Atratores globais para semigrupos

Matheus Cheque Bortolan

Estas notas são baseadas nas notas de aula "Sistemas Dinâmicos Não-Lineares - SMA 5880" do Prof. Alexandre de Nolasco de Carvalho, do ICMC - USP, e podem ser encontradas integralmente em sua página pessoal (acesse-a clicando aqui).

Universidade Federal de Santa Catarina

2020.1

Agradeço aos alunos Carlos, Daniella, Éver, Fabiano, Izabella, Léo, Maritza, e Oriana, que me ajudaram a montar estas notas, sempre apontando correções e melhorias a serem feitas, o que elevou muito o nível deste trabalho.

Sumário

Introdução

No que segue, estudaremos os *atratores* para *sistemas dinâmicos*, tanto no caso autônomo - nos quais o sistema dinâmico é chamado de *semigrupo*, quanto no caso *não-autônomo* - chamados de *processos de evolução*. De maneira geral, para compreender o que é de fato um sistema dinâmico, imagine que queiramos prever o valor de uma variável x em instantes futuros e denotemos o espaço dos possíveis valores para esta variável por X. A variável x pode descrever uma infinidade quantidades físicas, biológicas, econômicas, etc. Como exemplo citamos a posição de um corpo no espaço (um vetor em $\mathbb{R}^3$) ou a distribuição de temperaturas em um corpo Ω (uma função definida em Ω e tomando valores em $\mathbb{R}$). Assim, o espaço X pode ser de dimensão finita ou infinita.

Um sistema dinâmico é uma família de operadores $\{S(t,s)\colon t \geqslant s\}$, definidos em X e tomando valores nele mesmo de forma que, dado que o valor da variável no instante s é x, $S(t,s)x$ é o valor da variável num instante posterior t. O conhecimento do sistema dinâmico nos permite saber (no futuro) os valores da variável que conhecemos no instante presente para cada possível valor da variável x em X. É claro que esta família de operadores deve obedecer certas condições de compatibilidade. Estas condições são:

(i) para todo t, $S(t,t) = I$ onde I é a identidade em X e

(ii) $S(t,\tau)S(\tau,x)x = S(t,s)x$ sempre que $t \geqslant \tau \geqslant s$ e $x \in X$.

Quando t e s são tomados em $\mathbb{Z}$, diremos que $\{S(t,s)\colon t \geqslant s\}$ é um *sistema dinâmico discreto* e se t e s são tomados em $\mathbb{R}$ diremos que $\{S(t,s)\colon t \geqslant s\}$ é um *sistema dinâmico contínuo*. Para ilustrarmos algumas situações que envolvem sistemas dinâmicos e fixar as ideias, consideraremos por enquanto o caso dos sistemas dinâmicos contínuos.

O espaço X em geral é um espaço métrico e denotaremos por d a sua métrica. Algumas vezes, mas não sempre, também pedimos que um sistema dinâmico tenha a seguinte propriedade de continuidade:

(iii) a aplicação $\{(t,s,x) \in \mathbb{R}^2 \times X \colon t \geqslant s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ é contínua.

Definição 0.1. Sejam X um espaço métrico e $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X. Um **sistema dinâmico** em X é uma família $\{S(t,s)\colon t \geqslant s\} \subset C(X)$ satisfazendo:

(i) $S(t,t) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde I denota a identidade em X;

(ii) $S(t,\sigma) \circ S(\sigma,s) = S(t,s)$ para todo $t \geqslant \sigma \geqslant s$,

(iii) a aplicação $\{(t,s,x) \in \mathbb{R}^2 \times X \colon t \geqslant s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ é contínua.

Em geral, distinguimos dois tipos de sistemas dinâmicos contínuos: os *sistemas dinâmicos autônomos*, comumente chamados de **semigrupos**, são os sistemas que satisfazem que satisfazem

$$S(t,s) = S(t-s,0) \qquad \text{para todos} \qquad t \geqslant s.$$

Neste caso, se definimos $T(t) = S(t,0)$ para cada $t \geqslant 0$ temos

(i) $T(0) = I$, onde I é a identidade em X;

(ii) $T(t)T(s) = T(t+s)$ para todos $t,s \geqslant 0$ e

(iii) a aplicação $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Como mencionado anteriormente, uma família $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ com as propriedades acima é chamada de **semigrupo (contínuo)**.

Exercício 1. Mostre que se $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um semigrupo, então a família $\{S(t,s)\colon t \geqslant s\}$ dada por $S(t,s) = T(t-s)$ para todos $t \geqslant s$ define um sistema dinâmico autônomo.

Note que num sistema dinâmico autônomo a evolução do estado x ocupado no instante s para o estado $S(t+s,s)x$ ocupado no instante $t+s$ é independente de s e depende apenas de t. Os demais sistemas dinâmicos serão chamados simplesmente de **processos de evolução**.

Os sistemas dinâmicos aparecem frequentemente associados a equações diferenciais que podem ser ordinárias, parciais ou funcionais. Para exemplificar, vamos considerar uma classe de exemplos que surge nas equações diferenciais ordinárias.

Exemplo 0.2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \quad t > s, \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e localmente Lipschitz contínua na segunda variável. Com estas condições, da teoria de equações diferenciais ordinárias, temos o seguinte resultado:

Teorema 0.3. *Para cada* $x_s \in \mathbb{R}^n$ *e* $s \in \mathbb{R}$*, existem* $\tau > s$ *e função continuamente diferenciável* $\xi\colon [s,\tau) \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\xi(s) = x_s$ *e* $\dot{\xi}(t) = f(t,\xi(t))$ *para todo* $t \in (s,\tau)$*. Esta função é chamada uma* ***solução de*** (0.1) *e tem as seguintes propriedades:*

(a) se existem $\sigma > s$ *e função continuamente diferenciavel* $\eta\colon [s,\sigma) \to \mathbb{R}^n$ *tais que* $\eta(s) = x_s$ *e* $\dot{\eta}(t) = f(t,\eta(t))$ *para todo* $t \in (s,\sigma)$*, então* $\xi(t) = \eta(t)$ *para todo* $t \in [s,\min\{\sigma,\tau\})$*;*

(b) existem $\tau(s,x_s) > s$ *e uma solução* $x(\cdot,s,x_s)\colon [s,\tau_{s,x_s}) \to \mathbb{R}^n$ *de* (0.1) *tais que ou* $\tau(s,x_s) = \infty$ *ou* $\tau(s,x_s) < \infty$ *e*

$$\limsup_{t\to\tau(s,x_s)} \|x(t,s,x_s)\| = \infty,$$

e tal solução é chamada ***solução maximal de*** (0.1)*;*

(c) definindo $E = \{(t,s,x) \in \mathbb{R}^{n+2}\colon s \leqslant t < \tau(s,x)\}$*, aplicação*

$$E \ni (t,s,x_s) \mapsto x(t,s,x_s) \in \mathbb{R}^n$$

é contínua.

Suponha que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$f(t,x)\cdot x < 0 \quad \text{para todos} \quad \|x\| \geqslant M, \quad \text{e } t \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

Se $x(\cdot) = x(\cdot,s,x_s)\colon [s,\tau(s,x_s)) \to \mathbb{R}^n$ é a solução maximal de de (0.1), temos

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2f(t,x(t))\cdot x(t).$$

Exercício 2. Mostre, usando (0.2) e o Teorema 0.3, que $\tau(s,x_s) = \infty$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x_s \in \mathbb{R}^n$.

Nestas condições podemos definir $S(t,s)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para $t \geqslant s$ por

$$S(t,s)x_s = x(t,s,x_s) \quad \text{para todo} \quad x_s \in \mathbb{R}^n.$$

Tendo em vista o Teorema 0.3, para concluir que $\{S(t,s)\colon t \geqslant s\}$ é um processo de evolução em $X = \mathbb{R}^n$ precisamos somente verificar que a condição (ii) da Definição 0.1 é válida.

Exercício 3. Mostre que a condição (ii) da Definição 0.1 é válida, usando a unicidade de soluções para (0.1) dada no Teorema 0.3 e observando que $\xi(t) = x(t,\sigma,x(\sigma,s,x_s))$ e

$\eta(t) = x(t, s, x_s)$ são ambas soluções do problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \quad t > s, \\ x(\sigma) = x(\sigma, s, x_s) \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Quando $f(t, x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, f não depende de t, então $[0, \infty) \ni t \mapsto x(t + \tau, \tau, x_0)$ e $[0, \infty) \ni t \mapsto x(t, 0, x_0)$ são ambas soluções de

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \quad t > 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

e neste caso, a família $\{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ definida por $T(t)x_0 = x(t, 0, x_0)$ para cada $t \geqslant 0$ define um semigrupo (contínuo) em $X = \mathbb{R}^n$.

Exercício 4. Verifique se o argumento acima funciona ou não quando f depende de t.

Note que os sistemas dinâmicos incluem muitos modelos que não são provenientes de equações diferenciais, e nestas notas lidaremos com os sistemas dinâmicos neste contexto geral, e assumiremos que X é um espaço métrico ou, em situações onde a estrutura de espaço vetorial seja necesária, um espaço de Banach (que pode ter dimensão infinita).

Ainda, dada a natureza do nosso espaço de estados X, gostaríamos de estudar sistemas dinâmicos que são *dissipativos* (no exemplo acima todas as soluções entram na bola de raio M após um tempo decorrido). Um conjunto no qual *todas as soluções* entram depois de decorrido um certo tempo (de forma uniforme em limitados de X) é chamado *conjunto absorvente*. Queremos estudar os sistemas dinâmicos que possuam conjuntos absorventes limitados. Também queremos que a intersecção de todos os conjuntos absorventes seja um conjunto compacto não-vazio, o qual chamaremos de *atrator*. O atrator será um conjunto assintótico de estados e os estados que estão fora do atrator são estados transitórios.

Buscaremos condições para existência de atratores e procuraremos entender como é o sistema dinâmico dentro do atrator.

Capítulo

1

Atratores para Semigrupos

No nosso estudo de *semigrupos*, os *atratores globais* desempenharão o papel central. Neste capítulo apresentaremos os conceitos e os resultados básicos que nos levam à caracterização dos semigrupos que possuem um attrator global.

Para isto, sejam X um espaço métrico, $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ sua métrica e denotemos por $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X. Escreveremos $\mathbb{T}$ para denotar o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T}\colon t \geqslant 0\}$, $\mathbb{T}^- = \{t \in \mathbb{T}\colon t \leqslant 0\}$, $\mathbb{T}_t^- = t + \mathbb{T}^-$ e $\mathbb{T}_t^+ = t + \mathbb{T}^+$.

Definição 1.1. Um **semigrupo** é uma família $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\} \subset C(X)$ que satisfaz:

(i) $T(0) = I$, onde I é a identidade em X,

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \in \mathbb{T}^+$.

Diremos que um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **fortemente contínuo** se a aplicação $\mathbb{T}^+ \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

No caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ é simples ver que todo semigrupo é um semigrupo fortemente contínuo. Além disso, como $T(n) = T(1)^n$, escrevendo $T = T(1)$, o semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{Z}^+\}$ pode ser escrito na forma $\{T^n\colon n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Dados um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e um subconjunto B de X, definimos:

(a) para cada $t \in \mathbb{T}$ a **imagem** de B sob $T(t)$ por $T(t)B = \{T(t)x\colon x \in B\}$;

(b) a **órbita positiva** de B por $\gamma^+(B) = \cup_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)B$;

(c) para $t, t' \in \mathbb{T}^+$ com $t < t'$, a **órbita parcial** de B entre t e t' por $\gamma^+_{[t,t']}(B) = \cup_{s \in [t,t'] \cap \mathbb{T}^+} T(s)B$;

(d) para cada $t \in \mathbb{T}^+$ **órbita de** B **começando em** t por $\gamma_t^+(B) = \cup_{s\in\mathbb{T}_t^+} T(s)B$;

O conjunto onde a órbita de B se acumula é chamado *conjunto* $\omega-$*limite* e desempenha um papel fundamental no estudo do comportamento assintótico de um semigrupo.

Definição 1.2. Para $B \subset X$, o **conjunto** ω**-limite** de B é definido por

$$\omega(B) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Uma **solução para trás** de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é uma função $\xi\colon \mathbb{T}^- \to X$ que satisfaz

$$\xi(t+s) = T(t)\xi(s) \quad \text{para todos } s \in \mathbb{T}^- \text{ e } t \in \mathbb{T}^+ \text{ com } t+s \in \mathbb{T}^-.$$

Uma **solução global** de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é uma função $\xi\colon \mathbb{T} \to X$ que satisfaz

$$\xi(t+s) = T(t)\xi(s) \quad \text{para todos } t \in \mathbb{T}^+ \text{ e } s \in \mathbb{T}.$$

Se ξ é uma solução para trás (global) de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\xi(0) = x$, diremos que ξ é uma **solução para trás (global) de** $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ **por** x.

Uma solução global constante será chamada de **solução estacionária** de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e o seu valor será chamado de **ponto de equilíbrio**, ou **ponto fixo** ou **ponto estacionário** de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Observação 1.3. Como $T(t)$ não é necessariamente injetiva para cada $t \in \mathbb{T}^+$, se existe uma solução para trás (ou global) por x existe, ela não precisa ser única.

Exercício 5. (a) Se ξ é uma solução para trás de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x e

$$\eta(t) = \begin{cases} \xi(t), & t \in \mathbb{T}^-, \\ T(t)x, & t \in \mathbb{T}^+ \end{cases}$$

então η é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x.

(b) Se ξ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x então

$$\xi(t) = T(t)x \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}^+.$$

(c) Se ξ é uma solução para trás de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x e $T(t)$ é injetiva para cada $t \in \mathbb{T}^+$, então ξ é única, isto é, se η é uma outra solução para trás de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x então $\eta(t) = \xi(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$.

Se ξ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por $x \in X$, definimos a **órbita global de x relativa** ξ por $\gamma_\xi(x) = \{\xi(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$. Neste caso, para $t \in \mathbb{T}$ escreveremos $(\gamma_\xi)_t^-(x) = \{\xi(s)\colon s \in \mathbb{T}_t^-\}$ e definimos o **conjunto $\alpha-$limite de x relativo a ξ** por

$$\alpha_\xi(x) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^-} \overline{(\gamma_\xi)_t^-(x)}.$$

As caracterizações dos conjuntos $\omega-$limite e α-limite do exercício a seguir serão frequentemente utilizadas.

Exercício 6. Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $B \subset X$. Mostre que:

(a) $\omega(B)$ é fechado e $x \in \omega(B)$ se, e somente se, existem sequências $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ com $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset B$ com $T(t_n)x_n \to x$ em X;

(b) se ξ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por $x \in X$, então $\alpha_\xi(x)$ é fechado e $y \in \alpha_\xi(x)$ se, e somente se, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ com $t_n \to \infty$ com $\xi(-t_n) \to y$ em X.

