será uma matriz

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1},$$

tal que $Au = b$. O conjunto de todas as soluções da equação matricial (2.1.1) será denominado **conjunto solução** da equação matricial $Ax = b$.

Da identificação (2.1.1) com a equação $Ax = b$, segue que encontrar solução para o sistema linear (2.1.1) é equivalente a encontrar solução da equação matricial $Ax = b$.

Exemplo 2.1.2. Coloque o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ \quad\ \ x_2 + x_3 &= -1 \\ \quad\ \ x_1 + x_2 &= 1 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

na forma matricial.

Resolução: Note que o sistema linear (2.1.3) é equivalente à equação matricial $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que a equação matricial acima tem como uma solução a matriz

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ e uma solução de (2.1.3) será } x_1 = 1,\ x_2 = 0 \text{ e } x_3 = -1.$$

A matriz aumentada associada ao sistema do Exemplo 2.1.2 acima, será a matriz

$$(\ A \quad b\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1.3. Diremos que as equações matriciais $Ax = b$ e $Cx = d$ são **equivalentes** se $A, C \in M_{m\times n}$, $b, d \in M_{m\times 1}$ e as duas equações matriciais possuem o mesmo conjunto solução, isto é, as matrizes A, C e b, d têm os mesmos tamanhos, respectivamente, e as equações possuem o mesmo conjunto solução.

Observemos que as equações matriciais $Ax = b$ e $Cx = d$ são equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares associados às correspondentes equações matriciais têm os mesmos números de equações e de incógnitas, e possuem o mesmo conjunto solução.

Definição 2.1.4. Considere o sistema matricial $Ax = b$. Se $b = 0$ o sistema é dito **homogêneo**. Caso contrário, o sistema é dito **não-homogêneo**.

2.2 Operações elementares e matrizes elementares

Nosso objetivo agora é: dado um sistema (homogêneo ou não-homogêneo), saber dizer se ele possui ou não solução, e quando possuir conseguir encontrá-la (ou encontrá-las, no caso de ter mais de uma solução). Para tanto, lembre-se da Definição 1.7.3, para começarmos a seguinte definição:

Definição 2.2.1. Considere a matriz identidade I_m quadrada de ordem m. Ao fazer uma operação de tipo X $(X = 1, 2, 3)$ na matriz I_m obtemos uma matriz (também quadrada de ordem m), que será chamada de **matriz elementar do tipo X**, onde $X = 1, 2, 3$, respectivamente.

Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}$, fazer uma operação do tipo X $(X = 1, 2, 3)$ nesta matriz é equivalente a multiplicar a matriz A (à esquerda) por uma matriz do tipo X $(X = 1, 2, 3$, respectivamente) isto é,

$$A \overset{\text{operação do tipo } X}{\longmapsto} E_X\, A. \quad X = 1, 2, 3.$$

De fato, considere o seguinte exemplo. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

De agora em diante ℓ_i se referirá à linha i da matriz A. Trocando-se ℓ_2 por $\ell_2 - 2\ell 1$ temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = A_1 \tag{2.2.1}$$

Fazendo esta mesma operação (que é do tipo 3) na matriz identidade I_3, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3,$$

e podemos notar que

$$E_3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = A_1,$$

ou seja, as operações produzem a mesma matriz.

Proposição 2.2.2. *Uma matriz elementar de tipo X ($X = 1, 2, 3$) é não singular, e além disso sua inversa é uma matriz do mesmo tipo X ($X = 1, 2, 3$, respectivamente).*

Para ilustrar esta proposição, faremos a demonstração num caso específico. Considere a matriz elementar de tipo 3 que soma $-2\ell_1$ em ℓ_2, dada por

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostremos que E_3 tem inversa, e que sua inversa é também do tipo 3.

Solução. Observe que $\det E_3 = 1$, portanto a matriz E_3 é não singular. Além disso usando a Proposição 1.7.13 temos:

$$E_3^{-1} = \frac{1}{\det E_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 + 2\ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e portanto E_3^{-1} também é uma matriz elementar do tipo 3.