Para definir as noções de atração, absorção e invariância sob a ação de um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ precisaremos da **semidistância de Hausdorff** entre dois subconjuntos A e B não-vaxios de X, definida por

$$\operatorname{dist}_H(A, B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y).$$

Quando $A = \{a\}$ é um conjunto unitário, simplificaremos a notação, escrevendo $d(a, B)$ ao invés de $\operatorname{dist}_H(\{a\}, B)$. Note que $d(a, B)$ se reduz à distância usual de ponto a conjunto, isto é,

$$d(a, B) = \inf_{b\in B} d(a, b).$$

Exercício 7. Mostre que:

(a) $\operatorname{dist}_H(A, B) = 0$ se, e somente se, $\overline{A} \subset \overline{B}$;

(b) existem conjuntos não vazios A e B tais que $\operatorname{dist}_H(A, B) = 0$ e $A\cap B = \varnothing$. Existem conjuntos fechados e não-vazios A, B tais que $A\cap B = \varnothing$ e $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\limits_{a\in A} \inf_{b\in B} d(A, B) = 0$.

Definição 1.4 (Atração e Absorção)**.** Sejam X um espaço métrico, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $A, B \subset X$. Diremos que A **atrai** B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_H(T(t)B, A) = 0.$$

Diremos que A **absorve** B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geqslant t_0$.

Dados $C \subset X$ e $r > 0$, definimos a $r-$**vizinhança de** C por

$$\mathcal{O}_r(C) = \{x \in X\colon d(x, C) < r\}.$$

Exercício 8. Mostre que se A absorve B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então A atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Utilize o semigrupo $T(t)x_0 = x_0 e^{-t}$ em $\mathbb{R}$, $A = \{0\}$ e $B = [-1, 1]$ para mostrar que a recíproca não é verdadeira em geral. Mostre também que se A atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $r > 0$, então $\mathcal{O}_r(A)$ absorve B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

A noção de invariância, dada a seguir, desempenha um papel fundamental no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos.

Definição 1.5 (Invariância)**.** Diremos que $A \subset X$ é

(i) **positivamente invariante** por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A \subset A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$;

(ii) **negativamente invariante** por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A \supset A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$;

(iii) **invariante** por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, isto é, se A é positivamente e negativamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Note que um conjunto invariante unitário corresponde a um ponto de equilíbrio de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, isto é, um ponto $x^* \in X$ tal que $T(t)x^* = x^*$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Exercício 9. (a) Mostre que para $B \subset X$ e $t \in \mathbb{T}^+$, a órbita de B começando em t é positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

(b) Se ξ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $B = \{\xi(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ então B é invariante por $\mathbb{T}$.

(c) Se ξ é uma solução para trás de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $C = \{\xi(t)\colon t \in \mathbb{T}^-\}$ então C é negativamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

1.1 Atratores e resultados de existência

Finalmente, estamos em condições de definir os *atratores globais para semigrupos.*

Definição 1.6 (Atrator Global)**.** Um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ é chamado um **atrator global** de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $\mathcal{A}$ é compacto, invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Exercício 10. Mostre que, quando existe, um atrator global $\mathcal{A}$ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é único.

Exercício 11. Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $A \subset X$ um conjunto invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Mostre que para cada $x \in A$ existe uma solução global ξ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x tal que $\xi(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Use isto para mostrar que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$, então

$$\mathcal{A} = \{x \in X\colon \text{ existe uma solução global limitada de } \{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\} \text{ por } x\}. \tag{1.1}$$

Exercício 12. Mostre que se $K \subset X$ é compacto e $\{x_n\}$ é uma sequência em X com $d(x_n, K) \to 0$ quando $n \to \infty$, então $\{x_n\}$ tem uma subsequência convergente com limite em K.

Para encontrar condições que garantam a existência de um atrator global para um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, faremos alguns lemas auxiliares.

Lema 1.7. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$. Então $\omega(B)$ é positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Além disso, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então $\omega(B)$ é invariante.*

Demonstração. Se $\omega(B) = \varnothing$ não há o que provar. Suponha então $\omega(B) \neq \varnothing$ e fixe $t \in \mathbb{T}^+$. Do Exercício 6, se $y \in \omega(B)$, existem sequências $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)x_n \to y$. Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t+t_n)x_n = T(t)T(t_n)x_n \to T(t)y$ e portanto $T(t)y \in \omega(B)$. Assim $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$, e como $t \in \mathbb{T}^+$ é arbitrário, $\omega(B)$ é positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Nos resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\omega(B)$ é negativamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Fixado $x \in \omega(B)$, existem sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)x_n \to x$. Para $t \in \mathbb{T}^+$ fixo, uma vez que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B temos

$$d(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \leqslant \operatorname{dist}_H(T(t_n - t)B, \omega(B)) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Segue do Exercício 12 que $\{T(t_n - t)x_n\}$ tem uma subsequência convergente (que denotaremos novamente por $\{T(t_n - t)x_n\}$). Se $T(t_n - t)x_n \to y$, temos $y \in \omega(B)$ e $T(t)y = x$. Isto mostra que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$. Assim segue a invariância negativa de $\omega(B)$, o que conclui o resultado. $\square$

Exercício 13. Sejam $x \in X$ e suponha que exista uma solução global ξ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x tal que $\overline{\xi(\mathbb{T}^-)}$ seja compacto. Mostre que $\alpha_\xi(x)$ é não-vazio, compacto e invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Segue imediatamente da primeira parte do Lema 1.7 que, se $x \in X$, $\omega(x)$ atrai x e $\omega(x) = \{x^*\}$, então x^* é um ponto de equlíbrio de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Um resultado análogo vale para $\alpha_\xi(x)$.

Lema 1.8. *Se $B \subset X$ é não-vazio e existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto, então $\omega(B)$ é não-vazio e compacto, $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\omega(B)$ é invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração. Para cada $t \in \mathbb{T}^+$, $t \geqslant t_0$, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto. Segue do fato que a família $\{\overline{\gamma_t^+(B)} : t \geqslant t_0\}$ tem propriedade da interseção finita que $\omega(B) = \bigcap_{t \geqslant t_0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se isto não ocorre, então existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\} \subset B$, $t_n \to \infty$ em $\mathbb{T}^+$ tais que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n \colon n \geqslant n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subsequências $t_{n_j} \to \infty$ de $\{t_n\}$, $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ e $y \in X$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \to y$ quando $j \to \infty$. Disto segue que $y \in \omega(B)$. Mas (1.2) nos dá $0 = d(y, \omega(B)) \geqslant \epsilon_0$, o que nos leva a uma contradição. Logo $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Finalmente, o Lema 1.7 nos dá a invariância de $\omega(B)$ por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e conclui a demonstração. □

O conceito a seguir desempenha um papel importante na caracterização dos semigrupos que possuem um atrator global.

Definição 1.9 (Compacidade Assintótica)**.** Um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em X é dito **assintoticamente compacto** se dado $B \subset X$ não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Lema 1.10. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo assintoticamente compacto e $B \subset X$ não-vazio para o qual existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado. Então $\omega(B)$ é não-vazio e compacto, $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, e $\omega(B)$ é invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração. Como $T(t)$ é contínua e $T(t)\gamma_{t_0}^+(B) \subset \gamma_{t_0}^+(B)$, segue que $T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para todo $t \geqslant 0$. Logo $\gamma_{t_0}^+(B)$ é não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Da compacidade assintótica de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existe um compacto $J \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ que atrai $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, isto é

$$\operatorname{dist}_H(T(t)\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}, J) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty,$$

e nos mostra[1] que $\varnothing \neq \omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, obtemos $\omega(B)$ compacto.

Nos resta mostrar que $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se isto não ocorre, existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da compacidade de J e do Exercício 12, existem subsequências $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$, $t_{n_j} \to \infty$ e $z \in J$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \to z$ quando $j \to \infty$. Segue que $z \in \omega(B)$ e $0 = d(z, \omega(B)) \geqslant \epsilon_0$, o que nos dá uma contradição e mostra que $\omega(B)$ atrai B. Portanto, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Finalmente, segue do Lema 1.7 a invariância de $\omega(B)$ por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. $\square$

Definição 1.11. Um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente limitado** se para cada limitado $B \subset X$ existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Diremos que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **limitado** se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.

Fique atento, pois **não segue** do fato que $T(t) \in C(X)$ que $T(t)$ leva limitados de X em subconjuntos limitados de X, uma vez que subconjuntos limitados de X não são necessariamente relativamente compactos.

Exercício 14. Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X.

(a) Assuma que se $\{x_n\} \subset X$ é limitada e $t_n \to \infty$ com $\{T(t_n)x_n\}$ limitada implica que $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacta. Mostre que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

(b) Se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto e eventualmente limitado, então para todas as sequências $\{x_n\} \subset X$ limitada e $t_n \to \infty$ temos $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacta.

(c) Dizemos que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **condicionalmente eventualmente compacto** se dado $B \subset X$ limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Mostre que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é condicionalmente eventualmente compacto ele é assintoticamente compacto.

[1] **Exercício.** Mostre essa afirmação.

Definição 1.12. Diremos que um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo)** se existir um conjunto não-vazio limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Exercício 15. Usando o Exercício 8, mostre que podemos trocar palavra *atrai* pela palavra *absorve* na definição acima, sem mudar os significados dos conceitos. Isto é, mostre que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto/limitado/compacto dissipativo se, e somente se, existe $B \subset X$ não-vazio e limitado que absorve pontos/limitados/compactos de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.13. Um conjunto $B \subset X$ limitado que absorve pontos/limitados/compactos de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é chamado de **conjunto ponto/limitado/compacto dissipativo**.

1.1.1 Existência no caso limitado dissipativo

Nesta subseção trataremos de encontrar um resultado de existência de atratores globais para semigrupos são limitados dissipativos.

Proposição 1.14. *Se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ o atrator global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e defina $B_0 = \mathcal{O}_1(\mathcal{A})$. Então B_0 é limitado e dado $B \subset X$ limitado, como $\mathcal{A}$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existe $t_0 = t_0(B) \in \mathbb{T}^+$ tal que $d_H(T(t)B, \mathcal{A}) < 1$ para todo $t \geqslant t_0$, ou seja $T(t)B \subset \mathcal{O}_1(\mathcal{A}) = B_0$ para $t \geqslant t_0$, e $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo.

Agora, se $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset X$ limitada, defina $B = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, que é limitado. Assim, quando $n \to \infty$, temos $d_H(T(t_n)x_n, \mathcal{A}) \leqslant d_H(T(t_n)B, \mathcal{A}) \to 0$. Logo do Exercício 12, $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacto e $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. □

Exercício 16. Mostre que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo, então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado. Conclua que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto, então dadas sequências $t_n \to \infty$ em $\mathbb{T}^+$ e $\{x_n\} \subset X$ limitada, então $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacta.

Para mostrar que tais condições são também suficientes, começaremos com o seguinte resultado.

Proposição 1.15. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo assintoticamente compacto e limitado dissipativo, e B_0 um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se $B \subset X$ é não-vazio e limitado então $\omega(B) \subset \omega(B_0) \subset \overline{B_0}$.*

Demonstração. Se $x \in \omega(B)$, existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Como B_0 é um conjunto dissipativo para T, existe $t_0 = t_0(B) \in \mathbb{T}^+$ tal que se $t \geqslant t_0$ então $T(t)B \subset B_0$. Em particular $T(t_0)B \subset B_0$. Como $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geqslant t_0$ para todo $n \geqslant n_0$, e para $n \geqslant n_0$ temos

$$T(t_n)x_n = T(t_n - t_0)T(t_0)x_n \in T(t_n - t_0)T(t_0)B \subset T(t_n - t_0)B_0,$$

e assim, para $y_n = T(t_0)x_n$, temos,

$$x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_n - t_0)T(t_0)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_n - t_0)y_n,$$

e $x \in \omega(B_0)$. Portanto $\omega(B) \subset \omega(B_0)$.

Agora se $x \in \omega(B_0)$ existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset B_0$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Mas como B_0 é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e B_0 é limitado, existe $t_0 = t_0(B_0) \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B_0 \subset B_0$ para $t \geqslant t_0$. Como $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ temos $t_n \geqslant t_0$, e assim, para $n \geqslant n_0$, $T(t_n)x_n \in T(t_n)B_0 \subset B_0$. Portanto $x \in \overline{B_0}$ e $\omega(B_0) \subset \overline{B_0}$. □

Teorema 1.16. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem atrator global dado por $\mathcal{A} = \omega(B_0)$, onde B_0 é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração. Temos $\mathcal{A} = \omega(B_0) \neq \varnothing$, compacto, invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e atrai B_0 sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se $B \subset X$ é limitado e não-vazio então $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\omega(B) \subset \omega(B_0) = \mathcal{A}$. Veja que quando $t \to \infty$, temos

$$d_H(T(t)B, \omega(B)) \to 0,$$

e como $d_H(T(t)B, \mathcal{A}) \leqslant d_H(T(t)B, \omega(B))$, $\mathcal{A}$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. □

Note que, em particular, se T é assintoticamente compacto e limitado dissipativo, e B_0 é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então o atrator global $\mathcal{A}$ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ está contido em $\overline{B_0}$. Com isto conseguimos compilar todos os resultados desta subseção da seguinte maneira:

Corolário 1.17. *Um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ se, e somente se, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Além disso, se $B_0 \subset X$ é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ temos $\mathcal{A} = \omega(B_0) \subset \overline{B_0}$.*

1.1.2 Existência no caso ponto dissipativo

Nesta subseção tentaremos reproduzir os resultados da seção anterior, mas agora com a hipótese adicional de que o semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é fortemente contínuo. Tentaremos encontrar condições necessárias e suficientes para a existência de atratores globais, que sejam ligeiramente mais fracas que o caso anterior.

Lema 1.18. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto, com a propriedade de que para cada compacto $K \subset X$, sua órbita positiva $\gamma^+(K)$ é limitada. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração. Como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B_0 que absorve pontos de X. Seja $U = \{x \in B_0\colon \gamma^+(x) \subset B_0\}$. Como B_0 absorve pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, temos[1] U não-vazio. Claramente $\gamma^+(U) = U$, U é limitado e absorve pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Sabemos também que $T(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$ para $t \in \mathbb{T}^+$, e assim da compacidade assintótica de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ existe um conjunto compacto K, com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, atrai U sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Portanto K atrai pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Afirmamos que existe uma vizinhança V de K tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitada para algum $t \in \mathbb{T}^+$. Se este não é o caso, existem sequências $x_n \in X$, $x_n \to y \in K$ e $t_n \to \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n\}$ não é limitada. Considere $A = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$. Temos A é compacto e $\gamma^+(A)$ não-limitada, o que contradiz a hipótese.

Sejam V uma vizinhança de K e $t_V \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitada. Como K atrai pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $T(t)$ é contínua, para cada $x \in X$ existe uma vizinhança W_x de x e $t_x > 0$ tal que $T(t)W_x \subset \gamma_{t_V}^+(V)$ para $t \geqslant t_x$, isto é, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$. Disto segue facilmente que $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. □

Lema 1.19. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo e $K \subset X$ um compacto. Se K atrai um compacto $K_1 \subset X$ sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacta e $\varnothing \neq \omega(K_1) \subset K$.*

Demonstração. Como K atrai K_1 sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$T(t)K_1 \subset \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K), \text{ para todo } t \geqslant t_0.$$

Assim, $\cup_{t \geqslant t_0} T(t)K_1$ está contido em uma união finita de bolas de raio ϵ. Como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é fortemente contínuo, $\cup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} T(t)K_1$ é compacto, pois é a imagem do conjunto compacto

[1]**Exercício.** Mostre esta afirmação.