2.3 l-equivalência de matrizes

Definição 2.3.1. Sejam $A, B \in M_{m\times n}$. Diremos que A é **l-equivalente** (ou **equivalente por linhas**) à B, se a A pode ser obtida de B por meio de uma finitas operações elementares sobre as linhas da matriz B, isto é, se $A = E_sE_{s-1}\cdots E_1B$, onde $E_1, \cdots, E_s$ são matrizes elementares de tipo 1, 2 ou 3.

Neste caso escreveremos $A \sim B$.

A relação $\sim$ é uma **relação de equivalência** em $M_{m\times n}$, isto é:

(i) Reflexiva: $A \sim A$ para cada $A \in M_{m\times n}$.

(ii) Simétrica: se $A \sim B$ então $B \sim A$.

(iii) Transitiva: se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.

Da definição de l-equivalência, segue o seguinte resultado.

Proposição 2.3.2. *Sejam $A, B \in M_{m\times n}$. Se $A \sim B$, então existe um matriz $P \in M_{m\times n}$ não singular, tal que $B = PA$ (e consequentemente $A = P^{-1}B$.)*

Demonstração. Basta definir $P = E_s E_{s-1} \cdots E_1$. □

A relação entre matrizes l-equivalentes e a equações matriciais equivalentes é dada na seguinte resultado.

Proposição 2.3.3. *Sejam $A, C \in M_{m\times n}$ e $b, d \in M_{m\times 1}$. Se $(\ A\ b\ ) \sim (\ C\ d\ )$ em $M_{m,n+1}$, então as equações matriciais $Ax = b$ e $Cx = d$ são equivalentes.*

Demonstração. Observemos que, da Proposição (2.3.2) acima, existe $P \in M_{m\times n}$ não singular, tal que

$$(\ C\ d\ ) = P(\ A\ b\ ) \quad \text{e, consequentemente,} \quad (\ A\ b\ ) = P^{-1}(\ C\ d\ ).$$

Da definição de produto de matrizes, segue que $C = PA$ e $d = Pb$, e consequentemente $A = P^{-1}C$ e $b = P^{-1}d$. Logo, se $u \in M_{n\times 1}$ é solução da equação matricial $Ax = b$, isto é, se $Au = b$, então

$$Cu = (PA)u = P(Au) = Pb = d,$$

ou seja, $u \in M_{n\times 1}$ é também uma solução de $Cx = d$. Analogamente, toda solução de $Cx = d$ é também solução de $Ax = b$. Assim as equações matriciais $Ax = b$ e $Cx = d$ são equivalentes. □

A recíproca deste resultado também é verdadeira, e fica a cargo do leitor mostrá-la, isto é, mostrar que se as equações $Ax = b$ e $Cx = d$ são equivalentes, então $(\ A\ b\ ) \sim (\ C\ d\ )$.

Vale observar que o resultado acima pode ser aplicado para as matrizes aumentadas associadas a sistemas lineares, ou seja, as matrizes aumentadas são l-equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares são equivalentes. Como consequência temos o seguinte:

Corolário 2.3.4. *Se $A \sim C$ em $M_{m\times n}$ e $x \in M_{n\times 1}$ então as equações matriciais $Ax = 0$ e $Cx = 0$ são equivalentes.*

Demonstração. Basta tomar $b = d = 0$ na Proposição (2.3.3). □

Daremos a seguir um exemplo de como encontrar solução de um sistema linear não homogêneo utilizando matrizes elementares e a l-equivalência.

Exemplo 2.3.5. Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_3 &= 8 \end{cases} \longleftrightarrow \quad Ax = b, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_3 &= 8 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\ \ell_2 - 2\ell_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 &= 11 \\ -x_2 - 3x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 4x_3 &= 8 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\ \ell_3 - 2\ell_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 &= 11 \\ -x_2 - 3x_3 &= -7 \\ -2x_2 - 6x_3 &= -14 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\ \ell_1 + \ell_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 &= 4 \\ -x_2 - 3x_3 &= -7 \\ -2x_2 - 6x_3 &= -14 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\ \ell_3 - 2\ell_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 &= 4 \\ -x_2 - 3x_3 &= -7 \\ 0 &= 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\ -\ell_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 0 &= 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema linear obtido acima é bem mais simples que o original, e é equivalente ao original, já que suas matrizes aumentadas são l-equivalentes. Assim, o conjunto solução do sistema original é o mesmo que o do último sistema linear acima, que pode ser encontrado fazendo $x_3 = t$, de onde obtemos $x_2 = 7 - 3t$ e $x_1 = 4 - 2t$.