$[0, t_0] \times K_1$ pela aplicação contínua $\mathbb{T}^+ \times X \ni (t, x) \to T(t)x \in X$. Disto segue que $\gamma^+(K_1) \cup K$ é totalmente limitado. Do Exercício 12, temos $\gamma^+(K_1) \cup K$ completo e portanto compacto. Segue que $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Além disso, temos $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ compacto e não-vazio para cada $t \in \mathbb{T}^+$, e $\overline{\gamma_t^+(K_1)} \subset \overline{\gamma_s^+(K_1)}$ para $s \leqslant t$, ou seja, a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t \in \mathbb{T}^+}$ possui a propriedade da interseção finita e portanto $\omega(K_1) \neq \varnothing$.

Finalmente, dados $y \in \omega(K_1)$ e $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(K)$, e assim $d(y, K) \leqslant \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $y \in K$ e o resultado segue. □

Proposição 1.20. *Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo e K um compacto que atrai a si mesmo sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Então $\omega(K) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K$.*

Demonstração. Claramente $\cap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K \subset \omega(K)$. Agora, para a inclusão contrária, usamos o Lema 1.19 com $K_1 = K$ para garantir que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacta. Do Lema 1.8 temos $\omega(K)$ não-vazio, compacto, invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e atrai K sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Assim

$$\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{T}^+,$$

e conclui o resultado. □

Teorema 1.21. *Seja $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Então $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Do fato de que $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado segue do Lema 1.18 que $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. Seja C um conjunto compacto dissipativo para $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e considere $B = \{x \in C \colon \gamma^+(x) \subset C\}$. Assim[1] B absorve subconjuntos compactos de X sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$, $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, e como $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B. Segue que K atrai subconjuntos compactos de X, e o conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não-vazio, compacto e invariante sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Agora se $J \subset X$ é compacto então $\omega(J) \subset K$, e consequentemente $\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K$ para cada $s \in \mathbb{T}^+$. Segue da Proposição 1.20 que $\omega(J) \subset \cap_{s \in \mathbb{T}^+} T(s)K = \omega(K)$ e consequentemente $\omega(K)$ atrai J.

Seja B um subconjunto limitado de X, como $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.10 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante

[1] **Exercício.** Mostre este fato.

por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Como $\omega(B)$ é compacto e invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, do parágrafo anterior temos $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $\mathcal{A}$ atrai B, o que mostra que $\mathcal{A}$ é o atrator global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. $\square$

Podemos então compilar os resultados desta subseção da seguinte forma:

Corolário 1.22. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então são equivalentes:*

(i) $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *é limitado dissipativo e assintoticamente compacto;*

(ii) $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *é compacto dissipativo, eventualmente limitado e assintoticamente compacto;*

(iii) $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *é ponto dissipativo, eventualmente limitado e assintoticamente compacto;*

(iv) $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *possui um atrator global* $\mathcal{A}$.

Além disso, se B_0 é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\mathcal{A} = \omega(B_0) \subset \overline{B_0}$.

1.1.3 Conexidade

Nesta curta subseção exploramos a propriedade de conexidade dos atratores globais para semigrupos.

Lema 1.23. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$ conexo tal que $\omega(B) \subset B$ e $\omega(B)$ é compacto e atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. Se $\omega(B)$ é desconexo, então $\omega(B)$ é a união disjunta de dois conjuntos compactos, e portanto separados por uma distância positiva 2ρ. Mas $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, logo $\mathrm{dist}_H(T(t)(B), \omega(B)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mas isto implica (do fato que $T(t)B$ é conexo) que $T(t)B$ deve estar contido na ρ vizinhança de uma das componentes de $\omega(B)$ para t suficientemente grande. Do Lema 1.7, obtemos $\omega(B)$ invariante, e assim $\omega(B) = T(t)\omega(B) \subset T(t)B$ contém $\omega(B)$, o que nos leva a uma contradição. $\square$

Observação 1.24. No caso em que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é fortemente contínuo e $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, a afirmação do Lema 1.23 é válida, por exemplo, para todo $B \subset X$ conexo para o qual existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ seja compacto. De fato, temos $\overline{\gamma_t^+(B)}$ conexo para cada $t \geqslant 0$, pois é a imagem do conexo $[t,\infty) \times B$ pela aplicação contínua $[0,\infty) \times X \ni (s,x) \mapsto T(s)x \in X$. Como $\omega(B) = \cap_{t\geqslant t_0}\overline{\gamma_t^+(B)}$, o resultado segue do Teorema A.1.

Exercício 17. Mostre que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo fortemente contínuo com um atrator global $\mathcal{A}$ e $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então $\omega(x)$ é conexo para cada $x \in X$. Além disso, se ξ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x, então $\alpha_\xi(x)$ é conexo.

Com isto podemos mostrar que atratores globais para semigrupos são sempre conexos.

Proposição 1.25. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo assintoticamente compacto para o qual existe um conjunto limitado dissipativo B_0 conexo. Então $\mathcal{A}$ é conexo.*

Demonstração. Do Corolário 1.17, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global $\mathcal{A} = \omega(B_0) \subset B_0$. Tomando $\overline{B_0}$ no lugar de B_0, podemos assumir que B_0 é fechado. Temos $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ compacto e atrai B_0 (já que B_0 é limitado) sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Portanto do Lema 1.23 segue que $\mathcal{A}$ é conexo. □

1.1.4 Condições suficientes para a existência de atratores

Nesta subseção apresentaremos alguns resultados que são comumente usados para garantir que um semigrupo possui atrator global.

Definição 1.26. Um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente compacto** se dado $B \subset X$ limitado existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto.

Note que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto então ele é condicionalmente eventualmente compacto (veja esta definição no Exercício 14).

Teorema 1.27. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo, ponto dissipativo e eventualmente compacto. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Segue do Exercício 14, sabemos que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto e assim, do Teorema 1.21, precisamos somente mostrar que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado.

Dado um conjunto limitado B, segue do fato de que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto que existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Logo, é necessário somente mostrar que a órbita de subconjuntos compactos de X são limitadas, pois $T(t)T(t_B)B \subset T(t)\overline{T(t_B)B}$. Seja $B_0 \subset X$ limitado que absorve pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ (tomando $\mathcal{O}_\epsilon(B_0)$ para algum $\epsilon > 0$ no lugar de B_0, podemos assumir que B_0 é aberto).

Tome $K \subset X$ um compacto. Dado $x \in K$, existe $s_x \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(s)x \in B_0$ para todo $s \geqslant s_x$. Como B_0 é aberto, segue da continuidade de $T(s_x)$ que existe uma vizinhança W_x de x tal que $T(s_x)W_x \subset B_0$. Definindo $t_x = t_{B_0} + s_x$ obtemos $T(t_x)W_x \subset T(t_{B_0})B_0$.

Da compacidade de K, existem $x_1, \dots, x_p$ tais que $K \subset \cup_{i=1}^{p} W_{x_i}$, e tome $\tau = \tau(K) = \max\{t_{x_i} \colon 1 \leqslant i \leqslant p\}$.

Defina $K_0 = \overline{T(t_{B_0})B_0}$ e $K_1 = \gamma^{+}_{[0,\tau(K_0)]}(K_0)$, que são compactos em X.

Afirmação: $T(t)K_0 \subset K_1$ para $t \in \mathbb{T}^+$.

Note que para $t \geqslant \tau(K_0)$, temos

$$T(t)K_0 \subset \cup_{i=1}^{p} T(t - t_{x_i})T(t_{x_i})W_{x_i} \subset \cup_{i=1}^{p} T(t - t_{x_i})K_0.$$

Se $t - t_{x_i} \leqslant \tau(K_0)$ então $T(t - t_{x_i})K_0 \subset K_1$. Do contrário, temos

$$T(t - t_{x_i})K_0 \subset \cup_{j=1}^{p} T(t - t_{x_i})W_{x_j} \subset \cup_{j=1}^{p} T(t - t_{x_i} - t_{x_j})K_0.$$

Se $t - t_{x_i} - t_{x_j} \leqslant \tau(K_0)$, temos $T(t - t_{x_i} - t_{x_j})K_0 \subset K_1$. Do contrário o processo se repete, um número finito de passos. Assim, obtemos $T(t)K_0 \subset K_1$ para $t \geqslant \tau(K_0)$. Para $0 \leqslant t \leqslant \tau(K_0)$ temos $T(t)K_0 \subset K_1$ por definição de K_1, e a afirmação está provada.

Disto segue claramente que para $t \geqslant t_{B_0}$ temos

$$T(t)B_0 \subset T(t - t_{B_0})T(t_{B_0})B_0 \subset T(t - t_{B_0})K_0 \subset K_1.$$

Obtemos assim para um compacto K de X que $T(t)K \subset K_1$ para $t \geqslant \tau(K)$, já que

$$T(t)K \subset \cup_{i=1}^{p} T(t - t_{x_i})T(t_{x_i})W_{x_i} \subset \cup_{i=1}^{p} T(t - t_{x_i})K_0 \subset K_1,$$

o que prova que a órbita de um subconjunto compacto de X é limitada e completa a demonstração. $\square$

Este próximo e último teorema deste capítulo é útil para obter a compacidade assintótica em espaços de Banach, e é utilizado comumente em conjunto com a Fórmula da Variação das Constantes para equações parabólicas.

Teorema 1.28. *Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Suponha que para cada $t \in \mathbb{T}$ podemos escrever $T(t) = S(t) + K(t)$ com $S(t)$ e $K(t)$ satisfazendo:*

(i) para cada conjunto limitado B em X, existe um $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $K(t)B$ é relativamente compacto para todo $t \geqslant t_B$.

(ii) para cada subconjunto limitado B de X, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$s_B(t) = \sup_{x \in B} \|S(t)x\|_X < \infty \qquad \text{para todo } t \geqslant t_B,$$

e $s_B(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. Além disso, se

(a) ou $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo,

(b) ou $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é fortemente contínuo, ponto dissipativo e eventualmente limitado,

então ele possui um atrator global.

Demonstração. Dados um conjunto B não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\epsilon > 0$, escolha $s \in \mathbb{T}^+$ tal que $s \geqslant t_B$ e $s_B(s) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $K(s)B$ é relativamente compacto, existem $N = N(s, B)$ em $\mathbb{N}$ e $y_1, \ldots, y_N$ em $K(s)B$ tais que $K(s)B \subset \cup_{i=1}^N B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i)$. Segue que

$$\omega(B) = \cap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{T(t)B} \subset \overline{T(s)B} \subset \overline{S(s)B} + \overline{K(s)B} \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(0) + \cup_{i=1}^N B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i) \subset \cup_{i=1}^N B_\epsilon(y_i).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, vemos que $\omega(B)$ é totalmente limitado. Logo $\omega(B)$ é fechado e totalmente limitado no espaço de Banach X e portanto compacto. Podemos ver facilmente que $\omega(B)$ é não-vazio, pois para cada sequência $\{x_n\}$ em B e $t_n \in \mathbb{T}^+$ com $t_n \to \infty$ a sequência $\{T(t_n)x_n\} = \{K(t_n)x_n + S(t_n)x_n\}$ possui uma subsequência convergente. Agora, procedendo como na demonstração do Lema 1.8, concluímos que $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, o que mostra que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. As outras afirmações seguem do Corolário 1.17 ou 1.22. $\square$

1.2 Semigrupos gradientes

Nesta seção consideraremos os *semigrupos gradientes*. Esta classe de semigrupos aparece naturalmente em diversas aplicações e suas características permitem descrever com bastante precisão a *estrutura interna* dos seus atratores.

No que segue, a não ser quando explicitarmos o contrário, denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto de todos pontos de equilíbrio do semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.29 (Semigrupo Gradiente)**.** Um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ fortemente contínuo é dito **gradiente** se existe uma função contínua $V\colon X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(i) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x)$ é decrescente para cada $x \in X$;

(ii) Se x é tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $x \in \mathcal{E}$.

Tal função V é chamada de uma **função de Lyapunov** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com respeito à $\mathcal{E}$.

Exercício 18. Assuma que V é uma função de Lyapunov para $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com respeito à $\mathcal{E}$. Mostre que:

(a) se existem $t_n \to \infty$ e $x, y \in X$ tais que $T(t_n)x \to y$ então $V(T(t)x) \to V(y)$ quando $t \to \infty$;

(b) se ξ é uma solução global de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x e existem $t_n \to \infty$ e $y \in X$ tais que $\xi(-t_n) \to y$ então $V(\xi(-t)) \to V(y)$ quando $t \to \infty$.

Para semigrupos gradientes temos os seguintes resultados de caracterização:

Lema 1.30. *Se $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente então $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ para cada $x \in X$. Além disso, se existe uma solução global ξ de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x então $\alpha_\xi(x) \subset \mathcal{E}$.*

Demonstração. Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y_1, y_2 \in \omega(x)$, segue do Exercício 18 que

$$V(y_1) \leftarrow V(T(t)x) \to V(y_2) \quad \text{quando } t \to \infty,$$

e portanto V é constante em $\omega(x)$. Portanto, como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$ para $t \in \mathbb{T}^+$, se $y \in \omega(x)$ segue que $V(T(t)y) = V(y)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Da propriedade (ii) na Definição 1.37 temos $y \in \mathcal{E}$.

O resultado é análogo para $\alpha_\xi(x)$ e é deixado como exercício ao leitor. □

Exercício 19. Prove o resultado análogo para $\alpha_\xi(x)$ no lema acima.

Exercício 20. Se $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ e conjunto de pontos de equilíbrio $\mathcal{E}$, mostre que $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$.

Lema 1.31. *Se $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente que possui atrator global $\mathcal{A}$ e seu conjunto de pontos de equilíbrio $\mathcal{E}$ só possui pontos isolados, então $\mathcal{E}$ é finito e $\omega(x)$ é um conjunto unitário para cada $x \in X$. Além disso se $x \in \mathcal{A}$ e $\xi \colon \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ é uma solução global de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x, então $\alpha_\xi(x)$ é um conjunto unitário.*

Demonstração. Do Exercício 20, sabemos que $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é compacto, se $\mathcal{E}$ só possui pontos isolados, ele é finito.

Mostremos agora que se $\mathcal{E}$ é finito então $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, o resultado segue do Exercício 17. Suponha então que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e $\omega(x) = \{y_1, \cdots, y_\ell\} \subset \mathcal{E}$ para algum $\ell \geqslant 2$, com $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$.

Exercício 21. Mostre que existe uma cobertura disjunta $\{\mathbb{N}_i\}_{i=1}^{\ell}$ de $\mathbb{N}$ com as seguintes propriedade:

(a) $\mathbb{N}_i$ é infinito para cada $i = 1, \ldots, \ell$;

(b) $T(n)x \to y_i$ quando $\mathbb{N}_i \ni n \to \infty$, para cada $i = 1, \ldots, \ell$.

Além disso, mostre que existem $j = 2, \ldots, \ell$ e uma sequência $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ tal que $k_{2n-1} \in \mathbb{N}_1$ e $k_{2n} = k_{2n-1} + 1 \in \mathbb{N}_j$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Consideremos

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant i < j \leqslant \ell} d(y_i, y_j) > 0,$$

e definimos

$$\mathbb{N}_i = \{n \in \mathbb{N} \colon d(T(n)x, y_i) < \delta_0\}.$$

Como para cada $i = 1, \cdots, \ell$ temos $y_i \in \omega(x)$, existe $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ com $n_k \to \infty$ tal que $T(n_k)x \to y_i$. Assim, para k suficientemente grande temos $d(T(n_k), y_i) < \delta_0$, o que mostra que $n_k \in \mathbb{N}_i$, e portanto $\mathbb{N}_i$ é infinito (o que prova (a)).

Para provar (b), assuma que o item não é válido. Assim, existem $i \in \{1, \cdots, \ell\}$, $0 < \epsilon < \delta_0$ e sequência $\{n_k\} \subset \mathbb{N}_i$ tal que $d(T(n_k)x, y_i) \geqslant \epsilon$. Como o semigrupo possui atrator global, a sequência $\{T(n_k)x\}$ possui subsequência convergente para algum ponto $y_j \in \omega(x)$. Para este ponto, temos $d(y_j, y_i) \geqslant \epsilon$. Por outro lado, como $\{n_k\} \subset \mathbb{N}_i$, devemos ter $d(T(n_k)x, y_i) \leqslant \delta_0$, o que mostra que $d(y_j, y_i) \leqslant \delta_0$. Da definição de δ_0, isto implica que $y_j = y_i$, o que nos dá uma contradição.

Para a última afirmação, fazemos a seguinte afirmação: existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{N}$ satisfazendo $t_{2n-1} \in \mathbb{N}_1$ e $t_{2_n} = t_{2n-1} + 1 \notin \mathbb{N}_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se esse não fosse o caso, existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathbb{N}_1$ para todo $n \geqslant n_0$, e contradiz o fato de $\mathbb{N}_2$ ser infinito.

Como temos uma quantidade finita de $\mathbb{N}_i$ para $i \neq 1$, existem $j \in \{2, \cdots, \ell\}$ e uma subsequência de $\{t_n\}$ tal que ao longo desta subsequência $t_{2n} \in \mathbb{N}_j$. Reindexando essa subsequência, se necessário, obtemos o resultado.

Então, do exercício acima, e como $y_1 \in \mathcal{E}$, obtemos

$$y_1 = T(1)y_1 = T(1) \lim_{k \to \infty} T(k_{2n-1})x = \lim_{k \to \infty} T(k_{2n})x = y_j,$$

o que é uma contradição, já que $j \neq 1$, e mostra que se $\mathcal{E}$ for finito, $\omega(x)$ será um conjunto unitário. A prova de que $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ é inteiramente análoga, e é deixada como exercício. $\square$

Se E é um conjunto invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, definimos o **conjunto instável de** E **por**

$$W^u(E) = \{x \in X\colon \text{ existe uma solução global } \xi \text{ de } \{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\} \text{ por } x \\ \text{com } d(\xi(t), E) \to 0 \text{ quando } t \to -\infty\},$$

e o **conjunto estável de** E por

$$W^s(E) = \{x \in X\colon d(T(t)x, E) \to 0 \text{ quando } t \to \infty\}.$$

Exercício 22. Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo e E um conjunto invariante. Mostre que $W^u(E)$ é invariante. Mostre ainda que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ e E é um conjunto invariante limitado por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então $E \subset W^u(E) \subset \mathcal{A}$.

Mostre também que $E \subset W^s(E)$ e que $W^s(E)$ é positivamente invariante.

Teorema 1.32. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradiente, eventualmente limitado e assintoticamente compacto, cujo conjunto de pontos equilíbrios $\mathcal{E}$ é limitado. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$.*

Se, além disso, $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ é finito então $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$. Finalmente, se existir um conjunto conexo e limitado B que contenha $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ será conexo.

Demonstração. Como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.10 que para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e atrai x sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Do fato de que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradiente segue que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$. Assim $\mathcal{E}$ atrai pontos de X, e como $\mathcal{E}$ é limitado, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo. Assim, do Teorema 1.21, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Do exercício acima, $W^u(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. Nos resta então provar a inclusão contrária.

Dado $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global limitada ξ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x com $\xi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$. Assim $\xi(\mathbb{T})$ é relativamente compacto, o que implica que $\alpha_\xi(x) \neq \varnothing$. Do Lema 1.30, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$, e portanto $d(\xi(t), \mathcal{E}) \to 0$ quando $t \to -\infty$, e mostra que $x \in W^u(\mathcal{E})$.

Agora, se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots e_n^*\}$, segue imediatamente do Lema 1.31 que $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$. Finalmente, se $\mathcal{A}$ está contido em um subconjunto conexo e limitado de X, segue do Lema 1.23 que $\mathcal{A}$ é conexo. ☐

O seguinte lema é uma consequência da propriedade de continuidade dos semigrupos fortemente contínuos, e será importante mais a frente. Este resultado garante que dado um ponto de equilíbrio y^* de um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e y perto de y^*, a órbita finita $\gamma^+_{[0,t]}(y) = \{T(s)y\colon s \in [0,t] \cap \mathbb{T}^+\}$ permanece perto de y^* para valores grandes de t.

Lema 1.33. *Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo e y^* um ponto de equilibrio de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. Dados $t\in\mathbb{T}^+$ e $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que*

$$d(T(s)y,y^*)<\epsilon \quad \textit{para todos } y\in\mathcal{O}_\delta(y^*) \textit{ e } s\in[0,t]\cap\mathbb{T}^+.$$

Demonstração. Suponha que existam $t_0\in\mathbb{T}^+$ e $\epsilon_0>0$ tais que, para todo $k\in\mathbb{N}$ existem $x_k\in\mathcal{O}_{\frac{1}{k}}(y^*)$ e $s_k\in[0,t_0]\cap\mathbb{T}^+$ com $d(T(s_k)x_k,y^*)\geqslant\epsilon_0$. Como $[0,t_0]\cap\mathbb{T}^+$ é compacto, podemos assumir, tomando subsequências se necessário, que $s_k\to s_0\in[0,t_0]\cap\mathbb{T}^+$. Da continuidade forte de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, $T(s_k)x_k\to T(s_0)y^*=y^*$, o que implica que $0=d(y^*,y^*)\geqslant\epsilon_0$, e nos dá uma contradição. □

Exercício 23. Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo, y^* um ponto de equilíbrio de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ e $y_k\to y^*$. Fixe $\epsilon>0$ e tome, para cada $k\in\mathbb{N}$, $\tau_k\in\mathbb{T}^+$ tal que

$$d(T(\tau_k)y_k,y^*)\geqslant\epsilon \quad \text{e} \quad d(T(t)y_k,y^*)<\epsilon \quad \text{para } t\in[0,\tau_k)\cap\mathbb{T}^+.$$

Mostre que $\tau_k\to\infty$ quando $k\to\infty$.

Teorema 1.34. *Suponha que $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente com um atrator global $\mathcal{A}$, um conjunto finito de pontos de equilíbrio $\mathcal{E}=\{y_1^*,\dots,y_n^*\}$, e uma função de Lyapunov V com respeito à $\mathcal{E}$.*

Seja $V(\mathcal{E})=\{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_p\}$ a imagem de $\mathcal{E}$ por V, onde $1\leqslant p\leqslant n$, com $\mathfrak{n}_i<\mathfrak{n}_{i+1}$ para $i=1,\dots,p-1$.

Se $i=1,\dots,p-1$ e $\mathfrak{n}_i\leqslant r<\mathfrak{n}_{i+1}$, então $X_r=\{z\in X\colon V(z)\leqslant r\}$ é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. A restrição $\{T_r(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ a X_r possui atrator global $\mathcal{A}^{(i)}$ dado por

$$\mathcal{A}^{(i)}=\bigcup\{W^u(y_\ell^*)\colon V(y_\ell^*)\leqslant\mathfrak{n}_i\}.$$

*Em particular, $V(z)\leqslant\mathfrak{n}_i$ para $z\in\mathcal{A}^{(i)}$, $\mathfrak{n}_1=\min\{V(x)\colon x\in X\}$ e $\mathcal{A}^{(1)}=\{y^*\in\mathcal{E}\colon V(y^*)=\mathfrak{n}_1\}$ consiste de todos os pontos de equilíbrio **assintoticamente estáveis**, isto é para cada $y^*\in\mathcal{A}^{(1)}$ existe uma vizinhança U_{y^*} de y^* tal que $T(t)x\to y^*$ quando $t\to\infty$ para cada $x\in U_{y*}$.*

Demonstração. Segue diretamente da definição de função de Lyapunov que X_r é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$.

Exercício 24. Mostre que $\{T_r(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ (em X_r) é um semigrupo gradiente com conjunto de pontos de equilíbrio $\mathcal{E}_r=\{y_\ell^*\colon V(y_\ell^*)\leqslant r\}$ e função de Lyapunov V_r, que é a restrição de V a X_r. Mostre ainda que $\{T_r(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto.

Assim, do Teorema 1.32, segue que $\{T_r(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}^{(i)} = \cup\{W^u(y^*_\ell)\colon V(y^*_\ell) \leqslant \mathfrak{n}_i\}$.

Nos resta mostrar a última afirmação. Para tanto, tomemos

$$\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{d(x^*,y^*)\colon x^*,y^* \in \mathcal{A}^{(1)},\ x^* \neq y^*\} > 0.$$

Mostraremos primeiramente que $\mathcal{A}^{(1)}$ consiste somente dos equilíbrios **estáveis**, isto é, dados $x^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe $0 < \delta' < \delta$ tal que $\gamma^+(x) \subset \mathcal{O}_\delta(x^*)$ para todo $x \in \mathcal{O}_{\delta'}(x)$.

Suponha por absurdo que existam $x^* \in \mathcal{A}^{(1)}$, $0 < \delta < \delta_0$ e sequências $x_k \to x^*$ em X e $\{t_k\}$ em $\mathbb{T}^+$ tais que

$$d(T(t_k)x_k, x^*) \geqslant \delta \quad \text{ e } \quad d(T(t)x_k, x^*) < \delta \quad \text{ para } 0 \leqslant t < t_k.$$

Exercício 25. Note que, usando o Exercício 23, que $t_k \to \infty$.

Segue assim, do Exercício 16, que $\{T(t_k)x_k\}$ possui uma subsequência convergente, que denotamos a mesma, para um ponto $y \in X$. Como $x_k \to x^*$, temos $V(x_k) \to V(x^*) = \mathfrak{n}_1$. Mas então

$$V(T(t)y) \leqslant V(y) = \lim_{k\to\infty} V(T(t_k)x_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} V(x_k) = \mathfrak{n}_1,$$

e portanto $V(T(t)y) = V(y) = \mathfrak{n}_1$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, o que mostra que $y \in \mathcal{A}^{(1)}$ e $d(y,x^*) \geqslant \delta$.

Utilizando o mesmo argumento, mas para a sequência $\{T(t_k-1)x_k\}$, obtemos um ponto $z \in \mathcal{A}^{(1)}$ com $d(z,x^*) \leqslant \delta$ com $T(t_k-1)x_k \to z$. Mas então, como $d(z,x^*) \leqslant \delta < \delta_0$ segue que $z = x^*$ e assim

$$x^* = T(1)x^* = \lim_{k\to\infty} T(1)T(t_k-1)x_k = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k = y,$$

o que nos dá uma contradição e mostra que todo ponto de $\mathcal{A}^{(1)}$ é estável.

Exercício 26. Mostre que para cada $x \in X$ existe $y^* \in \mathcal{E}$ tal que $T(t)x \to y^*$ quando $t \to \infty$.

Com este exercício mostramos que cada $x \in \mathcal{A}^{(1)}$ é assintoticamente estável, e concluímos a demonstração. $\square$

Podemos generalizar o conceito de semigrupos gradientes, chamados de *semigrupos gradientes generalizados*, da seguinte maneira:

Definição 1.35 (Invariante Maximal)**.** Um conjunto $E \subset X$ invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito um **invariante maximal** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se existe $\epsilon > 0$ tal que E é o maior subconjunto invariante em $\mathcal{O}_\epsilon(E)$, isto é, se $F \subset \mathcal{O}_\epsilon(E)$ é um conjunto invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então $F \subset E$.

Exercício 27. Dado um conjunto $E \subset X$ invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com fecho $\overline{E}$ compacto, mostre que $\overline{E}$ também é invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Conclua que se E é um invariante maximal, então E é fechado.

Definição 1.36 (Coleção Disjunta de Invariantes Isolados)**.** Dizemos uma coleção de conjuntos invariantes maximais $\mathbf{E}$ de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é uma **coleção disjunta de invariantes isolados** se existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(E_1) \cap \mathcal{O}_\delta(E_2) = \varnothing$ para todos $E_1, E_2 \in \mathbf{E}$ com $E_1 \neq E_2$.

Se, além disso, existe um limitado $B \subset X$ tal que $E \subset B$ para todo $E \in \mathbf{E}$, dizemos que $\mathbf{E}$ é uma **coleção disjunto de invariantes isolados limitada**.

Com isso podemos definir os *semigrupos gradientes generalizados*.

Definição 1.37 (Semigrupo Gradiente)**.** Um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ fortemente contínuo com uma coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E}$ é dito um **semigrupo gradiente generalizado** se existe uma função contínua $V \colon X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(i) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x)$ é decrescente para cada $x \in X$;

(ii) V é constante em cada componente conexa de cada $E \in \mathbf{E}$;

(iii) se x é tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $x \in E$ para algum $E \in \mathbf{E}$.

Tal função V é chamada de uma **função de Lyapunov (generalizada)** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com respeito à $\mathbf{E}$.

Exercício 28. Verifique que todos os resultados desta seção continuam válidos se trocarmos o conjunto de pontos de equilíbrio $\mathcal{E}$ por uma coleção disjunta de invariantes isolados (limitada, quando necessário).

1.3 Semigrupos dinamicamente gradientes

A associação dos semigrupos gradientes às suas funções de Lyapunov fazem que, em geral, não esperemos que uma perturbação de um semigrupo gradiente nos dê um novo semigrupo gradiente. Esta associação é o maior obstáculo na prova de que o problema perturbado seja gradiente. Assim, definimos o conceito de *semigrupo dinamicamente gradiente* utilizando

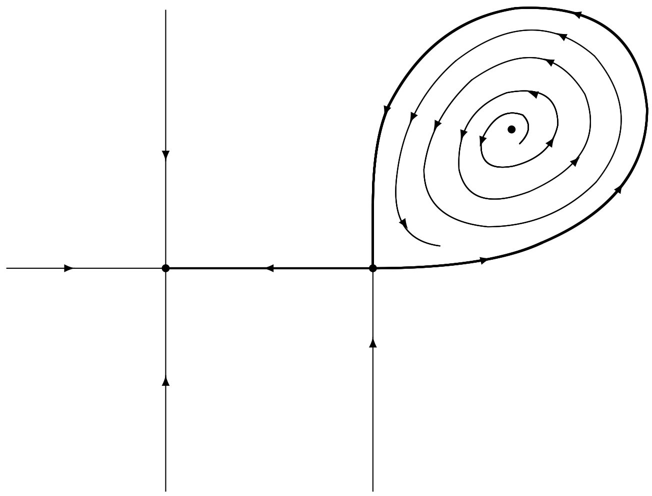

Figura 1.1: Um atrator do tipo gradiente.

apenas as propriedades dinâmicas de um semigrupo gradiente e evitando a associação com funções de Lyapunov. Mostraremos que pequenas perturbações de semigrupos dinamicamente gradientes são ainda semigrupos dinamicamente gradientes.