Assim o conjunto solução do sistema linear dado incialmente será

$$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2, x_3) = (4 - 2t, 7 - 3t, t) \colon t \text{ é um escalar qualquer}\}.$$

Observe que obtivemos, após as operações de l-equivalência sobre a matriz $\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$ a matriz $\begin{pmatrix} C & d \end{pmatrix}$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad d = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuja forma facilita a resolução o sistema linear original associado.

2.4 Eliminação de Gauss-Jordan (Escalonamento)

Vamos estudar mais a fundo a fim de encontrar um método que faça o seguinte: dada uma equação matricial $\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$, obtenhamos uma equação matricial $\begin{pmatrix} C & d \end{pmatrix}$ equivalente onde a matriz $\begin{pmatrix} C & d \end{pmatrix}$ tenha essa *forma especial* que simplifique encontrar o conjunto solução da equação. Tal método é o chamado **escalonamento** ou **eliminação de Gauss-Jordan**. Comecemos o eu estudo com a seguinte definição.

Definição 2.4.1. Seja $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}$ uma matriz. O primeiro elemento não-nulo da linha i, da esquerda para a direita, é chamado de **coeficiente líder** da linha i. Se a linha i é inteira nula, então dizemos que ela **não possui coeficiente líder**.

Agora sim, vamos definir qual é a forma especial que queremos que nosso sistema associado tenha, para que sua resolução seja a mais simples possível.

Definição 2.4.2. Dizemos que uma matriz $A \in M_{m\times n}$ está na **forma escalonada reduzida por linhas (FERL)** se ela tem as seguintes propriedades:

(i) se uma linha i de A possui um coeficiente líder, este coeficiente líder é 1;

(ii) se uma linha de A é nula, ela está abaixo de todas as linhas não-nulas de A;

(iii) se temos duas linhas não-nulas de A, o coeficiente líder da linha mais abaixo está à direita do coeficiente líder da linha mais acima.

(iv) se uma linha contém um coeficiente líder, a coluna a qual este coeficiente líder pertence deve ter zero em todas as entradas, exceto na entrada na qual o coeficiente líder se encontra.

Por exemplo, as matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

estão na FERL. Já as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

não estão na FERL. Os elementos destacados não cumprem as propriedades requeridas, no caso, as propriedades (iv) e (iii), respectivamente.

Proposição 2.4.3. *Toda matriz $A \in M_{m\times n}$ é l-equivalente a uma (única) matriz, que indicaremos por A_R, que está na FERL, isto é, dada uma matriz A qualquer, existe uma matriz A_R que está na FERL e uma matriz P não singular tal que $A_R = PA$.*

Em vez de exibirmos a demonstração da proposição acima, explicaremos por meio de um exemplo o método (escalonamento ou eliminação de Gauss-Jordan) que é utilizado para demonstra-la.

Exemplo 2.4.4. Encontre o conjunto solução do sistema linear

$$\begin{cases} -2x_3 + 7x_5 &= 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 &= -1 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$(\ A\ b\ ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução. O que faremos é realizar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada acima para obter a sua FERL.

Começo do Escalonamento ____.

Passo 1: troque as linhas nulas da matriz $(\ A\ b\ )$ com a linhas não nulas, de modo que as todas linhas nulas estejam abaixo de todas as linhas não-nulas. Ao final deste passo, vá para o Passo 2.

$\star$ No nosso exemplo não há linhas nulas, logo não faremos nenhuma mudança na matriz aumentada $(\ A\ b\ )$.