Antes de continuarmos, vamos enfatizar a distinção entre semigrupos gradientes e semigrupos que possuem *atratores do tipo gradiente*.

Definição 1.38. Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ e uma coleção finita de pontos de equilíbro $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_p^*\}$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Diremos que $\mathcal{A}$ é de **tipo gradiente** se

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{p} W^u(y_i^*).$$

Neste caso dizemos que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um **semigrupo com atrator do tipo gradiente**.

Como provado no Teorema 1.32, um semigrupo gradiente com um atrator global e um número finito de equilíbrios é um semigrupo com atrator do tipo gradiente.

Um atrator do tipo gradiente pode vir de um semigrupo que não é gradiente, como por exemplo [5, Páginas 2 e 3]. Além disso, notamos que perturbações de um semigrupo com um atrator do tipo gradiente pode não ter atrator do tipo gradiente. Vejamos um exemplo desta situação. A Figura 1.1 apresenta um atrator do tipo gradiente que não é proveniente de um semigrupo gradiente (pois apresenta uma *órbita homoclínica*).

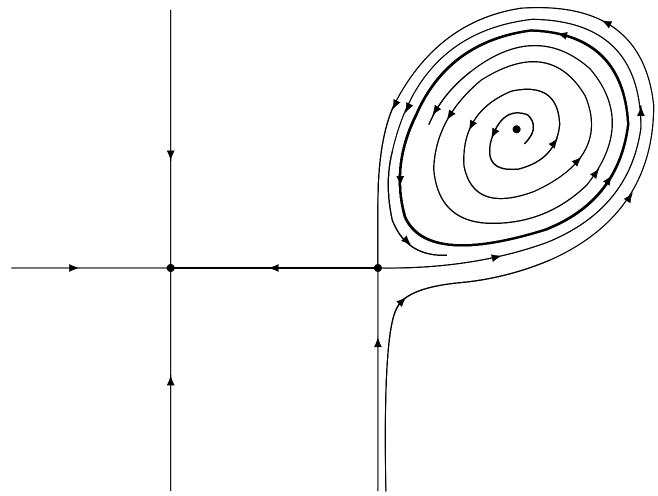

Figura 1.2: Atrator que não é de tipo gradiente.

Porém, uma pequena perturbação deste semigrupo pode resultar em um semigrupo com o atrator da Figura 1.2. Tal atrator contém uma órbita periódica, e portanto não é a união dos conjuntos instáveis de seus pontos de equilíbrio (ou seja, não é um atrator de tipo gradiente). Em [3], os autores provam que certas perturbações de semigrupos gradiente geram semigrupos que possuem atrator de tipo gradiente.

Isto nos leva à seguinte questão: quais são as propriedades dinâmicas de um semigrupo, que são estáveis sob certas pertubações, que garantem que ele possua um atrator de tipo gradiente?

Claramente, tais propriedades devem estar presentes nos semigrupos gradientes e em suas perturbações, já que estas possuem atratores de tipo gradiente.

Com esta pergunta em mente, em [2] os autores introduzem o conceito de *semigrupos dinamicamente gradientes* (chamados até então de *gradient-like semigroups*), utilizando as propriedades dinâmicas essenciais dos semigrupos gradientes.

No que segue, apresentaremos as definições e resultados essenciais presentes em [2], para mostrar que semigrupos dinamicamente gradientes são também gradientes. Começaremos com o conceito de *estruturas homoclínicas* (também chamadas de *estruturas heteroclínicas*), ilustrado na Figura 1.3 e descrito a seguir:

Definição 1.39 (Estrutura Homoclínica)**.** Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ e um conjunto finito de pontos de equilíbrio $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_p^*\}$. Uma **estrutura homoclínica** em $\mathcal{A}$ é um subconjunto $\{y_{\ell_1}^*, \cdots, y_{\ell_k}^*\}$ de $\mathcal{E}$, com $1 \leqslant k \leqslant p$, e um conjunto de

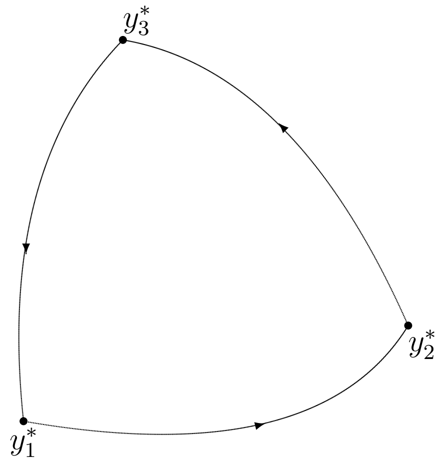

Figura 1.3: Exemplo de estrutura homoclínica.

soluções globais $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ tais que, definindo $y^*_{\ell_{k+1}} := y^*_{\ell_1}$, temos

$$\lim_{t\to-\infty} \xi_i(t) = y^*_{\ell_i} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} \xi_i(t) = y^*_{\ell_{i+1}} \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k,$$

e também

$$\mathrm{dist}_H(\xi_i(\mathbb{R}), \mathcal{E}) > 0 \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{1.3}$$

Observação 1.40. A condição (1.4) é automaticamente satisfeita quando $k \geqslant 2$, e ela serve simplesmente para garantir que, no caso $k = 1$, não tenhamos uma solução estacionária $\xi_1(t) = y^*_{\ell_1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que *não constitui* uma estrutura homoclínica.

No caso $k = 1$, uma estrutura homoclínica também é chamada de *ciclo homoclínico*.

Definição 1.41 (Semigrupo Dinamicamente Gradiente)**.** Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com um atrator global $\mathcal{A}$ e um conjunto finito de pontos fixos $\mathcal{E} = \{y^*_1, \cdots y^*_p\}$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Dizemos que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um **semigrupo dinamicamente gradiente** se as seguintes condições estão satisfeitas:

(G1) dada uma solução global limitada ξ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existem $i, j \in \{1, \cdots, p\}$ tais que

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), y^*_i) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} d(\xi(t), y^*_j) = 0;$$

(G2) $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.

Exercício 29. Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com um atrator global $\mathcal{A}$ e um conjunto finito de pontos fixos $\mathcal{E} = \{y^*_1, \cdots y^*_p\}$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Se (G1) está satisfeita mostre que que $\mathcal{A}$ é de tipo gradiente, isto é, mostre que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{p} W^u(y_i^*).$$

A hipótese (G2) nos garante que que nenhum número finito de órbitas pode produzir um contorno fechado.

Proposição 1.42. *Se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente com atrator global $\mathcal{A}$ e um conjunto finito $\mathcal{E}$ de pontos de equilíbrio, então existe $y_\alpha^*, y_\omega^* \in \mathcal{E}$ tais que y_α^* tem conjunto estável em $\mathcal{A}$ trivial, isto é, $W^s_{\mathcal{A}}(y_\alpha^*) = \{y_\alpha^*\}$ onde*

$$W^s_{\mathcal{A}}(y_\alpha^*) = \{x \in \mathcal{A}\colon \ \textit{tal que} \ \ d(T(t)x, y_\alpha^*) \to 0 \ \textit{quando} \ t \to \infty\},$$

e y_ω^* tem conjunto instável trivial, isto é, $W^u(y_\omega^*) = \{y_\omega^*\}$.

Demonstração. Vamos provar a existência y_ω^*. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_p^*\}$ e para todo y_i^* existe uma solução global não-trivial ξ_i de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tal que $\xi_i(t) \to y_i^*$ quando $t \to -\infty$, é simples ver que existe um $1 \leqslant \ell \leqslant p$ tal que $\{y_1^*, \cdots, y_\ell^*\}$ e $\{\xi_1, \cdots, \xi_\ell\}$ constituem uma estrutura homoclínica em $\mathcal{A}$, o que contradiz (G2).

A prova da existência de y_α^* é deixada ao leitor. □

Da mesma forma que generalizamos o conceito de semigrupo gradiente, trocando o conjunto de pontos de equilíbrio por uma coleção disjunta de invariantes isolados, podemos fazer o mesmo com os semigrupos dinamicamente gradientes.

Definição 1.43 (Estrutura Homoclínica)**.** Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ e uma coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1^*, \cdots, E_p^*\}$ limitada. Uma **estrutura homoclínica** em $\mathcal{A}$ é um subconjunto $\{E_{\ell_1}^*, \cdots, E_{\ell_k}^*\}$ de $\mathbf{E}$, com $1 \leqslant k \leqslant p$, e um conjunto de soluções globais $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ tais que, definindo $E_{\ell_{k+1}}^* := E_{\ell_1}^*$, temos

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi_i(t), E_{\ell_i}^*) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} d(\xi_i(t), E_{\ell_{i+1}}^*) = 0 \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k,$$

e também

$$\operatorname{dist}_H(\xi_i(\mathbb{R}), \cup_{i=1}^p E_i^p) > 0 \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{1.4}$$

Definição 1.44 (Semigrupos Dinamicamente Gradientes Generalizados)**.** Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com atrator global $\mathcal{A}$ e uma coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1^*, \cdots, E_p^*\}$ limitada. Diremos que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um **semigrupo dinamicamente gradiente generalizado** (com respeito à $\mathbf{E}$) se, (G1) dada uma solução global ξ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$, existem $i, j \in \{1, \cdots, p\}$ tais que

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), E_i) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} d(\xi(t), E_j) = 0.$$

(G2) $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.

Exercício 30. Mostre que os resultados para semigrupos dinamicamente gradientes continuam válidos (com as adaptações necessárias) para os semigrupos dinamicamente gradientes generalizados.

1.4 Semigrupos dinamicamente gradientes são gradientes

Nesta seção nosso objetivo é mostrar que um semigrupo dinamicamente gradiente generalizado é um semigrupo gradiente generalizado, isto é, possui uma função de Lyapunov.

1.4.1 Pares atrator-repulsor

Agora introduziremos as noções de *atrator local, repulsor* e *par atrator-repulsor*.

Definição 1.45 (Atrator local, Repulsor e Par Atrator-Repulsor)**.** Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que um subconjunto não vazio Ξ de $\mathcal{A}$ é um **atrator local** se existe um $\epsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)) = \Xi$.

Para um atrator local Ξ, seu **repulsor** Ξ^* é o conjunto definido por

$$\Xi^* = \{x \in \mathcal{A}\colon \omega(x) \cap \Xi = \varnothing\}.$$

O par (Ξ, Ξ^*) é chamado um **par atrator-repulsor** de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Segue diretamente da definição que se Ξ é um atrator local então Ξ é compacto e invariante.

Exercício 31. (a) Mostre que $\Xi \subset \mathcal{A}$ é um atrator local se, e somente se, Ξ é fechado, invariante e existe $\epsilon > 0$ tal que $\operatorname{dist}_H(T(t)\mathcal{O}_\epsilon(\Xi), \Xi) \to 0$ quando $t \to \infty$.

(b) Mostre que se Ξ é um atrator local, então seu repulsor Ξ^* é fechado e invariante e $\Xi \cap \Xi^* = \varnothing$. Ainda mais, se $\Xi = \omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi))$ então $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \Xi^* = \varnothing$.

(c) Seja $\Xi \subset \mathcal{A}$ um invariante. Mostre que se Ξ é um atrator local então $W^u(\Xi) = \Xi$.

(d) Mostre que se Ξ_1, Ξ_2 são atratores locais e $\Xi_1 \subset \Xi_2$ então $\Xi_2^* \subset \Xi_1^*$.

A definição dada de atrator global difere um pouco da definição usual (como em [4, 7], por exemplo) pois pedimos que o atrator local seja o ω-limite de uma vizinhança *em* X e não de uma vizinhança em $\mathcal{A}$. Provaremos a seguir que ambas as definições coincidem, e para precisaremos de dois lemas.

Lema 1.46. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$, $\sigma_k \to \infty$ e $\{u_k\} \subset X$ limitada. Defina $\xi_k\colon \mathbb{T}^+_{-\sigma_k} \to X$ por $\xi_k(s) = T(s+\sigma_k)u_k$. Então existe uma solução global ϕ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ e uma subsequência de $\{\xi_k\}$ (que denotamos a mesma) tal que*

$$\xi_k(s) \to \phi(s) \quad \textit{para todo } s \in \mathbb{T}.$$

Demonstração. Veja que para o conjunto limitado $B = \{u_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ temos

$$d(\xi_k(0), \mathcal{A}) = d(T(\sigma_k)u_k, \mathcal{A}) \leqslant \operatorname{dist}_H(T(\sigma_k)B, \mathcal{A}) \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty,$$

já que $\sigma_k \to \infty$. Logo, a menos de subsequência, existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $\xi_k(0) \to x$. Para $s \in \mathbb{T}^+$ defina $\phi(s) = T(s)x$, e obtemos

$$\xi_k(s) = T(s)\xi_k(0) \to T(s)x = \phi(s).$$

Procedendo de maneira análoga, $\{\xi_k(-1)\}$ tem uma subsequência (que denotamos igual) convergente com limite $x_{-1} \in \mathcal{A}$. Definindo $\phi(s) = T_0(s+1)x_{-1}$ para $s \in [-1, 0) \cap \mathbb{T}$, temos $T(1)x_{-1} = \lim_{k\to\infty} T(1)\xi_k(-1) = \lim_{k\to\infty} \xi_k(0) = x$, e ϕ satisfaz $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $t \in \mathbb{T}^+$ e $s \in \mathbb{T}^+_{-1}$, e também para $s \in \mathbb{T}^+_{-1}$ obtemos

$$\xi_k(s) = T(s+1)\xi_k(-1) \to T(s+1)x_{-1} = \phi(s).$$

Indutivamente construímos uma solução global ϕ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ e uma subsequência de $\{\xi_k\}$ tal que

$$\xi_k(s) \to \phi(s) \quad \text{para todo } s \in \mathbb{T}^+.$$

$\square$

Exercício 32. Faça os detalhes que faltam na prova do lema acima.

Lema 1.47. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$ e E um conjunto compacto e invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Assuma que existe um $\epsilon > 0$ tal que*

$$d(T(t)(\mathcal{O}_\epsilon(E) \cap \mathcal{A}), E) \to 0 \quad \textit{quando } t \to \infty.$$

Então dado $0 < \delta < \epsilon$ *existe* $0 < \delta' < \delta$ *tal que* $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(E)) \subset \mathcal{O}_\delta(E)$.