Passo 2: localize a **coluna** mais à esquerda que não seja totalmente nula, e nesta coluna, localize a primeira linha que tenha um elemento não nulo.

$$\begin{array}{cc} \ell_2 \to & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} \uparrow \\ c_1 \end{array} \end{array}$$

Feito isso: se esta linha for a primeira, vá para o Passo 3. Se a linha encontrada não for a primeira, troque-a de lugar com a primeira linha, e vá para o Passo 3. No nosso exemplo a linha encontrada é a ℓ_2 (com elemento não nulo na coluna c_1):

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{trocamos } \ell_2 \text{ com } \ell_1)$$

Passo 3: se o primeiro elemento da coluna do Passo 2 for a, multiplique ℓ_1 por $\frac{1}{a}$, para que o coeficiente líder de ℓ_1 seja 1. No nosso exemplo, o primeiro elemento é 2 e multiplicamos ℓ_1 por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{multiplicamos } \ell_1 \text{ por } \tfrac{1}{2}\right)$$

Feito isso, vá para o Passo 4.

Passo 4: Some múltiplos de ℓ_1 na linhas de baixo, a fim de zerar todas as entradas abaixo do coeficiente líder de ℓ_1. No exemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ \boxed{0} & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ \boxed{0} & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \quad (\ell_3 - 2\ell_1)$$

Feito isso vá para o Passo 5.

Passo 5: Isole a linha ℓ_1 da matriz, e volte para o Passo 2, agora com a matriz sem a primeira linha. Aplique estes passos até atingir a última linha não nula. No nosso exemplo:

$$\begin{array}{r} \\ \text{nova } \ell_1 \to \\ \text{nova } \ell_2 \to \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right) \quad (\text{isolada a linha 1})$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right) \quad (-\tfrac{1}{2}\ell_1) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \quad (\ell_2 - 5\ell_1)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{nova } \ell_1 \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-7/2} & \mathbf{-6} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(isolada a linha 1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-7/2} & \mathbf{-6} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (2\ell_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-7/2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}\right) \quad \text{(esgotadas as linhas)}$$

Ao término dessas iterações, vá para o Passo 6.

Passo 6: Para finalizar, começando por uma linha não nula, some múltiplos desta linha nas outras, para zerar as entradas acima do coeficiente líder. No nosso exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\ell_2 + (7/2)\ell_3)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\ell_1 - 6\ell_3) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\, C \; d \,) \quad (\ell_1 + 5\ell_2).$$

Ao terminar este passo com todas as linhas, a matriz obtida estará na FERL.

Fim do Escalonamento ____.

Observe que a matriz $(\ C \ \ d\ )$ realmente está na FERL. O sistema linear asssociado à matriz $(\ C\, d\ )$ será:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 7 \\ x_3 & = 1 \\ x_5 & = 2 \end{cases}$$

Portanto se, por exemplo, considerarmos $x_2 = t$ e $x_4 = s$, teremos $x_1 = 7 - 2t - 3s$. Assim, o conjunto solução associado ao sistema linear (2.4.1) será:

$$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (7 - 2t - 3s, t, 1, s, 2) \colon t, s \in \mathbb{R}\}.$$

e o conjunto solução da equação matricial $Ax = b$ será

$$\mathbf{S}_m = \left\{ u \in M_{51} \colon u = \begin{pmatrix} 7-2t-3s \\ t \\ 1 \\ s \\ 2 \end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.4.1 Posto de matrizes

Definição 2.4.5. Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}$, definimos o **posto** de A, denotado por $\operatorname{rank}(A)$, como sendo o número de linhas não nulas de sua FERL associada. Dizemos que A tem **posto máximo** se $\operatorname{rank}(A) = n$, isto é, se seu posto é igual ao seu número de colunas.

Proposição 2.4.6. *Se* $A \in M_{m\times n}$ *então* $\operatorname{rank}(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

2.5 Sistemas lineares homogêneos e não-homogêneos

Nesta seção estudaremos algumas propriedades interessantes de sistemas lineares. Para isso sejam $A \in M_{m\times n}$ e $b \in M_{m\times 1}$. Consideraremos o sistema não-homogêneo

$$Ax = b, \tag{NH}$$

e o sistema homogêneo

$$Ax = 0. \tag{H}$$

2.5.1 O sistema homogêneo

O sistema (H) tem sempre solução, a saber, a matriz identicamente nula, $u = 0 \in M_{n\times 1}$, que será denominada **solução trivial** de (H). Além disso, se A_R é a FERL de A, então a equação matricial $Ax = 0$ será equivalente à equação matricial $A_R x = 0$, ou seja, resolver o sistema homogêneo é equivalente a resolver o sistema homogêneo associado a matriz na FERL.