Demonstração. Dados $0 < \delta < \epsilon$, assuma que tal δ' não exista. Desta forma, para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k > \frac{1}{\delta}$, existem $x_k \in \mathcal{O}_{1/k}(E)$ e $t_k \in \mathbb{T}^+$ tais que $d(T(t_k)x_k, E) \geqslant \delta$ e $d(T(t)x_k, E) < \delta$ para $t \in [0, t_k) \cap \mathbb{T}$. Como E é compacto, podemos assumir que $x_k \to x \in E$, e com um exercício análogo ao Exercício 23, temos $t_k \to \infty$.

Definindo $\xi_k(s) = T(s + t_k)x_k$ para $s \in \mathbb{T}^+_{-t_k}$, do Lema 1.46 existe uma solução global ϕ de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ e uma subsequência de $\{\xi_k\}$ (que denotamos a mesma) tal que $\xi_k(s) \to \phi(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$. Como $\xi_k(s) \in \mathcal{O}_\delta(E)$ para $s \in [-t_k, 0) \cap \mathbb{T}$, segue que $\phi(s) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(E)} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\epsilon(E) \cap \mathcal{A}$ para todo $s < 0$. Além disso, temos $d(\phi(0), E) \geqslant \delta$, e consequentemente

$$\delta \leqslant d(\phi(0), E) = d(T(k)\phi(-k), E) \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty,$$

o que nos dá uma contradição. $\square$

Com isto podemos provar a equivalência da nossa definição de atrator local com as de [4, 7].

Lema 1.48. *Seja* $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo com um atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $\{S(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *a restrição de* $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *a* $\mathcal{A}$*, isto é,* $S(t) = T(t)\big|_{\mathcal{A}}$ *para cada* $t \in \mathbb{T}$*, que é um semigrupo em* $\mathcal{A}$*. Se* Ξ *é um atrator local de* $\{S(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *em* $\mathcal{A}$ *e* K *é um subconjunto compacto de* $\mathcal{A}$ *com* $K \cap \Xi^* = \varnothing$*, então* Ξ *atrai* K*. Além disso* Ξ *é um atrator local de* $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Demonstração. Tome K um subconjunto compacto de $\mathcal{A}$ com $K \cap \Xi^* = \varnothing$. Se $\Xi = \omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A})$ não atrai K, existem $0 < \delta < \epsilon$, $t_k \to \infty$ e $K \ni x_k \to x \in K$ tais que $d(T(t_k)x_k, \Xi) \geqslant \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para este δ, pelo Lema 1.47, existe $0 < \delta' < \delta$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(E)) \subset \mathcal{O}_\delta(E)$ e portanto devemos ter $d(T(t)x_k, \Xi) \geqslant \delta'$ para todo $t \in [0, t_k] \cap \mathbb{T}$. Isto implica que $d(T(t)x, \Xi) \geqslant \delta'$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e consequentemente $\omega(x) \cap \Xi = \varnothing$ e portanto $x \in \Xi^*$, o que é uma contradição.

Para a parte restante do resultado note que dado $0 < \delta < \epsilon$, do Lema 1.47, existe $0 < \delta' < \delta$ tal que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \overline{\mathcal{O}_\delta(\Xi)} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ e portanto $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \cap \Xi^* = \varnothing$. Da invariância de $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ e da propriedade que Ξ atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$, devemos ter $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \Xi$. Como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$ o resultado segue. $\square$

Agora podemos explorar algumas propriedades interessantes dos pares atrator-repulsor.

Exercício 33. Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com um atrator global $\mathcal{A}$, (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor e ξ uma solução global de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ com $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* = \varnothing$. Mostre que $\overline{\xi(\mathbb{T})} \subset \Xi$.

Proposição 1.49. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com um atrator global $\mathcal{A}$, (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor e ξ uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$. Então:*

(i) se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$ então $d(\xi(t), \Xi^*) \to 0$ quando $t \to -\infty$.

(ii) se $\delta > 0$ é tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi^*) \cap \Xi = \varnothing$ e $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$ então $d(\xi(t), \Xi^*) \to 0$ quando $t \to -\infty$.

Demonstração. Se a conclusão de (i) é falsa, existem $\delta > 0$ e sequência $s_k \to -\infty$ com $d(\xi(s_k), \Xi^*) \geqslant \delta$. Tomando uma subsequência de $\{s_k\}$ se necessário, podemos assumir que $s_k - s_{k+1} \geqslant k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como Ξ deve atrair o subconjunto compacto $K = \{z \in \mathcal{A}\colon d(z, \Xi^*) \geqslant \delta\}$ de $\mathcal{A}$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$d(T(t)\xi(s_{k+1}), \Xi) \leqslant \operatorname{dist}_H(T(t)K, \Xi) < \delta \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}^+_{t_0}.$$

Para $k \geqslant t_0$ temos $s_k - s_{k+1} \geqslant k \geqslant t_0$ e tomando $t = s_k - s_{k+1}$ na equação acima obtemos

$$d(\xi(s_k), \Xi) = d(T(s_k - s_{k+1})\xi(s_{k+1}), \Xi) < \delta,$$

o que nos dá uma contradição.

Para provar (ii) observamos que se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* = \varnothing$, do Exercício 33 temos $\overline{\xi(\mathbb{T})} \subset \Xi$, o que nos dá uma contradição com o fato de que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$ para $t \in \mathbb{T}^-$. Por outro lado, se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$, a conclusão segue de (i). □

Proposição 1.50. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com atrator global $\mathcal{A}$, e (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se ξ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ com $\xi(0) \notin \Xi \cup \Xi^*$, então*

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), \Xi^*) = 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty} d(\xi(t), \Xi) = 0.$$

Demonstração. Como $\xi(0) \notin \Xi^*$, segue do Lema 1.48 que Ξ atrai $\xi(0)$ e portanto $d(\xi(t), \Xi) \to 0$ quando $t \to \infty$. Para a outra convergência, assuma primeiro que $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* = \varnothing$. Segue do Exercício 33 que $\overline{\xi(\mathbb{T})} \subset \Xi$ e, em particular, $\xi(0) \in \Xi$. Isto nos dá uma contradição e mostra que $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$, e o resultado segue do item (i) da Proposição 1.49. □

Corolário 1.51. *Se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo fortemente contínuo com um atrator global $\mathcal{A}$, e (Ξ, Ξ^*) é um par atrator-repulsor para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente generalizado relativo à coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{\Xi, \Xi^*\}$.*

Exercício 34. Prove o corolário acima.

Terminamos esta subseção com um resultado adicional de pares atrator-repulsor.

Exercício 35. Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com atrator global $\mathcal{A}$, e (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se $x \in X \setminus \mathcal{A}$ e $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi \neq \varnothing$ então

$$\lim_{t\to\infty} d(T(t)x, \Xi) = 0.$$

Proposição 1.52. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com atrator global $\mathcal{A}$, e (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se $x \in X \setminus \mathcal{A}$ então*

$$\lim_{t\to\infty} d(T(t)x, \Xi) = 0 \quad \textit{ou} \quad \lim_{t\to\infty} d(T(t)x, \Xi^*) = 0.$$

Demonstração. Considere $x \in X \setminus \mathcal{A}$. Se $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi \neq \varnothing$, segue do Exercício 35 que $T(t)x \to \Xi$ quando $t \to \infty$. Por outro lado, se $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi = \varnothing$, existe $\delta > 0$ com $\gamma^+(x) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi) = \varnothing$, e neste caso afirmamos que $T(t)x \to \Xi^*$ quando $t \to \infty$. Se a afirmativa é falsa, existem $\nu > 0$ e sequência $t_k \to \infty$ tal que $d(T(t_k)x, \Xi^*) \geqslant \nu$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considerando $\xi_k\colon \mathbb{T}^+_{-t_k} \to X$ definida por $\xi_k(t) = T(t + t_k)x$, segue do Lema 1.46 que existe uma solução global ϕ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ tal que $\xi_k(s) \to \phi(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$. Logo $d(\phi(0), \Xi^*) \geqslant \nu$ e $d(\phi(s), \Xi) \geqslant \delta$ para todo $s \in \mathbb{T}$. Assim $\omega(\phi(0)) \cap \Xi = \varnothing$ e $\phi(0) \in \Xi^*$ o que é uma contradição. □

1.4.2 Decomposição de Morse

Com resultados da seção anterior, podemos estudar a *decomposição de Morse* do atrator global de um semigrupo dinamicamente gradiente generalizado com respeito à uma coleção disjunta de invariantes isolados limitada.

Definição 1.53. Dada uma família crescente

$$\varnothing = \Xi_0 \subset \Xi_1 \subset \cdots \subset \Xi_n = \mathcal{A}, \tag{1.5}$$

de $n + 1$ atratores locais, defina

$$E_j = \Xi_j \cap \Xi^*_{j-1} \quad \text{para cada } j = 1, \cdots, n.$$

A coleção *ordenada* $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_n\}$ é chamada de uma **decomposição de Morse** de $\mathcal{A}$.

Nosso objetivo é mostrar que dado um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com atrator global $\mathcal{A}$ e dinamicamente gradiente generalizado com respeito à uma coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_n\}$ limitada, então existe uma reordenação de $\mathbf{E}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. O resultado a seguir desempenha um papel fundamental neste processo.

Lema 1.54. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ e dinamicamente gradiente generalizado com respeito à coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_n\}$ limitada.*

(a) Para $i = 1, \cdots, n$, se $W^u(E_i) = E_i$ então E_i é um atrator local.

(b) Existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que E_k é um atrator local para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Demonstração. (a) Para

$$\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{d(E_i, E_j)\colon 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\} > 0,$$

onde $d(E_i, E_j)$ é a distância usual entre E_i e E_j. Mostraremos primeiramente que se $W^u(E_i) = E_i$, então dado $0 < \delta < \delta_0$ existe $0 < \delta' < \delta$ tal que se $\gamma^+(x) \subset \mathcal{O}_\delta(E_i)$ para todo $x \in \mathcal{O}_{\delta'}(E_i)$.

De fato, se este não é o caso, existem $0 < \delta < \delta_0$, sequências $x_k \to x \in E_i$ e $t_k \to \infty$ tais que

$$d(T(t_k)x_k, E_i) \geqslant \delta \quad \text{ e } \quad d(T(t)x_k, E_i) < \delta \text{ para } t \in [0, t_k) \cap \mathbb{T}^+.$$

Definindo $\xi_k\colon \mathbb{T}^+_{-t_k} \to X$ por $\xi_k(s) = T(s + t_k)x_k$, segue do Lema 1.46 que existem uma subsequência de $\{\xi_k\}$ (que denotamos a mesma) e uma solução global ϕ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ tal que $\xi_k(s) \to \phi(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}^+$. Além disso, temos

$$d(\phi(0), E_i) \geqslant \delta \quad \text{ e } \quad d(\phi(s), E_i) \leqslant \delta \text{ para } s \in \mathbb{T}^-.$$

Por (G1), sabemos que $d(\phi(s), E_i) \to 0$ quando $s \to -\infty$, e portanto $\phi(0) \in W^u(E_i) \setminus E_i$, o que nos dá uma contradição.

Agora para $0 < \delta < \delta_0$, escolha $0 < \delta' < \delta$ de modo que $\gamma^+(x) \subset \mathcal{O}_\delta(E_i)$ para todo $x \in \mathcal{O}_{\delta'}(E_i)$. Se mostrarmos que E_i atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(E_i)$, o resultado seguirá do item (a) do Exercício 31. Suponha que este não é o caso. Assim, existem $0 < \epsilon < \delta'$ e sequências $\{x_k\} \subset \mathcal{O}_{\delta'}(E_i)$ e $t_k \to \infty$ tais que

$$d(T(t_k)x_k, E_i) \geqslant \epsilon \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Veja que $T(t)x_k \in \mathcal{O}_\delta(E_i)$ para todo $t \geqslant 0$. Defina $\xi_k\colon \mathbb{T}^+_{-t_k} \to X$ por $\xi_k(s) = T(s + t_k)x_k$. Como anteriormente, existem subsequência de $\{\xi_k\}$ (que denotamos a mesma), e solução global ϕ de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ com

$$d(\phi(0),E_i)\geqslant\delta \quad \text{e} \quad d(\phi(s),E_i)\leqslant\delta \text{ para todo } s\in\mathbb{T}.$$

Por (G1), temos $d(\phi(s),E_i)\to 0$ para $s\to\pm\infty$, o contraria (G2), e conclui a demonstração deste item.

(b) Do item (a), se não existe um atrator local em $\mathbf{E}$ então para cada $1\leqslant i\leqslant n$, existe uma solução global ξ_i de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ tal que $\xi_i(t)\to E_i$ quando $t\to-\infty$ e $\xi_i(t)\to E_{j(i)}$ quando $t\to\infty$ para algum $j(i)\neq i$. Em um número finito de passos, isto produz uma estrutura homoclínica e contradiz (G2). □

Vamos agora ver um método para reordenar $\mathbf{E}$ e construtir uma sequência crescente de atratores locais como em (1.5) de maneira que $E_j=\Xi_j\cap\Xi_{j-1}^*$ para $j=1,\cdots,n$.

Construção de uma sequência crescente de atratores locais.

Consideremos $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ e dinamicamente gradiente generalizado com respeito à coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E}=\{E_1,\cdots,E_n\}$ limitada. Podemos reordenar os índices, se necessário, de maneira que E_1 é um atrator local de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. Lembramos que o seu repulsor associado E_1^* é dado por

$$E_1^*=\{x\in\mathcal{A}\colon \omega(x)\cap E_1=\varnothing\}.$$

Exercício 36. Mostre que $E_j\subset E_1^*$ para $j=2,\cdots,n$.

Sabemos também, da Proposição 1.50, que para cada $x\in\mathcal{A}\setminus(E_1\cup E_1^*)$ e solução global ξ de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ por x temos

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t),E_1^*)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} d(\xi(t),E_1)=0.$$

Exercício 37. Considere à restrição $\{T_1(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ ao conjunto compacto invariante E_1^*. Mostre que $\{T_1(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente generalizado com respeito à coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E}_2=\{E_2,\cdots,E_n\}$.

Assim após reordenação dos índices, se necessário, podemos assumir que E_2 é um atrator local de $\{T_1(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ em E_1^*. Defina $E_{1,0}^*=E_1^*$ e considere $E_{2,1}^*$ o repulsor associado à E_2 para o semigrupo $\{T_1(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ em $E_{1,0}^*$, isto é

$$E_{2,1}^*=\{x\in E_{1,0}^*\colon \omega(x)\cap E_2=\varnothing\}.$$

Como no Exercício 36, $E_j \subset E^*_{2,1}$ para $j = 3, \cdots, n$, e como no Exercício 37, a restrição $\{T_2(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ de $\{T_1(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ ao compacto invariante $E^*_{2,1}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente generalizado com respeito à coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E}_3 = \{E_3, \cdots, E_n\}$.