Observemos que se $u, v \in M_{n\times 1}$ são soluções de (H), então, para cada α, β escalares, a matriz $\alpha u + \beta v \in M_{n\times 1}$ também é uma solução de (H), pois

$$A(\alpha u + \beta v) = A(\alpha u) + A(\beta v) = \alpha(\underbrace{Au}_{=0}) + \beta(\underbrace{Av}_{=0}) = 0.$$

Mais geralmente, se $u_1, \cdots, u_p \in M_{n\times 1}$ são soluções de (H) então, para $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ escalares, a matriz $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p \in M_{n\times 1}$ também é solução de (H).

Definição 2.5.1. O número $k = n - \operatorname{rank}(A)$ =(número de variáveis - posto de A) é chamado de **número de variáveis livres** de (H).

Proposição 2.5.2. *Considere a equação* (H) *e seja k seu número de variáveis livres. Então existem k soluções não triviais $u_1, u_2, \cdots, u_k \in M_{n\times 1}$ de* (H) *tais que dada qualquer solução $u \in M_{n\times 1}$ de* (H)*, existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ (unicamente determinados para cada u), tais que*

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k.$$

Vamos verificar esta proposição num exemplo.

Exemplo 2.5.3. Encontre o conjunto solução de (H), para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{R}). \tag{2.5.1}$$

Solução: Note que a matriz A está na FERL, e o sistema linear associado à esta equação é

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \right. , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} .$$

Neste caso temos $k = n - \operatorname{rank}(A) = 5 - 3 = 2$, ou seja, o número de variáveis livres deste sistema é 2. Portanto para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, consideramos $x_2 = \alpha_1$ e $x_4 = \alpha_2$, e teremos

$$u = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u_1} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u_2},$$

será uma solução de (H), e mais ainda **toda** solução de (H) pode ser escrita nesta forma, para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.5.4. *Seja $A \in M_{m\times n}$. Então $u = 0$ é a única solução de* (H) *se, e somente se, A tem posto máximo.*

Demonstração. Segue do fato que $k = n - \operatorname{rank}(A)$, pois se $\operatorname{rank}(A) = n$ então $k = 0$, e a única solução de (H) é $u = 0$. Reciprocamente, se $u = 0$ é a única solução de (H) então $k = 0$, o que nos dá $\operatorname{rank}(A) = n$. $\square$

Corolário 2.5.5. *Seja $A \in M_{m\times n}$. Se $m < n$ então* (H) *tem infinitas soluções não triviais.*

Demonstração. Como $k = n - \operatorname{rank}(A)$ e $\operatorname{rank}(A) \leqslant m < n$, segue que $k > 0$ e assim (H) tem infinitas soluções não triviais. □

2.5.2 O sistema não-homogêneo

Definição 2.5.6. O sistema (NH) será dito:

(a) **possível e determinado (PD)** se tem uma única solução;

(b) **possível e indeterminado (PI)** se tem mais de uma solução;

(c) **impossível (I)** se não possui solução.

Quando um sistema for ou possível e determinado ou possível e indeterminado, diremos simplesmente que ele é **possível**.

Na seção anterior vimos que no caso $b = 0$, isto é, para o sistema homogêneo, só ocorrem duas das situações acima: ou o sistema é possível e determinado (e neste caso $u = 0$ é a sua única solução), quando o posto de A é máximo, ou o sistema é possível e indeterminado (e neste caso ele tem infinitas soluções), quando o posto de A não é máximo.

Exemplo 2.5.7. O sistema linear não-homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{cases}$$

é possível e determinado, e $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0)$ é a sua única solução.

Exemplo 2.5.8. O sistema linear não-homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{cases}$$

é possível e indeterminado e seu conjunto solução é

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 + x_3 \\ -1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemplo 2.5.9. O sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

é impossível.

Exercício 2.5.10. Verifique as afirmações dos exemplos acima.

Lembremos que resolver a equação matricial (NH) é equivalente a resolver a equação matricial $A_R x = b_R$, onde $(\ A\ b\ ) \sim (\ A_R\ b_R\ )$, logo podemos assumir que a matriz $(\ A\ b\ )$ já está na FERL, pois o conjunto solução de ambas é o mesmo.

Seja $r = \operatorname{rank}(A)$. Como a matriz A está na FERL, então as últimas $m - r$ linhas de A são nulas. Portanto, as últimas $m - r$ equações do sistema tem forma:

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b_i \text{ , para cada } \quad i \in \{r+1, \cdots, m\}\,.$$

Logo, para que o sistema seja consistente, devemos ter $b_i = 0$, para $i \in \{r+1, \cdots, m\}$, e temos o seguinte resultado.

Teorema 2.5.11. *Se a matriz $A \in M_{m\times n}$ está na FERL e $\operatorname{rank}(A) = r$, então* (NH) *é possível se, e somente se, $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$.*

Em particular, se $\operatorname{rank}(A) = m$ então (NH) *será possível.*

Se a matriz $A \in M_{m\times n}$ não está na FERL temos o seguinte resultado

Teorema 2.5.12. *Seja $A \in M_{m\times n}$. Então* (NH) *será possível se, e somente se, $\operatorname{rank}(\ A\ \ b\ ) = \operatorname{rank}(A)$.*

Exemplo 2.5.13. O sistema linear

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ \quad -x_1 & = 1 \\ \qquad x_2 & = -1 \end{cases}$$

é possível ou impossível?

Solução. Note que

$$(\ A\ b\ ) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\ A_R\ b_R\ ),$$

e assim $\operatorname{rank}(\ A\ b\ ) = 2 = \operatorname{rank}(A)$, e o sistema é possível.

Teorema 2.5.14. *Seja* $A \in M_{m\times n}$*. Suponha que* (NH) *seja possível e tome* $u_0 \in M_{n\times 1}$ *uma solução particular de* (NH)*. Então dada uma solução* u *de* (NH)*, existe uma solução* v *de* (H) *tal que*

$$u = u_0 + v.$$

Demonstração. De fato, se u, u_0 são ambas soluções de (NH), defina $v = u - u_0$. Assim

$$Av = A(u - u_0) = Au - Au_0 = b - b = 0,$$

logo v é uma solução de (H) e $u = u_0 + v$. □

Exemplo 2.5.15. Encontre o conjunto solução de (NH), onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solução. Podemos mostrar que $(A\, b) \sim (A_R\, b_R)$, onde

$$A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b_R = \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.5.16. Prove que $(A\, b) \sim (A_R\, b_R)$.

Portanto, pelo Teorema 2.5.11, segue que (NH) é possível, pois $\operatorname{rank}(A\, b) = 3 = \operatorname{rank}(A)$. Além disso

$$u_0 = \begin{pmatrix} -13 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

é uma solução da equação $A_R x = b_R$ e portanto da equação $Ax = b$. Note que

$$v = \begin{pmatrix} -10\alpha \\ -3\alpha \\ 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{para cada } \alpha \in \mathbb{R}$$

é solução geral da equação $A_R x = 0$, já que $k = 4 - 3 = 1$. Logo, do Teorema 2.5.13, segue que qualquer solução de (NH) é da forma

$$u = u_0 + \alpha v = \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{para cada } \alpha \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} -13 - 10\alpha \\ 3 - 3\alpha \\ 1 + 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

é o conjunto solução de (NH).

Para completar nosso estudo sobre da equação matricial (NH) (ou dos sistema linear associado a matriz aumentada $(A\, b)$) temos os seguintes resultados:

Teorema 2.5.17. *Sejam $A \in M_{m\times n}$, $b \in M_{m\times 1}$ e suponha que* (NH) *é possível. Então* (NH) *tem solução única se, e somente se, A tem posto máximo.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.5.4 e do Teorema 2.5.13. □

Corolário 2.5.18. *Nas condições do Teorema* (2.5.16)*, assuma que $m \leqslant n$. Então existe uma única solução de* (NH) *se, e somente se, A tem posto máximo e $m = n$.*

Demonstração. Suponhamos (NH) tem uma única solução. Então do Teorema (2.5.16), segue que A tem posto máximo. Assim

$$n = \operatorname{rank}(A) \leqslant \min\{m\,, n\} \leqslant m \leqslant n,$$

o que mostra que $m = n$.