Podemos continuar este processo um número finito de passos, e obter uma reordenação $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de $\mathbf{E}$ de modo que E_j é um atrator local para a restrição $\{T_j(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ de $\{T_{j-1}(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ ao compacto invariante $E^*_{j,j-1}$ para $j = 1, \cdots, n$, com $\{T_0(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\} = \{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Notemos agora que, com essa construção, se uma solução global ξ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ satisfaz

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), E_\ell) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} d(\xi(t), E_k) = 0, \tag{1.6}$$

então $\ell \geqslant k$. A demonstração deste fato é deixada a cargo do leitor no próximo exercício.

Exercício 38. Mostre os seguintes itens para concluir a afirmação acima.

(a) Mostre que se (Ξ, Ξ^*) é um par atrator-repulsor de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e ϕ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ com $\phi(0) \in \Xi^*$ então $\phi(t) \in \Xi^*$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

(b) Mostre que $\xi(0) \in E^*_{k-1,k-2}$. Do item acima segue que $\xi(t) \in E^*_{k-1,k-2}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

(c) Usando o item (b) e notando que $E^*_{k-1,k-2}$ contém somente os invariantes isolados E_j para $j \geqslant k$, conclua que $\ell \geqslant k$.

Podemos agora construir uma sequência de $n+1$ atratores locais como em (1.5) da seguinte maneira: defina $\Xi_0 = \varnothing$, $\Xi_1 = E_1$ e, para $j = 2, 3, \cdots, n$, defina

$$\Xi_j = \Xi_{j-1} \cup W^u(E_j) = \bigcup_{i=1}^{j} W^u(E_i). \tag{1.7}$$

Segue da versão do Exercício 29 para semigrupos dinamicamente gradientes generalizados que $\Xi_n = \mathcal{A}$.

Lema 1.55. *Considere $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com atrator global $\mathcal{A}$, e assuma que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente generalizado com respeito à coleção disjunta de invariantes isolados $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_n\}$, reordenados de maneira a satisfazer* (1.6).

Seja $x_k \to x$ em $\mathcal{A}$ e considere soluções globais ξ_k de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x_k em $\mathcal{A}$ para a cada $k \in \mathbb{N}$, e assuma que existam $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ tais que

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi_k(t), E_i) = 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty} d(\xi_k(t), E_j) = 0 \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Então existem soluções globais $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ *(*$1 \leqslant p \leqslant n$*) de* $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ *em* $\mathcal{A}$ *e* $E_{\ell_1}, \cdots, E_{\ell_{p+1}} \in \mathbf{E}$ *com* $E_{\ell_1} = E_i$*,* $E_{\ell_{p+1}} = E_j$*,* $\ell_i > \ell_{i+1}$ *para cada* $i = 1, \cdots, p$ *tais que* $\zeta_{i_0}(0) = x$ *para algum* $1 \leqslant i_0 \leqslant p$ *e*

$$E_{\ell_r} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \zeta_r(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{\ell_{r+1}} \quad \textit{para } r = 1, \cdots, p.$$

Demonstração. Do Lema 1.46, notando que $\xi_k(s) = T(s+k)\xi_k(-k)$ por exemplo, existe uma solução global ϕ_1 de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ e uma subsequência de $\{\xi_k\}$ (que denotamos a mesma) tal que $\xi_k(s) \to \phi_1(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$. Note que $\phi_1(0) = x$. Como o semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente generalizado com respeito à $\mathbf{E}$ e satisfaz (1.6), existem $1 \leqslant b \leqslant a \leqslant n$ tais que

$$E_a \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \phi_1(s) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_b.$$

Temos $a \geqslant b$. No que segue, fixemos

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{1\leqslant p<q\leqslant n} d(E_p, E_q),$$

Assuma que $a \neq i$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $t_m \in \mathbb{T}^-$ tal que $d(\phi_1(t_m), E_a) < 1/2m$ e $k_m \in \mathbb{N}$ tal que $d(\xi_{k_m}(t_m), \phi_1(t_m)) < 1/2m$. Assim $d(\xi_{k_m}(t_m), E_a) < 1/m$. Como $a \neq i$ e $d(\xi_m(t), E_i) \to 0$ quando $t \to \infty$, existe $\tau_m \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$d(\xi_{k_m}(t_m - \tau_m), E_a) \geqslant \delta_0 \quad \text{e} \quad d(\xi(t_m - t), E_a) < \delta_0 \text{ para todo } t \in [0, \tau_m) \cap \mathbb{T}.$$

Como Exercício 23 (aplicado ao caso de invariantes isolados) mostramos que $\tau_m \to \infty$. Definindo $\psi_{k_m}(s) = \xi_{k_m}(s + t_m - \tau_m)$, do Lema 1.46 existe uma solução global ϕ_2 de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$\psi_{k_m}(s) \to \phi_2(t) \text{ para todo } s \in \mathbb{T}.$$

Mas assim

$$d(\phi_2(0), E_a) \geqslant \delta_0 \quad \text{e} \quad d(\phi_2(t), E_a) \leqslant \delta_0 \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+.$$

Portanto $\phi_2(t) \to E_a$ quando $t \to \infty$, e de (G1), (G2) e (1.6) existe $a_1 > a$ tal que $d(\phi_2(t), E_{a_1}) \to 0$ quando $t \to -\infty$. Portanto

$$E_{a_1} \overset{t\to\infty}{\longleftarrow} \phi_2(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_a \overset{t\to\infty}{\longleftarrow} \phi_1(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_b,$$

com $a_1 > a > b$. Se $a_1 \neq i$, repetimos o processo. Em um número finito de passos ou chegamos em i ou entramos em contradição com (G2).

Analogamente tratamos o caso $b \neq j$, e a demonstração está completa. □

Exercício 39. ($\star$) Mostre que Ξ_j é compacto para $j = 2, \cdots, n$ (veja [1, Lema 3.36]).

Solução: Como $\Xi_j \subset \mathcal{A}$, para concluirmos o resultado basta mostrar que Ξ_j é fechado. Sendo assim, considere uma sequência $\{x_k\} \subset \Xi_j$ com $x_k \to x \in \mathcal{A}$.

Como temos somente um número finito de invariantes isolados em $\mathbf{E}$, tomando subsequências se necessário, podemos assumir que existem $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$ tais que

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi_k(t), E_a) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} d(\xi_k(t), E_b) = 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $x_k \in \Xi_j$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $a \leqslant j$. Do Lema 1.55 segue que existem soluções globais $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ e $E_{\ell_1}, \cdots, E_{\ell_{p+1}} \in \mathbf{E}$ com $E_{\ell_1} = E_a$ e $E_{\ell_{p+1}} = E_b$ tais que $\zeta_{i_0}(0) = x$ para algum $1 \leqslant i_0 \leqslant p$ e

$$E_{\ell_r} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \zeta_r(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} E_{\ell_{r+1}} \quad \text{para } r = 1, \cdots, p.$$

Em particular, $x \in W^u(E_{\ell_{i_0}})$. Segue de (1.6) que $\ell_{i_0} \leqslant j$, o que mostra que $x \in \Xi_j$ e conclui o resultado.

Teorema 1.56. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ e dinamicamente gradiente generalizado com respeito à coleção disjunta de invariantes isolados limitada $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_n\}$, reordenada de maneira que E_j é um atrator local para a restrição de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ a $E^*_{j-1,j-2}$ (onde $E^*_{0,-1} = X$). Então para cada $j = 1, \cdots, n$, o conjunto Ξ_j definido em (1.7) é um atrator local para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em X e*

$$E_j = \Xi_j \cap \Xi^*_{j-1}. \tag{1.8}$$

Assim $\mathbf{E}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Sabemos que $\Xi_1 = E_1$ é um atrator local de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, e $\Xi_n = \mathcal{A}$ também é um atrator local para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Para $j = 2, \cdots, n-1$, o Lema 1.48 nos garante que é suficiente provar que Ξ_j é um atrator local para a restrição de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ ao atrator global $\mathcal{A}$.

Fixe então $j \in \{2, \cdots, n-1\}$. Como Ξ_j é compacto e $\Xi_j \cap E_i = \varnothing$ para $i = j+1, \cdots, n$, existe $d > 0$ tal que $\mathcal{O}_d(\Xi_j) \cap (\cup_{i=j+1}^n E_i) = \varnothing$. Afirmamos que dado $0 < \delta < d$, existem $0 < \delta' < \delta$ tal que

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j) \cap \mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) \cap \mathcal{A}. \tag{1.9}$$

De fato, se este não é o caso, para cada $\mathbb{N} \ni k > \frac{1}{d}$ existe $x_k \in \mathcal{A}$, com $d(x_k, \Xi_j) < \frac{1}{k}$, e $t_k \in \mathbb{T}^+$, com $t_k \to \infty$, tal que $d(T(t_k)x_k, \Xi_j) \geqslant \delta$ e $d(T(t)x_k, \Xi_j) < \delta$ para $t \in [0, t_k) \cap \mathbb{T}$.

Definindo $\xi_k(s) = T(s+t_k)x_k$ para $s \in \mathbb{T}^+_{-t_k}$ e usando o Lema 1.46, existe uma solução global ϕ de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ e uma subsequência de $\{\xi_k\}$ (que denotamos a mesma) tal que $\xi_k(s) \to \phi(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$. Logo $d(\phi(0), \Xi_j) \geqslant \delta$ e $d(\phi(t), \Xi_j) \leqslant \delta < d$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$. Assim $\phi(t) \to E_i$ para algum $i \in \{1, \cdots, j\}$ e portanto $\phi(0) \in W^u(E_i) \subset \Xi_j$, o que nos dá uma contradição.

Exercício 40. Mostre que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j) \cap \mathcal{A})$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j) \cap \mathcal{A}$. Mostre também que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j) \cap \mathcal{A})$ (por ser invariante) está contido em Ξ_j, e conclua que Ξ_j é um atrator local de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$.

Nos resta provar (1.8) para cada $j = 1, \cdots, n$. Note que $\Xi_j \supset \cup_{i=1}^{j} E_i$ e $\Xi^*_{j-1} = \{x \in \mathcal{A} \colon \omega(x) \cap \Xi_{j-1} = \varnothing\} \supset \cup_{i=j}^{n} E_i$, e assim $\Xi_j \cap \Xi^*_{j-1} \supset E_j$. Além disso, dados $x \in \Xi_j \cap \Xi^*_{j-1}$ e uma solução global ξ de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathcal{A}$ por x, por (G1) devemos ter

$$\lim_{t \to -\infty} d(\xi(t), E_\ell) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} d(\xi(t), E_k) = 0.$$

para $\ell, k \in \{1, \cdots, n\}$. Agora veja que:

($\star$) do Exercício 38, segue que $\ell \geqslant k$;

($\star$) do fato que $x \in \Xi_j$, segue que $\ell \leqslant j$;

($\star$) do fato que $x \in \Xi^*_{j-1}$, segue que $k \geqslant j$,

e portanto $\ell = k = j$, e (G2) nos dá que $\xi(t) \in E_j$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Em particular, $x = \xi(0) \in E_j$, portanto $\Xi \cap \Xi^*_{j-1} \subset E_j$, e a demonstração está completa. □

Corolário 1.57. *Seja $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$, dinamicamente gradiente generalizado com respeito à coleção disjunta de conjuntos invariantes isolados limitada $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_n\}$, reordenada de maneira a constituir uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}$. Então*

$$\cap_{j=0}^{n} (\Xi_j \cup \Xi^*_j) = \cup_{j=1}^{n} E_j. \tag{1.10}$$

Demonstração. Para cada $i, j = 1, \cdots, n$ temos $E_i \subset \Xi_j \cup \Xi^*_j$, e assim $\cup_{j=1}^{n} E_j \subset \cap_{j=0}^{n} (\Xi_j \cup \Xi^*_j)$.

Para a outra inclusão, tome $x \in \cap_{j=0}^{n} (\Xi_j \cup \Xi^*_j)$.

Exercício 41. Mostre que existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $x \in \Xi_j$ para $k \leqslant j \leqslant n$ e $x \in \Xi^*_j$ para $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Do exercício acima temos $x \in \Xi_k \cap \Xi^*_{k-1} = E_k$ (pelo Teorema 1.56), o que completa a demonstração. □

1.4.3 Construção da função de Lyapunov

Inspirados no trabalho de Conley (see [4]) provaremos a seguir a equivalência entre os semigrupos gradientes generalizados e os semigrupos dinamicamente gradientes generalizados relativos uma coleção disjunta de invariantes isolados limitada $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_n\}$. Os lemas a seguir desempenham papel fundamental na prova desta equivalência.

Lema 1.58. *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com atrator global $\mathcal{A}$. Defina a função $h\colon X \to \mathbb{R}$ por*

$$h(x) = \sup_{t\in\mathbb{T}^+} d(T(t)x, \mathcal{A}) \quad \textit{para cada } x \in X.$$

Então h está bem definida, é contínua, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $x \in X$, e $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$.

Demonstração. Começamos a demonstração com o seguinte exercício:

Exercício 42. Mostre que h está bem definida e que $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$.

Mostremos agora que para cada $x \in X$ a aplicação $\mathbb{T} \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é descrescente. Para isso, sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^+$ com $t_1 \geqslant t_2$. Temos

$$\begin{aligned} h(T(t_1)x) &= \sup_{t\in\mathbb{T}^+} d(T(t)T(t_1)x, \mathcal{A}) = \sup_{t\in\mathbb{T}^+} d(T(t+t_1)x, \mathcal{A}) \\ &= \sup_{t\in\mathbb{T}^+_{t_1}} d(T(t)x, \mathcal{A}) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{T}^+_{t_2}} d(T(t)x, \mathcal{A}) = \sup_{t\in\mathbb{T}^+} d(T(t)T(t_2)x, \mathcal{A}) = h(T(t_2)x). \end{aligned}$$

Nos resta mostrar a continuidade de h. Pelo Lema 1.47 aplicado a $E = \mathcal{A}$, dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})) \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$, o que mostra que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, \mathcal{A}) < \delta$ temos $h(x) < \epsilon$, e conclui a continuidade de h em $\mathcal{A}$. Agora, se $x_0 \in X \setminus \mathcal{A}$ então $h(x_0) \geqslant d(x_0, \mathcal{A}) > 0$, e podemos escolher $0 < \mu < d(x_0, \mathcal{A})$ e uma vizinhança V limitada de x_0 em X com $d(x, \mathcal{A}) > \mu$ para todo $x \in V$. Para esta vizinhança V existe $\tau = \tau(V) \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)V \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$ para todo $t \in \mathbb{T}^+_\tau$.

Exercício 43. (a) Mostre que para $x \in V$ temos $h(x) = \sup_{s\in[0,\tau]\cap\mathbb{T}^+} d(T(s)x, \mathcal{A})$.

(b) Use o item anterior e a continuidade forte de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ para concluir que $h\,|_V\colon V \to \mathbb{R}$ é contínua.