Reciprocamente, se $\operatorname{rank}(A) = n$, segue do Teorema 2.5.16 que (NH) tem uma única solução, completando a demonstração. □

2.6 Cálculo da inversa de matrizes não singulares por escalonamento

Para finalizar, exibiremos um método para encontrar a matriz inversa associada a uma matriz não singular, utilizando o matrizes elementares e escalonamento. Para ilustrar consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.6.1. Considere a matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.6.2. Mostre que $A \sim I_4$.

Como I_4 está na FERL, temos $\operatorname{rank}(A) = 4$. Além disso

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 - (1+1) = -4 \neq 0,$$

e portanto a matriz A é não singular.

Neste exemplo, ocorre uma relação entre o posto da matriz e a sua não-singularidade. Mas isto não é um caso específico, pois ele ocorre sempre, como mostra o seguinte resultado.

Teorema 2.6.3. *Seja $A \in M_n$. São equivalentes:*

1. *A é não singular;* **2.** *A tem posto máximo;* **3.** *$A \sim I_n$.*

Demonstração.

1. $\Rightarrow$ 2.: Se a matriz A é uma matriz não singular e $Au = 0$, então $u = A^{-1}0 = 0$, ou seja, a única solução de (H) é a solução trivial $u = 0$. Segue do Corolário 2.5.17 que A tem posto máximo.

2. $\Rightarrow$ 3.: Se A tem posto máximo então não existem linhas nulas na matriz A_R (a FERL da matriz A) e cada linha de $A_R \in M_{nn}$ tem coeficiente líder 1 e zero nas outras posições da coluna, isto é, $A_R = I_n$, ou seja $A \sim I_n$.

3. $\Rightarrow$ 1.: Se $A \sim I_n$ então $A_R = I_n$ e existe $P \in M_n$ não singular tal que $I_n = A_R = PA$. Portanto a matriz A é uma matriz não singular e além disso

$$\boxed{A^{-1} = P}$$

$\square$

Corolário 2.6.4. *Seja $A \in M_{nn}$. A matriz A é não singular se, e somente se, ela é produto de matrizes elementares.*

Demonstração. Do teorema acima temos que $A = P^{-1}$. Mas da Proposição 2.3.2, a matriz P é o produto de matrizes elementares, e portanto sua inversa é também o produto de matrizes elementares. $\square$

Este teorema, mais especificamente a equação $A^{-1} = P$ destacada na demonstração, nos dá um modo de encontrar a inversa de uma matriz quadrada não singular. O método consiste basicamente em escalonar n sistemas lineares

$$Ax = b_n,$$

onde $b_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ (o 1 aparece na posição n), mas fazendo todos os escalonamentos de uma mesma vez, que é possível pois a matriz A é a mesma em todos os escalonamentos. Já que a matriz A é não-singular, sua FERL é I_n, e assim $x = A^{-1}b_n$. Juntando as n solução, formamos a matriz A^{-1}.

Vamos ilustrar o método no seguinte exemplo.

Exemplo 2.6.5. Encontrar a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução. Para encontrar inversa de A (se existir) faremos o seguinte: consideremos a matriz

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e realizaremos operações elementares sobre as linhas de A para transformá-la (ser possível) na matriz identidade I_4, mas **com o cuidado** de aplicar todas as operações que feitas em à A na matriz I_4 à direita.

$$(A|I_4) \overset{\ell_1+\ell_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\ell_3-\ell_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{2}\ell_3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\ell_2-\ell_3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{2}\ell_3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\ell_1-\ell_4}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = (I_4|P)$$

Assim, dos resultados acima, sabemos que como $A \sim I_4$ (pela parte da esquerda da matriz), sabemos que $A^{-1} = P$, que é a matriz que aparece na parte da direita, isto é:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Referências Bibliográficas

[1] Callioli, C.A & outros - *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*

[2] Zerbinatti, P.H.: *Áreas de polígonos via determinantes*, Dissertação de Mestrado Profissional PROFMAT, Unesp - Rio Claro.