Assim $h\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua e a demonstração assim está completa. □

Lema 1.59. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com atrator global $\mathcal{A}$ e um par atrator-repulsor (Ξ, Ξ^*). Então existe uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

(i) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto f(T(t)x) \in \mathbb{R}$ *é decrescente para cada* $x \in X$*;*

(ii) $f^{-1}(0) = \Xi$ *e* $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$*;*

(iii) dado $x \in X$*, se* $f(T(t)x) = f(x)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^+$*, então* $x \in \Xi \cup \Xi^*$*.*

Demonstração. Primeiramente lembremos que que Ξ e Ξ^* são subconjuntos fechados e disjuntos do conjunto compacto $\mathcal{A}$. Assim, com a convenção que $d(x, \varnothing) = 1$ para cada $x \in X$, definimos a função[1] $l\colon X \to [0,1]$ associada a (Ξ, Ξ^*) por

$$l(x) = \frac{d(x,\Xi)}{d(x,\Xi) + d(x,\Xi^*)} \qquad \text{para cada } x \in X.$$

Exercício 44. Mostre que:

(a) l está bem definida;

(b) l é Lipschitz contínua[2] em X, e portanto é uniformemente contínua em X;

(c) $l^{-1}(0) = \Xi$ e $l^{-1}(1) = \Xi^*$.

Definamos então a função $k\colon X \to [0,1]$ por

$$k(x) = \sup_{t \in \mathbb{T}^+} l(T(t)x) \qquad \text{para cada } x \in X.$$

Exercício 45. Mostre que:

(a) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto k(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $x \in X$;

(b) $k(\Xi) = \{0\}$ e se $\Xi^* \neq \varnothing$ então $k(\Xi^*) = 1$;

(c) se X é conexo, ambos Ξ, Ξ^* são não-vazios e k é contínua, então $k(X) = [0,1]$.

Afirmamos ainda que $k\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua, $k^{-1}(0) = \Xi$, $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$ e que se $x \in \mathcal{A}$ e $k(T(t)x) = k(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $x \in \Xi \cup \Xi^*$. De fato, já sabemos que $k(\Xi) = \{0\}$, agora se $x \in X$ é tal que $k(x) = 0$, então $l(T(t)x) = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Em particular, $0 = l(T(0)x) = l(x)$, e assim, $x \in \Xi$, isto é $k^{-1}(0) \subset \Xi$, mostrando que $k^{-1}(0) = \Xi$.

Sabemos também que $k(\Xi^*) = \{1\}$. Agora seja $x \in \mathcal{A}$ com $k(x) = 1$. Se $x \notin \Xi^*$, segue da Proposição 1.50 que $\omega(x) \subset \Xi$. Da continuidade uniforme de l e do fato que $\omega(x)$ atrai x,

[1] Esta é a *função de canônica de Urysohn* quando Ξ e Ξ^* são ambos não-vazios (veja [6, Teorema 33.1] para a versão topológica deste resultado).

[2] Note que para $d_0 = d(\Xi, \Xi^*) > 0$, temos $|l(x) - l(z)| \leqslant \frac{1}{d_0} d(x,z)$ para todo $x, z \in X$.

obtemos $l(T(t)x) \to 0$ quando $t \to \infty$. Logo existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$1 = k(x) = \sup_{t \in [0,t_0] \cap \mathbb{T}^+} l(T(t)x),$$

que por sua vez implica a existência de um $t_1 \in [0, t_0] \cap \mathbb{T}$ tal que $l(T(t_1)x) = 1$, isto é, $T(t_1)x \in \Xi^*$. Mas $\Xi \supset \omega(x) = \omega(T(t_1)x) \subset \Xi^*$, o que nos dá uma contradição e mostra que $x \in \Xi^*$. Disto concluímos que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} \subset \Xi^*$ e portanto $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Considere agora $x \in \mathcal{A}$ satisfazendo $k(T(t)x) = k(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Se $x \notin \Xi^*$, novamente a Proposição 1.50 nos dá $\omega(x) \subset \Xi$. Da definição de k, do fato que $k(x) = k(T(t)x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e do fato que $\omega(x)$ atrai x obtemos

$$k(x) = \lim_{t \to \infty} k(T(t)x) = \lim_{t \to \infty} \sup_{s \in \mathbb{T}_t^+} l(T(s)x) = 0.$$

Assim $x \in k^{-1}(0) = \Xi$. Portanto $x \in \Xi \cup \Xi^*$.

A seguir provamos a continuidade de k, e separamos a prova em três partes:
Parte 1. Continuidade de k em Ξ^*.

Como $l(x) \leqslant k(x) \leqslant 1$ para todo $x \in X$, dado $x_0 \in \Xi^*$ e $x \in X$ temos

$$|k(x) - k(x_0)| = 1 - k(x) \leqslant 1 - l(x).$$

Isto e a continuidade de l em x_0 ($l(x_0) = 1$) implicam a continuidade de k em $x_0 \in \Xi^*$.
Parte 2. Continuidade de k em Ξ.

Da definição de l é fácil ver que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \epsilon)$. Do Lema 1.47, existe $0 < \delta' < \delta$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, o que nos permite concluir que $k(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset [0, \epsilon]$.
Parte 3. Continuidade de k em $X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$.

Dado $x_0 \in X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$, das Proposições 1.50 e 1.52 obtemos

$$d(T(t)x_0, \Xi) \to 0 \quad \text{ou} \quad d(T(t)x_0, \Xi^*) \to 0 \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Para prosseguir, separaremos a demonstração em dois subcasos:

Subcaso 1. $d(T(t)x_0, \Xi^*) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Neste subcaso, note primeiramente que $k(x_0) = 1$. Agora dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de l em Ξ^*, existe uma vizinhança aberta V de Ξ^* em X tal que $l(V) \subset (1 - \varepsilon, 1]$. Se $t_0 \in \mathbb{T}^+$ é tal que $T(t_0)x_0 \in V$, da continuidade de $T(t_0)$, existe uma vizinhança U de x_0 tal que

$T(t_0)U \subset V$. Disto segue que $k(x) > 1-\varepsilon$ para todo $x \in U$ (pois $T(t_0)x \in V$ e portanto $1-\varepsilon < l(T(t_0)x) \leqslant k(x)$), e conclui a continuidade de k em x_0 neste caso.

Subcaso 2. $d(T(t)x_0, \Xi) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Neste subcaso temos $l(x_0) > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \frac{l(x_0)}{2})$ e, do Lema 1.47, existe um $\delta' \in (0,\delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$. Seja $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t_0)x_0 \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Da continuidade de $T(t_0)$, existe uma vizinhança U_1 de x_0 in X tal que $T(t_0)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Então, para todo $x \in U_1$ e $t \in \mathbb{T}^+_{t_0}$ temos $T(t)x \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$. Assim, da continuidade de l podemos encontrar uma vizinhança U_2 de x_0 em X tal que $l(x) > \frac{l(x_0)}{2}$ para todo $x \in U_2$. Tomando $U = U_1 \cap U_2$, para todo $x \in U$ vale

$$k(x) = \sup_{t \in [0,t_0]\cap\mathbb{T}} l(T(t)x).$$

Argumentando como no Exercício 43, obtemos a continuidade de k em x_0, o que completa a demonstração da continuidade de k em X.

Finalmente, defina $f\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = k(x) + h(x) \quad \text{para cada } x \in X, \tag{1.11}$$

onde $h\colon X \to \mathbb{R}$ é dada no Lema 1.58. Claramente f é contínua, pois k e h o são. Além disso, como $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto k(T(t)x) \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ são decrescentes para cada $x \in X$, a mesma propriedade é válida para f.

Claramente $f(\Xi) = \{0\}$. Por outro lado, se $f(x) = 0$ para algum $x \in X$, então $h(x) = k(x) = 0$ (pois $h, k \geqslant 0$) e devemos ter que $x \in \Xi$. Isto mostra que $f^{-1}(0) = \Xi$. Adicionalmente, como $f\,|_{\mathcal{A}} = k\,|_{\mathcal{A}}$ temos $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Por último, se $x \in X$ tal que $f(T(t)x) = f(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ temos

$$0 \leqslant h(x) - h(T(t)x) = k(T(t)x) - k(x) \leqslant 0,$$

e assim $h(T(t)x) = h(x)$ e $k(T(t)x) = k(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Como $T(t)x \to \mathcal{A}$ quando $t \to \infty$, segue da definição de h que $h(x) = 0$, e portanto $x \in \mathcal{A}$. Assim, $x \in \mathcal{A}$ e $k(T(t)x) = k(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, o que nos dá $x \in \Xi \cup \Xi^*$, e completa a prova. □

Concluímos então essa seção com a equivalência entre semigrupos gradientes generalizados e semigrupos dinamicamente gradientes generalizados.

Teorema 1.60. *Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo com atrator global $\mathcal{A}$ e uma coleção disjunta de invariantes isolados limitada $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_n\}$. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente generalizado com respeito à $\mathbf{E}$ se, e somente se,*

$\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente generalizado com respeito à $\mathbf{E}$. Além disso, a função de Lyapunov $V\colon X \to \mathbb{R}$ de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com respeito à $\mathbf{E}$ pode ser tomada de modo que $V(E_m) = m-1$, $m = 1, \cdots, n$.

Demonstração. Começamos com o seguinte exercício:

Exercício 46. Mostre que um semigrupo gradiente generalizado com respeito à coleção disjunta de invariantes isolados limitada $\mathbf{E}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente generalizado com respeito à $\mathbf{E}$.

Suponha agora que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente generalizado com respeito à $\mathbf{E}$, com $\mathbf{E}$ reordenada de modo a ser uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}$. Seja $\varnothing = \Xi_0 \subset \Xi_1 \subset \cdots \subset \Xi_n = \mathcal{A}$ a sequência de atratores locais definida em (1.7) e $\varnothing = \Xi_n^* \subset \Xi_{n-1}^* \subset \cdots \subset \Xi_0^* = \mathcal{A}$ os repulsores associados. Sabemos do Teorema 1.56 que para cada $j = 1, \cdots, n$ temos $E_j = \Xi_j \cap \Xi_{j-1}^*$.

Considere a função h do Lema 1.58, e para cada $j = 1, \cdots, n$ a função k_j dada pela Proposição 1.59 para o par atrator-repulsor (Ξ_j, Ξ_j^*). Definamos então a função contínua $V\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$V(x) = h(x) + \sum_{j=1}^{n} k_j(x) \quad \text{para cada } x \in X.$$

Afirmamos que V é uma função de Lyapunov de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com respeito à $\mathbf{E}$. De fato, dado $x \in X$, é simples notar que $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente, pois h e k_j, para $j = 1, \ldots, n$ possuem essa propriedade.

Exercício 47. Para cada $j = 1, \cdots, n$ defina $f_j\colon X \to \mathbb{R}$ por $f_j(z) = k_j(z) + h(z)$ para cada $z \in X$. Mostre que se $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ então para cada $j = 1, \cdots, n$ temos $f_j(T(t)x) = f_j(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Conclua, usando o Lema 1.59, que $x \in \Xi_j \cup \Xi_j^*$.

Tome agora $x \in X$ é tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Do exercício acima $x \in \Xi_j \cup \Xi_j^*$, para cada $j = 0, 1, \cdots, n$. Assim, pelo Corolário 1.57 obtemos

$$x \in \bigcap_{j=0}^{n} (\Xi_j \cup \Xi_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j,$$

e conclui a prova de que V é uma função de Lyapunov para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com respeito à $\mathbf{E}$.

Por fim mostremos a última afirmação. Se $m \in \{1, \cdots, n\}$ e $x \in E_m = \Xi_m \cap \Xi_{m-1}^*$, segue que $x \in \Xi_m \subset \Xi_{m+1} \subset \cdots \subset \Xi_n = \mathcal{A}$ e $x \in \Xi_{m-1}^* \subset \Xi_{m-2}^* \subset \cdots \subset \Xi_0^* = \mathcal{A}$. Logo $k_j(x) = 0$

se $m \leqslant j \leqslant n$ e $k_j(x) = 1$ se $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Portanto

$$V(x) = \sum_{j=1}^{n} k_j(x) = \sum_{j=1}^{m-1} k_j(x) = m - 1,$$

uma vez que $h(x) = 0$, pois $x \in \Xi_m \subset \mathcal{A}$. $\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Um resultado sobre conexidade

Teorema A.1. *Considere uma sequência $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$ de subconjuntos não-vazios, compactos e conexos de um espaço topológico X, com X Hausdorff.*

Então $C = \cap_{i=1}^{\infty} C_n$ é um conjunto não-vazio, compacto e conexo.

Demonstração. Claramente C é fechado, pois é intersecção de fechados. Como $C \subset C_1$ e C_1 é compacto, C é compacto. Se $C = \varnothing$, então

$$C_1 = C_1 \setminus C = C_1 \setminus \cap_{i=1}^{\infty} C_n = \cup_{i=1}^{\infty}(C_1 \setminus C_n) = \cup_{i=2}^{\infty}(C_1 \setminus C_n),$$

ou seja, a coleção de abertos $\{U_n\}_{n \geqslant 2} = \{C_1 \setminus C_n\}_{n \geqslant 2}$ de C_1 é uma cobertura aberta para C_1 e satisfaz $U_n \subset U_{n+1}$ para todo $n \geqslant 2$. Como C_1 é compacto, existe n_0 tal que $C_1 = U_{n_0}$, o que implica que $C_{n_0} = \varnothing$, o que é uma contradição.

Agora suponha que C não é conexo. Existem A, B conjuntos compactos, não-vazio e disjuntos em X tais que $C = A \cup B$. Podemos então, como X é Hausdorff, encontrar abertos disjuntos U e V de X tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Defina $F_n = C_n \setminus (U \cup V)$ para cada $n \geqslant 1$. Claramente F_n é compacto (pois é fechado contido em C_n) e $F_n \supset F_{n+1}$ para cada $n \geqslant 1$. Além disso

$$\cap_{i=1}^{\infty} F_n = \cap_{i=1}^{\infty}(C_n \setminus (U \cup V)) = C \setminus (U \cup V) = \varnothing.$$

Portanto $\{F_n\}_{n \geqslant 1}$ é uma sequência de compactos encaixados com intersecção vazia. Segue que $F_{n_0} = \varnothing$ para algum $n_0 \geqslant 1$, o que implica que $C_{n_0} \subset U \cup V$. Como C_{n_0} é conexo, ele deve estar inteiramente contido em U ou em V. Digamos que $C_{n_0} \subset U$ (a prova é análoga no outro caso). Temos então $C \subset \cap_{n \geqslant n_0} C_n \subset C_{n_0} \subset U$. Mas assim $B = C \cap B \subset C \cap V = \varnothing$, e chegamos a uma contradição. Desta forma, C é conexo. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Matheus C. Bortolan, Alexandre N. Carvalho, and José A. Langa, *Attractors under autonomous and non-autonomous perturbations*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 2020.

[2] Alexandre N. Carvalho and José A. Langa, *An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation*, J. Differential Equations **246** (2009), no. 7, 2646–2668. MR 2503016

[3] Alexandre N. Carvalho, José A. Langa, James C. Robinson, and Antonio Suárez, *Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system*, J. Differential Equations **236** (2007), no. 2, 570–603. MR 2322025

[4] Charles Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978. MR 511133

[5] Jack K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 25, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. MR 941371

[6] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000, Second edition of [MR0464128]. MR 3728284

[7] Krzysztof P. Rybakowski, *The homotopy index and partial differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987. MR 910097